

# Optimal Design and Control of Cash Register Service System of Supermarkets

Luoman Li<sup>1</sup>, Jiabo Xu<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Xinjiang University of Finance and Economics, Urumqi Xinjiang

<sup>2</sup>Xinjiang Institute of Technology, Urumqi Xinjiang

Email: 1575900814@qqcom, xujiabo\_math@aliyun.com

Received: Jun. 23<sup>rd</sup>, 2018; accepted: Jul. 13<sup>th</sup>, 2018; published: Jul. 20<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

In this paper, the related theory of queuing theory is applied to optimize the supermarket cashier service system. Some relevant data is obtained by collecting and then M/M/C queuing model is applied to cashier service system of a supermarket in Urumqi. According to the actual data, we optimize the number of the cash register in different periods. From the angles of supermarkets and customers, we get the most optimal number of the register, which can reduce costs of the supermarket and improve customer satisfaction.

## Keywords

Queuing Theory, Stochastic Service System, M/M/C Model

---

# 超市收银服务系统最优设计与控制

李罗蔓<sup>1</sup>, 徐加波<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>新疆财经大学, 新疆 乌鲁木齐

<sup>2</sup>新疆工程学院, 新疆 乌鲁木齐

Email: 1575900814@qqcom, xujiabo\_math@aliyun.com

收稿日期: 2018年6月23日; 录用日期: 2018年7月13日; 发布日期: 2018年7月20日

---

## 摘 要

本文应用排队论的相关理论优化超市的收银服务系统, 通过收集、整理得到超市的一些相关数据, 将M/M/C排队模型应用到乌鲁木齐市的某超市的收银服务系统中, 依据实际数据, 优化了不同时段开放的收银台台数, 并从超市和顾客两个角度得到最优的收银台个数, 以降低超市成本, 提高顾客的满意度。

\*通讯作者。

## 关键词

排队论, 随机服务系统, M/M/C排队模型

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 背景

排队论的基本思想是从 1910 年丹麦电话工程师爱尔朗在解决自动电话问题时形成的, 50 年代初, 美国数学家费勒提出关于生灭过程的研究, 英国数学家肯德尔提出嵌入马尔科夫链理论, 以及排队论的分类方法, 为排队论奠定了理论基础[1]。如今, 排队论作为运筹学的一个重要分支, 它的应用在我们生活中处处可见, 比如说, 超市的收银服务系统就是一个随机服务系统。本文就是在用排队论的相关知识来优化超市的收银服务系统, 使超市合理利用资源, 节约运营成本。

现在大大小小的超市数不胜数, 人们除了关心商品的价格和质量问题, 在激烈的市场竞争中, 在商品的质量和价格基本相同的条件下, 顾客对于超市的服务质量要求也越来越高, 所以从超市的角度研究如何提高服务质量, 吸引更多的顾客很重要。超市的收银台作为服务人员和顾客的接触点, 收银台过多, 虽然可以提高顾客的满意度, 但是不利于超市的成本最优, 甚至导致资源浪费, 收银台过少, 就会出现顾客结账拥挤状态, 这不是人们理想的购物环境, 可能会导致顾客流失。因此, 优化收银台台数, 既能降低超市的成本支出, 提高服务质量, 又能提高顾客的满意度, 优化购物环境, 吸引更多的客户, 提高超市整体效益。本文应用排队论理论来考虑超市收银台数最优设计问题, 通过建立超市排队系统优化模型, 以乌鲁木齐市某好家乡超市为例, 优化忙期和非忙期各个不同时段开放的服务台数, 给商家提供合理建议。

## 2. 预备知识

从排队论的相关参数和排队系统的运行指标等介绍了一些预备知识并在此基础上对 M/M/C 排队模型进行了系统介绍, 为后面的研究做基础工作。

### 2.1. 运行指标

平均队长/人: 系统内顾客数的数学期望, 记作  $L_s$ ; 平均排队长/人: 系统内等待服务的顾客数的数学期望, 记作  $L_q$ ; 平均逗留时间/min: 顾客在系统内逗留时间的数学期望, 记作  $W_s$ ; 平均等待时间/min: 指一个顾客在排队系统中排队等待时间的数学期望, 记作  $W_q$ ; 平均忙期/min: 指服务机构连续繁忙时间长度的数学期望, 记为  $T_b$  [2]。

### 2.2. M/M/C 排队模型系统介绍

#### 2.2.1. M/M/C 排队系统的相关指标

设  $\lambda$  表示单位时间内顾客的平均到达数,  $\mu$  表示单位时间内被服务完离去的平均顾客数, 可得  $\frac{1}{\lambda}$  表示相邻两个人到达的平均间隔时间,  $\frac{1}{\mu}$  表示对每个人的服务时间。相关公式有:

$$L_s = \lambda W_s \text{ 或 } W_s = \frac{L_s}{\lambda}。$$

$$L_q = \lambda W_q \text{ 或 } W_q = \frac{L_q}{\lambda}。$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}, \quad L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}。$$

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n, \quad L_q = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S)。$$

只要求得  $P_n$  的值就可得  $L_s$ 、 $L_q$ 、 $W_s$ 、 $W_q$ 。

$$\text{令, } \rho_n = \frac{\lambda}{n\mu}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}。$$

当整个排队系统稳定时, 即  $\rho_n < 1$ , 顾客在系统中的平均等待时间为  $W_q = \frac{\rho_n}{\lambda(1-\rho_n)^2} \rho_n$ ,

平均等待队长为  $L_q = \frac{\rho_n}{(1-\rho_n)^2} \rho_n$ 。

设顾客所允许的最长平均等待时间为  $T_w$ , 所能允许的最长队长为  $L_w$ , 所能容忍的系统中最长平均等待队长为  $nL_w$ , 可得

$$\begin{cases} \rho_n = \frac{\lambda}{n\mu} < 1 \\ W_q = \frac{\rho_n}{\lambda(1-\rho_n)^2} \rho_n \leq T_w \\ L_q = \frac{\rho_n}{(1-\rho_n)^2} \rho_n \leq nL_w \end{cases}$$

$n$  的最小取值就是服务台数量的最优数, 为

$$n^* = \min \left\{ n \mid \rho_n = \frac{\lambda}{n\mu} < 1, W_q = \frac{\rho_n}{\lambda(1-\rho_n)^2} \rho_n \leq T_w, L_q = \frac{\rho_n}{(1-\rho_n)^2} \rho_n \leq nL_w \right\}$$

由上可得

$$W_q = \frac{\rho_n^*}{\lambda(1-\rho_n^*)^2} \rho_n^*, \quad L_q = \frac{\rho_n^*}{\lambda(1-\rho_n^*)^2} \rho_n^*。$$

### 2.2.2. 泊松分布

在排队论中常常用到最简单流这个概念。指的是一段时间内, 有  $k$  个顾客到达服务系统的概率服从泊松分布, 即

$$v_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (k=0,1,2,\dots)$$

当  $k=0$  时有  $v_0(t) = e^{-\lambda t}$ 。

### 2.2.3. 负指数分布

若用  $f(t)$  代表依次服务完毕离去的两个顾客的间隔时间  $t$  的概率密度函数( $t \geq 0$ ), 用  $F(t)$  代表  $t$  的

概率分布函数, 则有

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}$$

$$F(t) = P\{T \leq t\} = \int_0^t \mu e^{-\mu t} dt = -\int_0^t d[e^{-\mu t}] = 1 - e^{-\mu t}$$

### 3. M/M/C 模型超市服务系统的应用

本文对乌鲁木齐市某家超市进行数据调查, 该超市一共有 20 个收银台, 分别对节假日和非节假日两个时期进行调查, 取 15 个时间段, 每个时间段抽取 400 个样本进行统计, 整理得出下表, 非节假日数据见表 1、表 2, 节假日数据见表 3、表 4、表 5、表 6。

**Table 1.** Statistics on the number of non-holiday customers coming in 1

**表 1.** 非节假日顾客到来人数统计频数 1

人数/人	60 以下	61~70	71~80	81~90	91~100	101~110	111~120	121~130	131~140	141 以上
8:00~9:00	2	1	9	61	102	114	44	5	5	3
9:00~10:00	2	2	10	61	142	134	61	6	7	3
10:00~11:00	1	3	0	372	24	133	101	31	2	0
11:00~12:00	15	94	187	117	128	3	2	2	1	1
12:00~13:00	1	6	50	143	136	61	11	7	3	5
13:00~14:00	1	3	11	64	127	131	61	7	3	2
16:00~17:00	1	0	1	17	66	117	132	48	17	0
17:00~18:00	1	0	1	7	55	98	147	92	31	1
18:00~19:00	1	3	15	68	161	114	43	7	3	1
19:00~20:00	0	2	4	43	127	134	47	11	2	1
20:00~21:00	2	1	2	51	117	153	65	13	1	2

**Table 2.** Statistics on the number of non-holiday customers coming in 2

**表 2.** 非节假日顾客到来人数统计频数 2

人数/个	40 以下	41~50	51~60	61~70	71~80	81~90	91 以上
14:00~15:00	2	49	201	135	27	1	1
15:00~16:00	0	7	87	192	121	27	1
21:00~22:00	2	5	60	173	173	42	0

**Table 3.** Statistics of the number of arrivals of holiday customers 1

**表 3.** 节假日顾客到来人数统计频数 1

人数/个	80 以下	81~90	91~100	101~110	111~120	121~130	131~140	141~150	151~160	161 以上
8:00~9:00	2	5	14	55	96	57	24	2	1	1
9:00~10:00	1	2	11	58	136	117	75	13	2	0
12:00~13:00	1	0	7	27	121	143	74	29	4	0
14:00~15:00	3	7	41	155	142	71	11	0	1	2
15:00~16:00	2	4	44	113	132	77	32	2	1	0
18:00~19:00	1	3	10	27	68	127	117	61	0	2

通过对表 1~表 6 的分析计算可以得出顾客平均到达率, 如下表, 表 7 为单位时间内非节假日和节假日顾客到达率, 表 8 和表 9 分别为非节假日/节假日顾客到达率及开放台数。其中  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  分别为非节假日和节假日顾客到达均值;  $n_1$  和  $n_2$  分别为非节假日和节假日收银台数。

**Table 4.** Statistics of the number of arrivals of holiday customers 2

**表 4.** 节假日顾客到来人数统计频数 2

人数/个	100 以下	101~110	111~120	121~130	131~140	141~150	151~160	161~170	171~180	181 以上
10:00~11:00	1	2	1	9	38	90	135	105	51	11
11:00~12:00	1	1	7	34	97	131	108	27	6	2
19:00~20:00	2	4	11	61	120	133	67	21	1	1
20:00~21:00	1	4	14	60	118	134	70	19	4	0

**Table 5.** Statistics of the number of arrivals of holiday customers 3

**表 5.** 节假日顾客到来人数统计频数 3

人数/个	140 以下	141~150	151~160	161~170	171~180	181~190	191~200	201~210	211~220	221 以上
12:00~14:00	2	1	22	49	108	122	68	30	11	1
16:00~17:00	2	7	41	80	120	101	50	8	5	2
17:00~18:00	18	51	120	110	69	26	5	1	3	1

**Table 6.** Statistics of the number of arrivals of holiday customers 4

**表 6.** 节假日顾客到来人数统计频数 4

人数/个	40 以下	41~50	51~60	61~70	71~80	81~90	91 以上
9:00~10:00	2	3	47	172	134	28	5

**Table 7.** Customer arrival rate per unit time

**表 7.** 单位时间内顾客到达率

时间段	非节假日	节假日
8:00~9:00	46.21	70.35
9:00~10:00	42.31	69.24
10:00~11:00	110.97	119.78
11:00~12:00	96.24	124.12
12:00~13:00	94.15	107.58
13:00~14:00	99.85	104.21
14:00~15:00	89.21	79.01
15:00~16:00	90.54	101.24
16:00~17:00	103.58	152.14
17:00~18:00	108.25	167.58
18:00~19:00	102.54	160.48
19:00~20:00	91.47	128.41
20:00~21:00	76.78	80.12
21:00~22:00	53.14	54.34

**Table 8.** Customer arrival rate and number of corresponding open service desks during non-holiday holidays  
**表 8.** 非节假日各时段顾客到达率及相应开放服务台数量

时间段	非节假日到达率	非节假日开放服务台数/个
8:00~9:00	403.15	7
9:00~10:00	413.25	7
10:00~11:00	721.24	7
11:00~12:00	631.12	11
12:00~13:00	721.45	11
13:00~14:00	733.54	11
14:00~15:00	402.58	11
15:00~16:00	684.25	11
16:00~17:00	785.94	11
17:00~18:00	806.84	11
18:00~19:00	845.67	11
19:00~20:00	658.47	11
20:00~21:00	558.46	11
21:00~22:00	453.73	7

**Table 9.** Customer arrival rate and number of corresponding open service desks during each holiday period  
**表 9.** 节假日各时段顾客到达率及相应开放服务台数量

时间段	节假日到达率	节假日开放服务台数/个
8:00~9:00	687.57	9
9:00~10:00	785.13	9
10:00~11:00	902.89	9
11:00~12:00	1078.25	14
12:00~13:00	825.73	14
13:00~14:00	1172.45	14
14:00~15:00	1172.58	14
15:00~16:00	758.14	14
16:00~17:00	1253.17	14
17:00~18:00	1351.56	14
18:00~19:00	1156.85	14
19:00~20:00	945.32	9
20:00~21:00	752.87	9
21:00~22:00	582.34	9

从表 8 和表 9 可以看出, 该超市收银台开放台数不太合理。例如在非节假日期间, 13:00~14:00 为低峰期, 收银台开放数目为 11, 而 19:00~20:00 为高峰期, 开放数也为 11, 这样可能会造成低峰期资源浪

费, 而高峰期出现拥堵, 服务质量下降的情况。因此该超市服务台系统设置很不合理, 需要对其进行优化。为了研究每个顾客服务时间的概率分布, 我们随机调查顾客服务时间, 整理得表 10, 并且抽查了一些顾客询问他们能容忍的最长的等待时间和等待队长。见表 11~表 14。

根据表 11~表 14 可以计算出在非节假日期间顾客能忍受的最长平均等待时间为 9.13 min, 平均等待队长为 10.09 人; 在节假日期间顾客能忍受的最长平均等待时间为 10.04 min, 平均等待队长为 10.52 人。

在之前计算的非节假日期间顾客能忍受的最长平均等待时间为 9.13 min, 平均等待队长为 10.09 人; 在节假日期间顾客能忍受的最长平均等待时间为 10.04 min, 平均等待队长为 10.52 人。如表 15 和表 16 所示, 该超市在有些时段开放的服务台数不合理, 出现服务台开放过多或过少的现象, 比如在非节假日 8:00~9:00, 根据顾客的平均逗留时间 7.53 min 和之前计算的 9.13 min 比较差距很大, 可能会造成资源浪费现象。在节假日 8:00~9:00, 根据顾客的平均逗留时间 15.53 min 和之前计算的 10.04 min 比较差距很大, 可能会造成顾客的损失现象。

因此, 将该超市的收银台排队系统进行优化, 如下式:

$$n^* = \min \left\{ n \mid \rho_n = \frac{\lambda}{n\mu} < 1, W_q = \frac{\rho_n}{\lambda(1-\rho_n)^2} \rho_n \leq T_w, L_q = \frac{\rho_n}{(1-\rho_n)^2} \rho_n \leq nL_w \right\}.$$

$$\begin{cases} \rho_n = \frac{\lambda}{n\mu} < 1 \\ W_q = \frac{\rho_n}{\lambda(1-\rho_n)^2} \rho_n \leq T_w \\ L_q = \frac{\rho_n}{(1-\rho_n)^2} \rho_n \leq nL_w \end{cases}$$

Table 10. Customer service time required

表 10. 顾客所需的服务时间

服务时间/s	0~15	16~30	31~45	46~60	61~75	76~90	91~105	106~120	121~135	136~150	151~165	166~180	181 以上
频数	57	54	62	75	69	61	51	43	32	28	24	17	11

Table 11. The longest waiting time that can be tolerated during holidays

表 11. 非节假日所能容忍的最长的等待时间

最长等待时间/min	6 以下	6~9	10~13	13 以上
频数	11	127	198	64

Table 12. The longest waiting captain that can be tolerated on holidays

表 12. 非节假日所能容忍的最长的等待队长

最长队长/人	7 以下	8~11	11~14	14 以上
频数	58	113	164	65

Table 13. The longest waiting time that holidays can tolerate

表 13. 节假日所能容忍的最长的等待时间

最长等待时间/min	6 以下	6~9	10~13	13 以上
频数	9	75	206	110

**Table 14.** The longest waiting captain that the holiday can tolerate  
**表 14.** 节假日所能容忍的最长的等待队长

最长队长/人	7 以下	8~11	11~14	14 以上
频数	43	98	167	92

**Table 15.** Indicators of the non-holiday system  
**表 15.** 非节假日系统的各项指标

时间段	等待概率	平均队长/人	平均等待时间/min	平均逗留时间/min
8:00~9:00	0.34	6.13	6.16	7.53
9:00~10:00	0.52	6.57	5.18	6.82
10:00~11:00	0.85	7.26	6.80	7.52
11:00~12:00	0.58	14.67	7.06	8.14
12:00~13:00	0.42	10.34	5.85	6.40
13:00~14:00	0.77	12.56	4.35	5.27
14:00~15:00	0.42	7.27	5.14	6.05
15:00~16:00	0.65	8.23	6.76	7.17
16:00~17:00	0.85	15.77	6.44	7.07
17:00~18:00	0.87	14.55	7.24	8.05
18:00~19:00	0.72	13.89	9.17	10.58
19:00~20:00	0.64	9.17	6.80	7.37
20:00~21:00	0.66	5.69	4.90	5.26
21:00~22:00	0.63	4.35	4.20	4.86

**Table 16.** Indicators of the holiday system  
**表 16.** 节假日系统的各项指标

时间段	等待概率	平均队长/人	平均等待时间/min	平均逗留时间/min
8:00~9:00	0.64	13.14	12.65	15.53
9:00~10:00	0.55	9.55	8.86	10.15
10:00~11:00	0.64	11.78	7.04	9.65
11:00~12:00	0.44	12.54	8.73	10.65
12:00~13:00	0.45	12.57	5.88	6.17
13:00~14:00	0.54	13.82	6.45	7.86
14:00~15:00	0.58	11.24	8.34	10.77
15:00~16:00	0.36	8.78	6.35	7.45
16:00~17:00	0.84	16.46	7.25	8.57
17:00~18:00	0.84	16.66	9.36	12.83
18:00~19:00	0.63	14.34	8.74	9.73
19:00~20:00	0.47	12.87	8.21	10.03
20:00~21:00	0.46	9.89	6.55	7.68
21:00~22:00	0.73	7.64	5.01	6.78

$$W_q = \frac{\rho_n^*}{\lambda(1-\rho_n^*)^2} \rho_n^*, \quad L_q = \frac{\rho_n^*}{\lambda(1-\rho_n^*)^2} \rho_n^*.$$

如表 17 和表 18 所示, 用计算机编程来计算该超市节假日和非节假日应开的服务台数。

**Table 17.** Number of service desks and corresponding parameters that should be opened during non-holiday holidays

**表 17.** 非节假日应开放的服务台数量及相应参数

时间段	应开放的服务台数/个	优化后平均队长/人	优化后平均逗留时间/min
8:00~9:00	6	3.64	7.52
9:00~10:00	6	7.14	6.83
10:00~11:00	6	7.58	7.53
11:00~12:00	11	8.23	8.14
12:00~13:00	11	15.66	6.10
13:00~14:00	15	8.24	7.12
14:00~15:00	11	9.20	6.44
15:00~16:00	11	11.33	6.01
16:00~17:00	15	8.58	6.02
17:00~18:00	15	9.72	7.01
18:00~19:00	15	8.53	6.97
19:00~20:00	11	8.82	7.34
20:00~21:00	11	5.65	5.27
21:00~22:00	7	4.32	4.86

**Table 18.** Number of service desks and corresponding parameters that should be opened during holidays

**表 18.** 节假日应开放的服务台数量及相应参数

时间段	应开放的服务台数/个	优化后平均队长/人	优化后平均逗留时间/min
8:00~9:00	7	9.16	6.86
9:00~10:00	16	7.53	7.56
10:00~11:00	16	8.80	8.26
11:00~12:00	16	9.38	8.27
12:00~13:00	16	8.27	7.64
13:00~14:00	18	6.75	8.33
14:00~15:00	16	6.53	7.40
15:00~16:00	16	7.45	9.18
16:00~17:00	18	8.53	6.86
17:00~18:00	18	10.13	8.32
18:00~19:00	18	8.16	9.55
19:00~20:00	14	9.13	6.74
20:00~21:00	11	9.89	8.71
21:00~22:00	11	7.65	6.79

在之前的处理数据工作的基础上, 通过建立数学模型, 并用计算机相关软件对该超市不同时段开放的服务台数进行优化, 得出表 17 和表 18 的数据。这样不仅合理利用资源, 还能提高顾客的满意程度。

#### 4. 总结

本文主要是利用排队论的知识对超市收银服务系统建立相应的数学模型, 根据实际情况对收银服务系统进行优化, 得出超市开放收银台的最佳数目, 分别计算在不同服务台的情况下系统的相关指标, 进而根据实际情况对系统进行最优化设计。得到了在不同时间段系统达到最佳运营状态的服务台数。但是其中有不足:

1) 虽然是采用随机的方法调查抽取的实际数据, 但是调查数据仍然有很大的主观因素, 而且对服务时间的调查存在一定的误差。在对系统进行优化时, 本文只考虑顾客的平均等待时间这一种情况, 而实际中, 顾客在不同时间段的等待时间可能会不同, 需要进一步的研究。因此数据的采集和分析还需要更严谨的数学研究过程。

2) 本文是在一般的情况下建立模型的, 特殊情况没考虑。比如说开业前和倒闭时。

该模型具有一定的普遍性, 能够应用到其他领域, 而且对其他的模型应用也能起到一定的启示作用。

#### 参考文献

- [1] 张玉焱, 等. 银行排队系统的最佳窗口数设置研究[J]. 华北理工大学学报, 2016(11): 155.
- [2] 王莹. 排队论模型求解就医排队问题[J]. 科技资讯, 2010(17): 238-239.

#### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)