Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(6), 1094-1100
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.86126

Hans汉斯

Research on Existence and Uniqueness of Symplectic Self-Adjoint Extension of Infinite Dimensional Hamiltonian Operator

Mei Wang, Deyu Wu

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: 2608079829@qq.com

Received: May 20th, 2019; accepted: Jun. 7th, 2019; published: Jun. 14th, 2019

Abstract

In this paper, the symplectic self-adjoint extension problem of infinite dimensional Hamiltonian operator is studied. By using the method of space decomposition, the condition of dimensional Hamiltonian Infinite operator exists symplectic self-adjoint extension is given, and the conditions of symplectic self-adjoint extension which is unique are given.

Keywords

Dimensional Hamiltonian Infinite Operator, Symplectic Self-Adjoint Extension

无穷维Hamilton算子辛自伴延拓的存在性与唯一性研究

王　梅，吴德玉

内蒙古大学数学科学学院，内蒙古　呼和浩特
Email: 2608079829@qq.com

收稿日期：2019年5月20日；录用日期：2019年6月7日；发布日期：2019年6月14日

摘　要

本文研究了无穷维**Hamilton**算子的辛自伴延拓问题，利用空间分解的方法，给出了**Hamilton**算子存在

文章引用: 王梅，吴德玉. 无穷维 Hamilton 算子辛自伴延拓的存在性与唯一性研究[J]. 应用数学进展，2019，8(6): 1094-1100. DOI: 10.12677/aam.2019.86126

辛自伴延拓的条件，还给出了辛自伴延拓唯一的条件。

关键词

无穷维Hamilton算子，辛自伴延拓

1. 引言

无穷维 Hamilton 算子是形如

$$H=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$$

的稠定分块算子矩阵，其中 B，C 是自伴算子，A^* 是 A 的共轭算子。一般情况下无穷维 Hamilton 算子是非自伴算子，且与 J-自伴算子 U-标算子等几类非自伴算子比较而言，它的谱要复杂得多。因为无穷维算 Hamilton 子的剩余谱不一定是空集，比如令无穷维 Hamilton 算子

$$H=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}$$

其中 $X=L^2[0,+\infty), A=\frac{d}{dt}, D(A)=\{x\in X: x\text{绝对连续}, x'\in X, x(0)=0\}$，

经计算得剩余谱非空(见文献[1]的例 4.1.6) 值得注意的是无穷维 Hamilton 算子在钟万勰院士创立的弹性力学求解新体系中有重要的应用(见文献[2])，其理论基础是无穷维 Hamilton 算子的辛自伴性问题(见文献[3])。刘景麟作者给出了 J 对称算子的 J 自伴延拓的问题(见文献[4])，一般情况下无穷维 Hamilton 算子是辛对称算子，不一定辛自伴，所以为了解决何时为辛自伴的问题，需要解决无穷维 Hamilton 算子辛自伴延拓的存在性和唯一性问题。据我们所知，一般对称算子的自伴延拓是不一定存在的，比如，令

$$X=l_2, D(A)=\left\{a\in X: \text{对某个} N\in \mathrm{N}, \sum_{m=0}^{n} a_m=0, \text{当} n>N \text{时}, a_n=0\right\},$$

对 $a\in D(A), Aa\in X$ 定义为

$$(Aa)_n=i\left[\sum_{m=0}^{n-1} a_m+\sum_{m=0}^{n} a_m\right],$$

则 A 是对称算子，A 没有自伴延拓(见文献[5])。即使存在，也不一定唯一。比如，令 $T=i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，其中

$$D(T)=\{x(t): x(t)\in AC[0,1], x(0)=x(1)=0\},$$

则易得 T 是对称算子。对任意 $\alpha\in C, |\alpha|=1$，定义算子 $T_\alpha=i\frac{d}{dt}$，其中

$$D(T_\alpha)=\{x(t): x(t)\in AC[0,1], x(0)=\alpha x(1)\},$$

则每个 T_α 都是 T 的自伴延拓(见文献[5])。因此自然产生一个疑问，无穷维 Hamilton 算子的辛自伴延拓也是否会不应定存在呢？如果存在，何时唯一呢？本文利用空间分解的方法，引入全新的内积和正交结构，给出了无穷维 Hamilton 算子满足一些条件时，则存在辛自伴延拓的结论，进而给出了辛自伴延拓唯一的条件。

2. 无穷维 Hamilton 算子辛自伴延拓的存在性

本节利用空间分解的方法，引入全新的内积和正交结构，给出了闭的辛对称算子满足一定的条件时，存在辛自伴延拓。

2.1. 预备知识

定义 2.1.1.设 J 是定义在 Hilbert 空间上的线性映射满足 $(Jx,Jy)=(x,y),J^2x=-x$。上述定义的算子能诱导辛结构，所以也称辛算子。

定义 2.1.2.设 H 是稠定的线性算子，定义域为 $D(H)$，对任意 $x,y\in D(H)$，如果 $(Hx,Jy)=-(x,JHy)$ 则称 H 为辛对称。

引理 2.1.1. H 为辛对称的充要条件是 $JHJ\subset H^*$。

证明：当 H 为辛对称算子时，对于任意 $u\in D(JHJ)$，任意 $x\in D(H)$ 有

$$(Hx,u)=-(Hx,J^2u)=(x,JHJu)$$

所以 $u\in D(H^*)$ 且 $JHJu=H^*u$，即 $JHJ\subset H^*$。

当 $JHJ\subset H^*$ 时，对于任意 $x,y\in D(H)$，

$$(Hx,Jy)=(x,H^*Jy)=(x,JHJJy)=-(x,JHy)$$

所以 H 为辛对称。

引理 2.1.2. H 为辛对称的充要条件是 $H\subset JH^*J$。

证明：当 H 为辛对称算子时，对于任意 $x,y\in D(H)$，因为 H 为辛对称，所以

$$(Hx,y)=-(Hx,J^2y)=(x,JHJy)=(x,H^*y)=-(J^2x,H^*y)=(JH^*Jx,y)$$

所以 $x\in D(JH^*J)$，且 $JH^*Jx=Hx$，所以 $H\subset JH^*J$。

当 $H\subset JH^*J$ 时，对于任意 $x\in D(JHJ)$，$Jx\in D(H)$，所以 $Jx\in D(JH^*J)$，$x\in D(H^*)$，且

$$JHJx=J(JH^*J)Jx=H^*x$$

所以 $JHJ\subset H^*$，即为 H 辛对称。

引理 2.1.3. JH^*J 是闭线性算子。

证明：由 H^* 是闭算子且 J 是可逆算子；结论易证。

推论 1.如果 H 是辛对称，则 H 的闭包 $\bar{H}$ 也是辛对称的。

证明：因为 H 是辛对称，所以 $H\subset JH^*J$，所以 $\bar{H}\subset\overline{JH^*J}=JH^*J=J\bar{H}^*J$。以下讨论中，假设所考虑的辛对称算子是闭的。如果 B 是 H 的辛对称延拓，则 $H\subset B,B\subset JB^*J$。由于 $B^*\subset H^*$，所以 $H\subset B\subset JB^*J\subset JH^*J$

因此 H 的辛对称延拓是 JH^*J 在某个含 $D(H)$ 的 $D(JH^*J)$ 的字空间上的限制，我们在 $D(JH^*J)$ 上引进内积

$$(x,y)^*=(x,y)+(JH^*Jx,JH^*Jy),x,y\in D(JH^*J)$$

不难证明$\left(D\left(JH^{*}J\right),(.,.)^{*}\right)$是个 Hilbert 空间，考虑到$JH^{*}J$是闭算子，其中$\oplus^{*}$和$\perp^{*}$是$(.,.)^{*}$内积意义下的直和与正交，于是$D\left(JH^{*}J\right)=D(H)\oplus^{*}D(H)^{\perp^{*}}$。

引理 2.1.4.设H是闭的辛对称算子，$D(H)^{\perp^{*}}=Ker\left(H^{*}JH^{*}J+I\right)$。

证明：对于任意$x\in D(H)$，$y\in D(H)^{\perp^{*}}$，有$(x,y)^{*}=0$，即

$$0=(x,y)^{*}=(x,y)+\left(JH^{*}Jx,JH^{*}Jy\right)=(x,y)+\left(Hx,JH^{*}Jy\right)$$

所以$\left(Hx,JH^{*}Jy\right)=(x,-y)$，由共轭算子的定义，$JH^{*}Jy\in D\left(H^{*}\right)$且$H^{*}JH^{*}Jy=-y$，即$D(H)^{\perp^{*}}\subset Ker\left(H^{*}JH^{*}J+I\right)$。

对于任意$x\in D(H)$，$z\in Ker\left(H^{*}JH^{*}J+I\right)$，

$$(x,z)^{*}=(x,z)+\left(JH^{*}Jx,JH^{*}Jz\right)=(x,z)+\left(x,H^{*}JH^{*}Jz\right)=(x,z)+(x,-z)=0$$

所以$x\in D(H)^{\perp^{*}}$，综上所述$D(H)^{\perp^{*}}=Ker\left(H^{*}JH^{*}J+I\right)$。

定义 2.1.3.记$\langle x,y\rangle=\left(H^{*}Jx,y\right)-\left(x,H^{*}Jy\right),x,y\in D\left(JH^{*}J\right)$。

引理 2.1.5.H为辛对称的充要条件$\langle x,y\rangle=0,x,y\in D(H)$。

证明：H为辛对称，所以

$$(Hx,Jy)=-(x,JHy)\Leftrightarrow\left(JH^{*}Jx,Jy\right)=-\left(x,J^{2}H^{*}Jy\right)\Leftrightarrow\left(H^{*}Jx,y\right)=\left(x,H^{*}Jy\right)$$

所以$\langle x,y\rangle=\left(H^{*}Jx,y\right)-\left(x,H^{*}Jy\right)=0$。

引理 2.1.6.设H是辛对称闭算子，则$x\in D(H)$的充要条件是$x\in D\left(JH^{*}J\right)$，且$\langle x,y\rangle=0$，对于任意$y\in D\left(JH^{*}J\right)$。

证明：当H为辛对称，$x\in D(H)$时，对于任意$y\in D\left(JH^{*}J\right)$有

$$\langle x,y\rangle=\left(H^{*}Jx,y\right)-\left(x,H^{*}Jy\right)=\left(JH^{*}Jx,Jy\right)-(Hx,Jy)=(Hx,Jy)-(Hx,Jy)=0$$

当$x\in D\left(JH^{*}J\right)$，且对于任意的$y\in D\left(JH^{*}J\right)$，有$\langle x,y\rangle=0$

$$\left(x,H^{*}Jy\right)=\left(H^{*}Jx,y\right)=\left(JH^{*}Jx,Jy\right),$$

即$x\in D(H)$且$Hx=JH^{*}Jx$。

引理 2.1.7.设B是辛对称闭算子H的延拓，满足$H\subset B\subset JH^{*}J$，则存在唯一的子空间$K\subset Ker\left(H^{*}JH^{*}J+I\right)$，使得$D(B)=D(H)\oplus^{*}K$。

证明：记$K=\left\{z\in Ker\left(H^{*}JH^{*}J+I\right)\mid 存在x\in D(B),y\in D(H),使得x=y+z\right\}$，则$K$是$D(B)$的一个线性子空间，所以$D(H)\oplus^{*}K\subset D(B)$。

另外，对于任意$x\in D(B)$，由直和分解

$$x=x_{1}+x_{2},x_{1}\in D(H),x_{2}\in Ker\left(H^{*}JH^{*}J+I\right)$$

知$x_{2}\in K$，所以$D(B)\subset D(H)\oplus^{*}K$，即$D(B)=D(H)\oplus^{*}K$。

定义 2.1.4.设子空间$K\subset Ker\left(H^{*}JH^{*}J+I\right)$，则称$K^{*}=\left\{u\in Ker\left(H^{*}JH^{*}J+I\right)\mid\langle u,v\rangle=0,任意v\in K\right\}$为$K$的辛共轭子空间。若$K\subset K^{*}$，则称$K$为辛对称的。若$K=K^{*}$，则称$K$为辛自伴的。

定义 2.1.5.辛对称算子H成为辛自伴的，如果$H=JH^{*}J$。

引理 2.1.8.设B辛对称算子H的延拓，满足$H\subset B\subset JH^{*}J$，$D(B)\subset D(H)\oplus^{*}K$，则

(i) B为辛对称$\Leftrightarrow K$为辛对称；

(ii) B为辛自伴$\Leftrightarrow K$为辛自伴。

证明(i)当 B 为辛对称时，对于任意 $u,v\in K$，有 $u,v\in D(B)$，故 $\langle u,v\rangle=0$，所以 $K\subset K^*$，即 K 为辛对称。当 K 为辛对称时，对于任意 $x+u,y+v\in D(B)$，其中 $x,y\in D(H)$，$u,v\in K$，则

$$\langle x+u,y+v\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,u\rangle+\langle u,y\rangle+\langle u,v\rangle=0$$

故 B 为辛对称。

(ii)当 B 为辛自伴时，$K\subset K^*$，所以对于任意 $v\in K^*$，$u\in K$，有 $\langle u,v\rangle=0$。对任意 $x+u\in D(B)$，$x\in D(H)$，由 B 是辛自伴可知 $\langle x+u,v\rangle=0$，即

$$\left(H^*J(x+u),v\right)=\left(x+u,H^*Jv\right)\Leftrightarrow\left(JH^*J(x+u),Jv\right)=\left(x+u,H^*Jv\right)\Leftrightarrow\left(B(x+u),Jv\right)=\left(x+u,H^*Jv\right)$$

即 $H^*Jv=B^*Jv$，$v\in D\left(JB^*J\right)=D(B)=D(H)\oplus^* K$，因此 $v\in K$，所以 $K=K^*$，即 K 为辛自伴。

因为 $D(B)\subset D\left(JB^*J\right)$，对于任意 $z\in D\left(JB^*J\right)\subset D\left(JH^*J\right)$，令 $z=y+v$，$y\in D(H)$，$v\in Ker\left(H^*JH^*J+I\right)$，对于任意 $x+u\in D(B)$，$x\in D(H)$，$u\in K$

$$\left(B(x+u),Jz\right)=\left(x+u,B^*Jz\right)=\left(J(x+u),JB^*Jz\right)=\left(J(x+u),JH^*Jz\right)=\left(x+u,H^*Jz\right)$$

因为 B 为辛对称，所以 $\left(B(x+u),Jz\right)=\left(JB^*J(x+u),Jz\right)=\left(JH^*J(x+u),Jz\right)=\left(H^*J(x+u),z\right)$，所以 $\langle x+u,z\rangle=\left(H^*J(x+u),z\right)-\left(x+u,H^*Jz\right)=0$，即 $\langle x+u,y+v\rangle=0$，所以 $\langle u,v\rangle=0$，所以 $v\in K^*=K$，所以 $z=y+v\in D(B)$，所以 $D\left(JB^*J\right)\subset D(B)$，所以 B 为辛自伴。

2.2. 主要结果及证明

定理 2.2.1. H 为闭的辛对称算子，如果 $Ker\left(H^*JH^*J+I\right)\subset M$，则 H 有辛自伴延拓，其中 $M=\left\{u\in Ker\left(H^*JH^*J+I\right)\mid\langle u,u\rangle=0\right\}$。

证明：我们只要证明 $Ker\left(H^*JH^*J+I\right)$ 存在辛自伴的子空间 K 即可，取 $0\neq x\in Ker\left(H^*JH^*J+I\right),K_0=span\{x\}$，因为 $\langle x,x\rangle=0$，所以 K_0 为辛对称，考虑所有含 K_0 的 $Ker\left(H^*JH^*J+I\right)$ 的辛对称子空间按集合包含关系组成的偏序集，显然它的任一个全序子集都有上界，由 Zorn 引理，此偏序集合有最大元 K。

下面证明 K 是辛自伴的，若不然，设 $x_0\in K^*\setminus K$，令 $\tilde{K}=K\oplus^* span\{x_0\}$，对任意 $k_1+\alpha x_0,k_2+\beta x_0\in\tilde{K},k_1,k_2\in K$，有

$$\langle k_1+\alpha x_0,k_2+\beta x_0\rangle=\langle k_1,k_2\rangle+\alpha\langle x_0,k_2\rangle+\bar{\beta}\langle k_1,x_0\rangle+\alpha\bar{\beta}\langle x_0,x_0\rangle=0$$

所以 $\tilde{K}$ 为辛对称与 K 是最大元矛盾，所以 K 为辛自伴。

推论 2. H 是闭的辛对称算子，如果 H^*JH^*J+I 是单射，则 H 存在辛自伴延拓

3. 无穷维 Hamilton 算子辛自伴延拓的唯一性

上节得出了闭的辛对称算子满足一定的条件时有辛自伴延拓，但是否唯一不得而知。本节讨论一类特殊的辛对称算子—无穷维 Hamilton 算子，并规定 $J=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}$，其中 I 为单位算子。显然满足 $(Jx,Jy)=(x,y),J^2=-I$。当无穷维 Hamilton 算子 H 是闭算子时，JH 是闭的辛对称算子，故在一定条件下存在辛自伴延拓，本节得出了辛自伴延拓唯一的条件。

3.1. 预备知识

定义 3.1.1.如果无穷维 Hamilton 算子 $H=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^*\end{pmatrix}$ 满足 $(JH)^*=(JH)$，其中 $J=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}$，则称辛

自伴无穷维 Hamilton 算子。

引理 3.1.1.设 T,S 是 Hilbert 空间 X 中的稠定线性算子，当 $\rho(T)\neq\varnothing$ 时，$(T-\lambda)^{-1}S$ 有界当且仅当 $D(T^*)\subset D(S^*)$，则 $S^*(T^*-\bar{\lambda})^{-1}$ 有界且 $\left(S^*(T^*-\bar{\lambda})^{-1}\right)^*\supset(T-\lambda)^{-1}S$，于是 $(T-\lambda)^{-1}S$。反之，如果 $(T-\lambda)^{-1}S$ 在 $D(S)$ 上有界，则 $\overline{(T-\lambda)^{-1}S}$ 是全空间上定义的有界算子，而且有 $\left(S^*(T^*-\bar{\lambda})^{-1}\right)^*\supset\overline{(T-\lambda)^{-1}S}$，因此 $D(T^*)\subset D(S^*)$。

3.2. 主要结果及证明

定理 3.2.1.设 $H=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^*\end{pmatrix}:D(H)\subset X\times X\to X\times X$ 是无穷维 Hamilton 算子，如果 $D(C)\subset D(A)$，且 $B+A(C-iI)^{-1}A^*$ 是自伴算子时，H 存在唯一的辛自伴延拓。

证明：考虑到 $D(C)\subset D(A)$，易得

$$H=RTL+\begin{pmatrix}0 & 0\\ iI & 0\end{pmatrix},$$

又因为算子 $R=\begin{pmatrix}I & A(C-iI)^{-1}\\ 0 & I\end{pmatrix}$ 与 $L=\begin{pmatrix}I & -\overline{(C-iI)^{-1}A^*}\\ 0 & I\end{pmatrix}$ 有界且在全空间上可逆，算子 $T=\begin{pmatrix}0 & B+A(C-iI)^{-1}A^*\\ C-iI & 0\end{pmatrix}$。当 $B+A(C-iI)^{-1}A^*$ 是自伴算子时，

$$H^*=(RTL)^*+\begin{pmatrix}0 & 0\\ iI & 0\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}A^* & C\\ B & -A\end{pmatrix},$$

所以 $(JH)=(JH)^*$，因此 H 存在唯一的辛自伴延拓。

推论 3. 设 $H=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^*\end{pmatrix}:D(H)\subset X\times X\to X\times X$ 是无穷维 Hamilton 算子，如果 $D(B)\subset D(A^*)$，且 $C+A^*(B-iI)^{-1}A$ 是自伴算子时，H 存在唯一的辛自伴延拓。

定理 3.2.2. 设 $H=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^*\end{pmatrix}:D(H)\subset X\times X\to X\times X$ 是无穷维 Hamilton 算子，当 $0\in\rho(B)\cap\rho(C)$ 时，

无穷维 Hamilton 算子存在辛自伴延拓；进一步，当满足下列条件之一：

(i) $D(B)\subset D(A^*)$，$D(C)\subset D(A)$，$\|A^*B^{-1}AC^{-1}\|<1$；

(ii) $D(B)\subset D(A^*)$，$D(C)\subset D(A)$，$\|AC^{-1}A^*B^{-1}\|<1$ 时，则 H 的辛自伴延拓唯一。

证明：首先证明 $0\in\Gamma(H)$，假定 H 不存在有界逆，则存在正交化序列 $\left\{x_n=\begin{pmatrix}x_n^{(1)}\\ x_n^{(2)}\end{pmatrix}\right\}_{n=1}^{\infty}$，$(\|x_n\|=1,n=1,2,\cdots)$ 使得 $Hx_n\to 0,n\to\infty$，进而得

$$Ax_n^{(1)}+Bx_n^{(2)}\to 0,Cx_n^{(1)}-A^*x_n^{(2)}\to 0$$

第一式与 $x_n^{(2)}$ 作内积，第二式与 $x_n^{(1)}$ 作内积后两式相加得

$$\left(Cx_n^{(1)},x_n^{(1)}\right)+\left(Bx_n^{(2)},x_n^{(2)}\right)\to 0,$$

由于 B,C 是非负算子，从而有

$$\left(Bx_n^{(2)},x_n^{(2)}\right)\to 0,\left(Cx_n^{(1)},x_n^{(1)}\right)\to 0$$

由于 B,C 是自伴且非负算子。故存在唯一的平方根算子 $B^{\frac{1}{2}}$ 和 $C^{\frac{1}{2}}$ 进而得

$$B^{\frac{1}{2}}x_n^{(2)}\to 0,C^{\frac{1}{2}}x_n^{(1)}\to 0$$

当 $0\in\rho(B)\cap\rho(C)$ 时， B^{-1} 和 C^{-1} 的平方根算子分别记为 $B^{-\frac{1}{2}}$ 和 $C^{-\frac{1}{2}}$ 则

$$B^{\frac{1}{2}}\left(B^{\frac{1}{2}}x_n^{(2)}\right)=x_n^{(2)}\to 0,C^{\frac{1}{2}}\left(C^{\frac{1}{2}}x_n^{(1)}\right)=x_n^{(1)}\to 0$$

这与 $\|x_n=1\|,(n=1,2,\cdots)$ 矛盾，因此 H 下方有界，于是由[6]的定理 8.8 可知，H 存在辛自伴延拓。

其次证明 $R(H)=X\times X$：

(i)当 $D(B)\subset D(A^*)$， $D(C)\subset D(A)$， $\|A^*B^{-1}AC^{-1}\|<1$ 时， $\left(I+A^*B^{-1}AC^{-1}\right)$ 可逆，于是对于任意 $\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in X\times X$，取

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C^{-1}\left(I+A^*B^{-1}AC^{-1}\right)^{-1}\left(g+A^*B^{-1}f\right)\\ B^*f-B^{-1}AC^{-1}\left(I+A^*B^{-1}AC^{-1}\right)^{-1}\left(g+A^*B^{-1}f\right)\end{pmatrix}，则有\begin{pmatrix} A & B\\ C & -A^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix},$$

所以 $R(H)=X\times X$，即 H 是辛自伴，因此 H 的辛自伴延拓唯一。

同理可证当 $D(B)\subset D(A^*)$， $D(C)\subset D(A)$， $\|AC^{-1}A^*B^{-1}\|<1$ 时，H 的辛自伴延拓唯一。

同理可证如下结论

定理 3.2.2. 设 $H=\begin{pmatrix} A & B\\ C & -A^*\end{pmatrix}:D(H)\subset X\times X\to X\times X$ 是无穷维 Hamilton 算子，当 $0\in\rho(A)$ 时，无穷维 Hamilton 算子 H 存在辛自伴延拓；进一步，当满足下列条件之一：

(i) $D(A)\subset D(C)$， $D(A^*)\subset D(B)$， $A^{-1}B,(A^*)^{-1}C$ 是有界线性算子， $\left\|CA^{-1}B(A^*)^{-1}\right\|<1$；

(ii) $D(B)\subset D(A^*)$， $D(C)\subset D(A)$， $A^{-1}B,(A^*)^{-1}C$ 是有界线性算子， $\left\|B(A^*)^{-1}CA^{-1}\right\|<1$ 时，则 H 的辛自伴延拓唯一。

基金项目

国家自然科学基金(11561048, 11371185)；内蒙古自然科学基金(2015MS0116)。

参考文献

[1] 吴德玉, 阿拉坦仓. 分块算子矩阵谱理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013.

[2] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.

[3] Chen, A., Jin, G.H. and Wu, D.Y. (2015) On Symplectic Self-Adjointness of Hamiltonianperator Matrices. *Science China*, **58**, 821-828. https://doi.org/10.1007/s11425-014-4876-1

[4] 刘景麟. 关于 J 对称算子的 J 自伴延拓[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 1992, 23(3): 312-316.

[5] Reed, M. and Simon, B. (1978) Methods of Modern Mathematical Physics 1. Analysis of Operators. Academic Press, London.

[6] Weidmann, J. (1980) Linear Operators in Hilbert Spaces. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6027-1

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org