Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(7), 1277-1283**
Published Online July 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.87149

Hans汉斯

Subharmonic Bifurcations and Chaos for the Buckled Beam at Axial Motion

Jing Wang, Dongmei Zhang

School of Mechanics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: zhangdongmei_2008@163.com

Received: July 4th, 2019; accepted: July 19th, 2019; published: July 26th, 2019

Abstract

The subharmonic bifurcations and chaos for one kind of buckled beam model subjected to parametric excitations are investigated. The critical curves separating the chaotic and non-chaotic regions are obtained by utilizing Melnikov method. The conditions for subharmonic bifurcations are also obtained. Numerical results are given, which verify the analytical ones.

Keywords

Buckled Beam, Subharmonic Bifurcations, Chaos, Melnikov Methods

轴向运动曲梁的次谐分岔和混沌

王　晶，张冬梅

临沂大学数学与统计学院，山东 临沂
Email: zhangdongmei_2008@163.com

收稿日期：2019年7月4日；录用日期：2019年7月19日；发布日期：2019年7月26日

摘　要

研究了一类轴向运动屈曲梁的次谐分岔和混沌行为。利用**Melnikov**方法，给出了屈曲梁异宿轨道**Melnikov**函数和次谐**Melnikov**函数的表达式，得到系统出现次谐分岔和超次谐分岔的参数条件，给出系统混沌区域和非混沌区域的分界曲线。根据参数的取值范围做数值模拟，结果验证了理论分析。

文章引用: 王晶, 张冬梅. 轴向运动曲梁的次谐分岔和混沌[J]. 应用数学进展, 2019, 8(7): 1277-1283.
DOI: 10.12677/aam.2019.87149

关键词

屈曲梁，次谐分岔，混沌，Melnikov方法

1. 引言

屈曲梁结构在军事、航空航天、土木、机械等工程中有广泛的应用，拱形结构当受到动态负荷时，会展示出丰富的动力学现象，包括次谐波、超谐振荡、极限环、混沌运动等[1] [2]。1983年，Moon [3] [4]等研究了非线性边界条件下的梁受到周期载荷后的混沌运动。Suire [5]用数值方法研究了大扰度粘弹性梁的周期和混沌。冯志华，胡海岩研究了内共振条件下直线运动梁的动力稳定性，基于凯恩方程建立非线性动力学方程，得出非线性振动的Hopf分岔以及极限环。Danida [6]、Anantha [7]、Neukirch [8]等研究了弹性屈曲梁的周期解和混沌动力学行为。张等[9] [10]研究了两端简支的非线性弹性梁受周期载荷作用后，发生次谐分岔和混沌运动的条件。Pinto [11] [12]等分析了弹性屈曲梁在强迫力作用下出现马蹄混沌行为。

本文研究一类轴向载荷作用下梁的次谐分岔和混沌行为，对梁的单模态方程，应用Melnikov方法，得到了系统发生次谐分岔和超次谐分岔的参数范围，及混沌区域和非混沌区域的分界线。

2. 问题描述

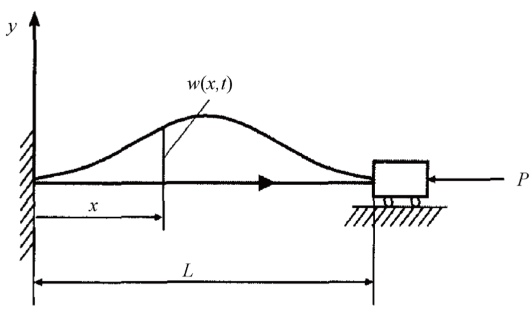

Figure 1. A buckled beam at axial motion
图1. 屈曲梁结构模型

如图1所示，考虑梁的长度为L，横截面积为A，横截转动惯量为J，材料的弹性模量为E，轴向力为P。假定梁的横截面是均匀的，材质均相同．轴向位移采用u表示，横向位移采用w表示，u和w是空间坐标x的函数，文献[11]得到弯曲梁的运动方程为

$$\begin{aligned}&\ddot{v}+v^{iv}+4\pi^2 v''-2b^2\pi^3\cos 2\pi x\int_0^1 v'\sin 2\pi x\mathrm{d}x\\&=b\pi^2\cos 2\pi x\int_0^1 v'^2\mathrm{d}x+b\pi v''\int_0^1\sin 2\pi x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}v''\int_0^1 v'^2\mathrm{d}x-c\dot{v}+F\cos\Omega t\end{aligned}\tag{1}$$

边界条件为

$$x=0\text{ 和 }x=1\text{ 时}，\quad v=0，\quad v'=0$$

利用伽辽金法，单模态的运动方程为

$$\ddot{q}+\omega^2 q=-c\dot{q}+ba_2q^2+a_3q^3+f\cos\Omega t \tag{2}$$

这里考虑 $a_2=0$ 的情况，令 $x=q$， $c=\varepsilon c$， $f=\varepsilon f$，则方程(2)变成

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\omega^2x+a_3x^3-\varepsilon cy+\varepsilon f\cos\Omega t\end{cases} \tag{3}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，系统(3)的未扰动系统为

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\omega^2x+a_3x^3\end{cases} \tag{4}$$

(4)是Hamiltonian系统，其Hamiltonian量为

$$H=\frac{1}{2}y^2+\frac{\omega^2}{2}x^2-\frac{a_3}{4}x^4 \tag{5}$$

3. 系统的次谐分岔与混沌

$a_3>0$ 的混沌行为

当 $a_3>0$ 时，利用如下变换

$$u=p\frac{\sqrt{a_3}}{\omega},\quad t\to\frac{1}{\omega}t \tag{6}$$

将(6)代入(3)式，得到

$$\begin{cases}\dot{u}=v\\ \dot{v}=-u+u^3-\varepsilon\bar{c}q+\varepsilon\bar{f}\cos\left(\bar{\Omega}t\right)\end{cases} \tag{7}$$

其中 $\bar{c}=\frac{c}{\omega}$， $\bar{f}=\frac{f\sqrt{a_3}}{\omega^3}$， $\bar{\Omega}=\frac{\Omega}{\omega}$。当 $\varepsilon=0$ 时，未扰动系统为

$$\begin{cases}\dot{u}=v\\ \dot{v}=u-u^3\end{cases} \tag{8}$$

其Hamilton量为

$$H\left(u,v\right)=\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{4}u^4 \tag{9}$$

该系统有三个平衡点，通过定性分析可知，$(0,0)$ 为(8)的中点，$(-1,0)$ 和 $(1,0)$ 是鞍点。当 $h=\frac{1}{4}$ 时，存在两条连接 $(\pm1,0)$ 的异宿轨道，形成一个异宿环，如图2所示。

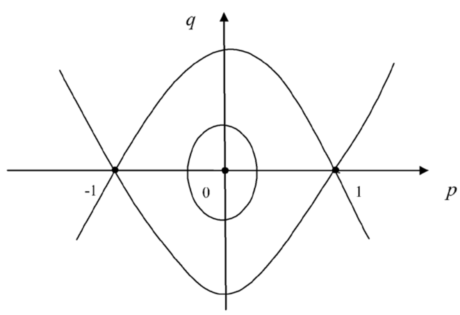

Figure 2. The phase portrait of system (8)
图2. 系统(8)的相图

该异宿轨道的参数表达式为

$$\begin{cases} u(t) = \pm\tanh\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right) \\ v(t) = \pm\operatorname{sech}^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right) \end{cases} \tag{10}$$

以 $h = h(k)$ 为参数的周期轨道为

$$\begin{cases} u_k(t) = \dfrac{\sqrt{2}k}{\sqrt{1+k^2}} sn\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}}, k\right) \\ v_k(t) = \dfrac{\sqrt{2}k}{1+k^2} cn\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}}, k\right) dn\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}}, k\right) \end{cases} \tag{11}$$

其中sn，dn，cn为Jacobian椭圆函数，k为椭圆函数的模，$0<k<1$，k满足关系式 $h = h(k) = \dfrac{k^2}{\left(1+k^2\right)^2}$，定义轨道的周期为 $T_k = 4\sqrt{1+k^2}K(k)$， $K(k)$ 是第一类完全椭圆积分。

下面计算系统(7)沿着异宿轨道的 Melnikov 函数

$$M(t_0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{c}v^2(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}v(t)\cos\bar{\Omega}(t+t_0)\mathrm{d}t = -\bar{c}J_0 - \bar{f}J_1\cos\bar{\Omega}t_0 \tag{12}$$

其中

$$J_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}，\quad J_1 = \sqrt{2}\pi\bar{\Omega}\operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\bar{\Omega}\right)$$

由(12)可知，当参数 $\bar{c}$， $\bar{f}$ 满足

$$\frac{\bar{c}}{\bar{f}} \le \left|\frac{J_1}{J_0}\right| \tag{13}$$

即参数 c, f 满足参数条件

$$\frac{c}{f} \le \frac{\sqrt{a_3}}{\omega^2}\left|\frac{J_1}{J_0}\right|$$

$M(t_0)$ 存在零点，系统发生混沌。取不同的 ω 值，比如 $\omega = 0.5, 1, 1.5, 2$，得到系统发生混沌的临界曲线，如图3所示。在曲线下方是发生混沌的区域，在曲线上方是非混沌区域。

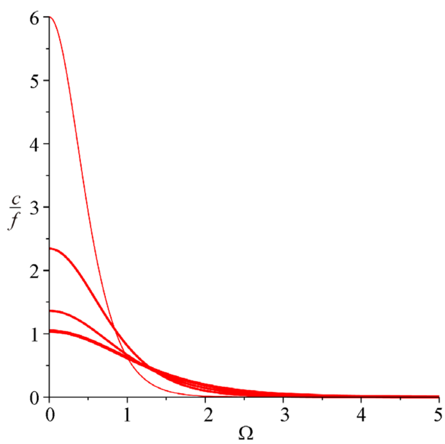

Figure 3. The critical curves for chaotic motions
图 3. 系统发生混沌的临界曲线

4. 通向混沌的道路

对于任给的一对互素的正整数(m,n)，存在唯一的 k，满足$T_k = 2\sqrt{2-k^2}K(k) = \dfrac{2\pi m}{\omega n}$，沿这个周期为$T_k$的轨道计算次谐波 Melnikov 函数得

$$\begin{aligned} M^{m/n}(t_0) &= \int_0^{mT}(-\bar{c})v_k^2(t)\mathrm{d}t + \bar{f}\int_0^{mT}v_k(t)\cos\bar{\Omega}(t+t_0)\mathrm{d}t \\ &= -\bar{c}J_0(m,n) + \bar{f}J_1(m,n)\cos\bar{\Omega}t_0 \end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$J_0(m,n) = \int_0^{mT}v_k^2(t)\mathrm{d}t = \frac{8n\left[\left(k^2-1\right)K(k)+\left(k^2+1\right)E(k)\right]}{3\left(k^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{15}$$

$$J_1(m,n) = \int_0^{mT}v_k(t)\sin\bar{\omega}t\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & n \ne 1\text{或}m\text{为偶数} \\ \dfrac{\pi^2 m}{\sqrt{2k^2-1}K(k)}\operatorname{csch}\left(\dfrac{\pi m K'(k)}{2K(k)}\right), & n = 1\text{或}m\text{为奇数} \end{cases} \tag{16}$$

$K'(k) = K(k') = K\left(\sqrt{1-k^2}\right)$，$E(k)$为第二类椭圆积分。

当参数满足条件

$$\frac{\bar{c}}{\bar{f}} < \left|\frac{J_1(m,n)}{J_0(m,n)}\right| \equiv R_m^1(\omega) \tag{17}$$

系统发生奇数阶次谐分岔。

5. 数值模拟

对系统(2)使用龙格库塔法做数值模拟来验证屈曲梁是否存在混沌现象。根据前面理论的分析来选取参数$\omega=1$，$c=0.01$，$a_3=0.5$，$\Omega=2$，$f=1.2$，初始点选取为$\left(x(0),y(0)\right)=(0.02,0.03)$，相图和时间历程图如图 4 所示。再令参数$\omega=2$，其它参数值不变，得到系统相图和时间历程图如图 5 所示。

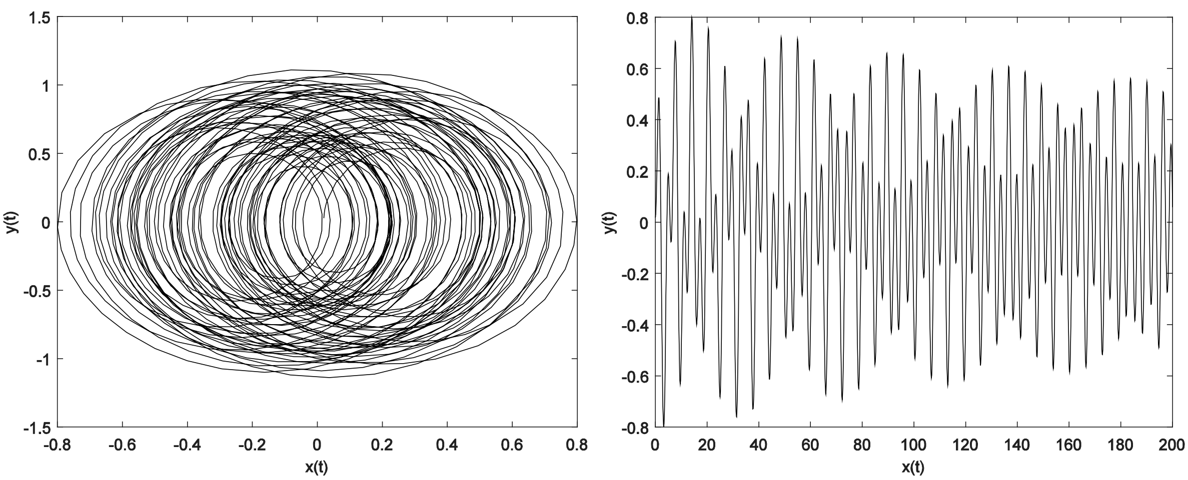

Figure 4. The phase portrait of system (2) for $\omega=1$

图 4. 当$\omega=1$时，系统的相轨迹图和时间历程图

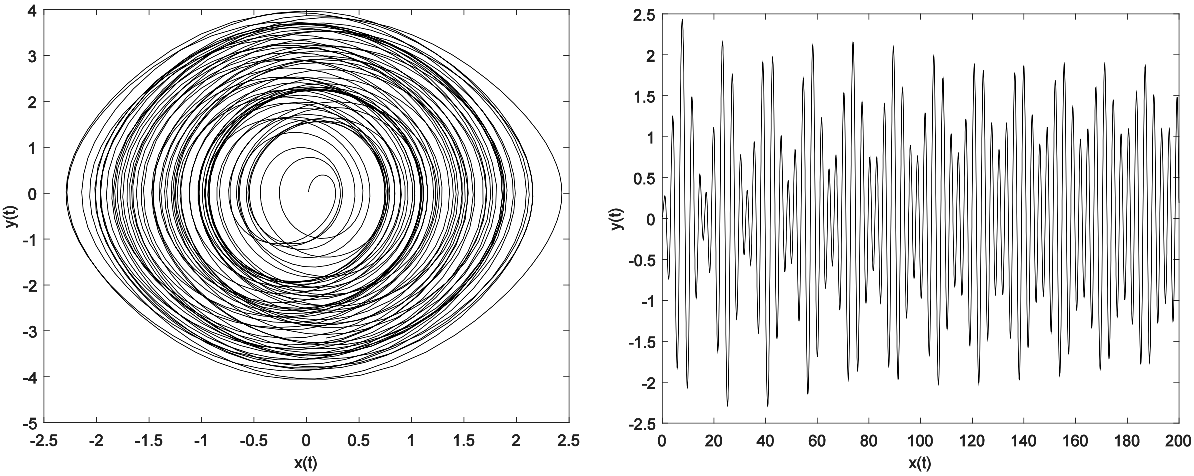

Figure 5. The phase portrait of system (2) for $\omega = 2$
图 5. 当 $\omega = 2$ 时，系统的相轨迹图和时间历程图

6. 结论

研究了受轴向载荷和附加载荷弹性屈曲梁的次谐分岔和混沌行为。利用 Melnikov 方法，给出了屈曲梁同宿轨道 Melnikov 函数和次谐 Melnikov 函数的表达式，得到系统出现次谐分岔和超次谐分岔的参数条件，给出系统混沌区域和非混沌区域的分界曲线。根据参数的取值范围做数值模拟，结果验证了理论分析。

基金项目

本论文受山东省自然科学基金资助(ZR2018MA002)和 2018 大学生创新创业项目资助(51819220)。

参考文献

[1] Abou-Rayan, A.M., Nayfeh, A.H., Mook, D.T., *et al*. (1993) Nonlinear Response of a Parametrically Excited Buckled Beam. *Nonlinear Dynamics*, **4**, 499-525. https://doi.org/10.1007/BF00053693

[2] Afaneh, A.A. and Ibrahim, R.A. (1993) Nonlinear Response of a Initially Buckled Beam with 1:1 Internal Resonance to Sinusoidal Excitation. *Nonlinear Dynamics*, **4**, 547-571. https://doi.org/10.1007/BF00162232

[3] Moon, F.C. and Shaw, S.W. (1983) Chaotic Vibration of a Beam with Nonlinear Boundary Conditions. *Non-Linear Mechanics*, **18**, 465-477. https://doi.org/10.1016/0020-7462(83)90033-1

[4] Moon, F.C. (1988) Experiments on Chaotic Motions of a Forced Nonlinear Oscillator. Stranger Attractors. *Journal of Applied Mechanics*, **55**, 190-196.

[5] Suire, G. and Cederbaum, G. (1995) Periodic and Chaotic Behavior of Viscoelastic Nonlinear Bars under Harmonic Excitations. *International Journal of Mechanical Sciences*, **7**, 753-772. https://doi.org/10.1016/0020-7403(95)00006-J

[6] Danida, D.B. (1994) Mathematical Models Used in Studying the Chaotic Vibration of Buckled Beam. *Mechanics Research Communications*, **21**, 321-335. https://doi.org/10.1016/0093-6413(94)90091-4

[7] Anantha, R.S., Sunkar, T.S. and Ganean, S. (1994) Bifurcation, Catastrophes and Chaos in a Pre-Buckled Beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **29**, 449-462. https://doi.org/10.1016/0020-7462(94)90014-0

[8] Neukirch, S., Frelat, J., Goriely, A., *et al*. (2012) Vibrations of Post-Buckled Rods: The Singular Inextensible Limit. *Journal of Sound and Vibration*, **331**, 704-720. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.09.021

[9] 张年梅, 杨桂通. 非线性弹性梁的动态次谐分岔与混沌运动[J]. 非线性动力学学报, 1996(3): 265-274.

[10] 张年梅, 杨桂通. 非线性弹性梁中的混沌带现象[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(5): 450-454.

[11] Pinto, O.C. and Goncalves, P.B. (2002) Active Non-Linear Control of Buckling and Vibrations of a Flexible Buckled

Beam. *Chaos Solitons and Fractals*, **14**, 227-239. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(01)00229-6

[12] Oumarou, A.S., Nana Nbendjo, B.R. and Woafo, P. (2011) Appearance of Horseshoes Chaos on a Buckled Beam Controlled by Disseminated Couple Forces. *Communication in Nonlinear Science Numerical Simulation*, **16**, 3212-3218. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.11.010