Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(3), 391-399**
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.93047

Hans汉斯

An Inverse Problem of Identifying the Coefficient of Second Order Parabolic Equation with Integral Source Term

Yujuan Zheng

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu
Email: 2087360148@qq.com

Received: Mar. 1st, 2020; accepted: Mar. 16th, 2020; published: Mar. 24th, 2020

Abstract

This paper mainly studies an inverse problem of identifying the coefficient of second order parabolic equation with integral source term. We use the optimal control framework to establish control functional and prove the existence, and the necessary conditions of the minimum for the control functional are established. Since the optimal control problem is nonconvex, one may not expect a unique solution. However in this paper the solution is proved to be locally unique and stable.

Keywords

Inverse Problem, Optimal Control, Parameter Identification, Well-Posedness

带积分型源项二阶抛物型方程的参数识别问题

郑玉娟

兰州交通大学数理学院，甘肃 兰州
Email: 2087360148@qq.com

收稿日期：2020年3月1日；录用日期：2020年3月16日；发布日期：2020年3月24日

摘　要

本文主要研究的是带积分型源项二阶抛物型方程的参数识别问题，利用最优控制框架来建立控制泛函，并证明控制泛函极小元的存在性和必要条件，由于最优控制问题一般不存在唯一解，所以本文证明的是解的局部唯一性和稳定性。

文章引用: 郑玉娟. 带积分型源项二阶抛物型方程的参数识别问题[J]. 应用数学进展, 2020, 9(3): 391-399.
DOI: 10.12677/aam.2020.93047

关键词

反问题，最优控制，参数识别，适定性

1. 引言

偏微分方程[1]是纯粹数学和应用数学的一个重要分支，它与化学、物理、金融、医药等自然科学和工程技术的很多领域都有联系，它可分为正问题和反问题，对于绝大多数正问题而言，它们都是 Hadamard 意义下的适定问题，而大多反问题具有不适定性[2]。“问题适定性”的概念是著名数学家 Hadamard 在 1923 年提出来的，适定性在解决实际问题时具有重要意义，但是随着科学技术的发展，生活中出现了越来越多必须解决的不适定问题，比如，确定散射体的几何形状，医学成像中 CT 机的发明和应用等等，它们无论在理论上还是实际应用中都是非常重要的。偏微分方程反问题的内容相当丰富，按照数学模型可划分为抛物型方程反问题，双曲型方程反问题，椭圆型方程反问题等三种主要类型，其中抛物型偏微分方程的反问题是近年来研究比较活跃的主题之一，国内外许多学者对此类问题进行了研究并得到了一系列重要成果。例如文献[3]考虑了带有积分型源项反演源项 $f(x)$ 的反问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v_a\dfrac{\partial u}{\partial x} + ru = f(x) + \mu\int_0^t u(s)\mathrm{d}s, & Q_T = (0,1)\times(0,T) \\ u(0,t) = 0, & t\in(0,T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(1,t) = 0, & t\in(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & I = (0,1) \end{cases} \tag{1.1}$$

利用最优控制方法证明了解的存在性、唯一性及稳定性。文献[4]考虑的一个二阶抛物型方程反演辐射系数的初边值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - q(x)u, & (x,t)\in Q = (0,1)\times(0,T] \\ u(x,0) = \phi(x), & x\in(0,1) \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t\in(0,T] \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\phi(x)$ 是区间 $(0,1)$ 上给定的一个光滑函数，$q(x)$ 是所要反演的系数，假设给定如下附加条件：

$$u(x,T) = f(x), x\in(0,1) \tag{1.3}$$

利用最优控制的方法确定满足(1.2)的函数 u 和 q。从物理学上讲，模型(1.2)描述了在均匀介质 Q 中的热传导过程，所要反演的系数 q 表示的是热容等导热系数。文献[5]则用 Tikhonov 正则化方法确定了(1.2)的系数 $q(x)$。

本文中若无特殊说明，符号 C 表示各种场合下的不同常数。

本文我们主要研究的是已知终端观测值去反演抛物型方程辐射系数的一个反问题：

问题 P： 考虑如下二阶抛物型方程的初边值问题：

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} + r(x)v = \lambda\int_0^t v(s)\mathrm{d}s + f(x,t), & (x,t)\in Q=(0,l)\times(0,T) \\ v(0,t)=v(l,t)=0, & t\in(0,T) \\ v(x,0)=\varphi(x), & x\in(0,l) \\ v(x,T)=\psi(x), & x\in(0,l) \end{cases} \tag{1.4}$$

这里的 $\varphi(x),\psi(x),f(x)$ 是 $(0,l)$ 上已知的光滑函数，确定满足(1.4)式的函数 v 和 r，$\psi(x)$ 表示在终端时刻 $T>0$ 时的观测值，$\varphi(x)$ 是初始时刻的观测值。

我们主要从理论分析的角度来讨论问题 P，在这里我们构造了一个新的控制泛函来代替原来的问题 P。

2. 最优控制问题

将确定抛物型方程系数的反问题 P 重新表述如下最优控制 P':

问题 P'求 $\bar r(x)\in\Re$，使得：

$$J(\bar r)=\min_{r\in\Re} J(r) \tag{2.1}$$

这里

$$J(r)=\frac{1}{2}\int_0^l \left|v(x,T;r)-\psi(x)\right|^2+\frac{M}{2}\int_0^l|\nabla r|^2\,\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

$$\Re=\left\{r(x)\middle|0<\beta_0\le r\le\beta_1,\nabla r\in L^2(0,l)\right\} \tag{2.3}$$

$v(x,T;r)$ 是问题(1.4)的解，$r(x)\in\Re$，M 是正则化系数，β_0，β_1 是两个已知正常数。

引理 2.1 [6]：假设 $\varphi(x)\in C^{2,\frac{1}{2}}(0,l)$，对 $\forall r(x)\in\Re$ 问题(1.4)存在唯一解 $v(x,t)\in C^{2+\frac{1}{2},1+\frac{1}{4}}(\bar Q)$。

引理 2.2：假设 $\varphi(x)\in L^2(0,l)$，对 $\forall r(x)\in L^2(0,l)$，存在一个仅 T 与有关的非负常数 C 满足下式

$$\|v(t)\|_2^2\le C\left(\|f\|_2^2+\|\varphi\|_2^2\right) \tag{2.4}$$

证明：根据问题(1.4)有 $0<t\le T$

$$\int_0^l\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{v^2}{2}\right|\mathrm{d}t\mathrm{d}x-\int_0^l\int_0^t v_{xx}v\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\int_0^l\int_0^t rv^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^l\int_0^t fv\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\lambda\int_0^l\int_0^t\left[\int_0^\tau v(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right]v\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

整理得：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^l v^2(t)\mathrm{d}x+\int_0^l\int_0^t v_x^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\int_0^l\int_0^t rv^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^l\varphi^2(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^t fv\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\lambda\int_0^l\int_0^t\left[\int_0^\tau v(x,s)\mathrm{d}s\right]v\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|v(t)\|_2^2+\int_0^t\|v_x\|_2^2\mathrm{d}t+\int_0^l\int_0^t rv^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\|\varphi(x)\|_2^2\mathrm{d}x+\frac{T}{2}\|f\|_2^2+\frac{1}{2}\int_0^t\|v(s)\|_2^2\mathrm{d}s+\lambda\int_0^l\int_0^t\left[\int_0^\tau v(x,s)\mathrm{d}s\right]v\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由于 $\lambda\int_0^l\int_0^t\left[\int_0^\tau v(x,s)\mathrm{d}s\right]v\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left\|\int_0^\tau v(s)\mathrm{d}s\right\|^2\mathrm{d}\tau$ 且 $r(x)>0$，

从而有

$$\|v(t)\|_2^2\le\|\varphi(x)\|_2^2+T\|f\|_2^2+(1+\lambda)\int_0^t\|v(s)\|_2^2\mathrm{d}s$$

由 Gronwall’s 不等式得：$\|v(t)\|_2^2\le C\left(\|f\|_2^2+\|\varphi\|_2^2\right)$

引理 2.2 即得证。

引理 2.3：假设在$(0,l)$上$\varphi(x)\ge 0$且$\varphi(x)\ne 0$，$r_1,r_2\in\Re$，$v_1(x,T)=v_2(x,T)$则有$r_1(x)=r_2(x)$。

证明：详细证明可参考[7]由于证明过长在此处省略其详细证明过程。

3. 存在性

定理 3.1：存在一个$\overline{r}\in\Re$，使得$J(\overline{r})$是$J(r)$的最小元，即$J(\overline{r})=\min\limits_{r\in\Re}J(r)$。

证明：令$\{r_n,v_n\}$是一个极小化序列，即

$$\inf_{r\in\Re}J(r)\le J(r_n)\le\inf_{r\in\Re}J(r)+\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots$$

这里v_n是问题(1.4)的解，$r_n\in\Re$，易知$J(r)$是非负的，且$J(r_n)\le C$，可推出：

$$\|\nabla r_n\|_{L^2(0,l)}\le C \tag{3.1}$$

这里C与n无关，由$\{r_n\}$的有界性及(3.1)可得：

$$\|r_n\|_{C^{\frac{1}{2}}(0,l)}\le C \tag{3.2}$$

取$\{r_n\}$的子序列仍记为$\{r_n\}$，使得$r_n(x)\rightharpoonup\overline{r}(x)$，$n\to\infty$。

由 Sobolev 嵌入定理可得：

$$\|r_n(x)-\overline{r}(x)\|_{L^1(0,l)}\to 0,\ n\to\infty \tag{3.3}$$

因此

$$\|v_n(x,t)\|_{C^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\overline{Q})}\le C \tag{3.4}$$

$$\|v_n(x,t)\|_{C^{2+\frac{1}{2},1+\frac{1}{4}}(\omega)}\le C,\ \omega\subset Q \tag{3.5}$$

由于$r_n\rightharpoonup\overline{r}$，从而有$v_n(x,t)\rightharpoonup\overline{v}(x,t),n\to\infty$，容易验证$\overline{r};\overline{v}(x,T;\overline{r})$满足问题(1.4)，再由 Lebesgue's 控制收敛定理和L^2范数的弱半连续性可得：

$$J(\overline{r})=\lim_{n\to\infty}\int_0^l\left|v(x,T;r_n)-\psi(x)\right|^2\mathrm{d}x+\frac{M}{2}\int_0^l|\nabla\overline{r}|^2\,\mathrm{d}x$$

由于

$$\int_0^l|\nabla\overline{r}|^2\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^l\nabla r_n\cdot\nabla\overline{r}\mathrm{d}x\le\lim_{n\to\infty}\sqrt{\int_0^l|\nabla r_n|^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^l|\nabla\overline{r}|^2\,\mathrm{d}x}$$

从而有$J(\overline{r})\le\lim\limits_{n\to\infty}J(r_n)=\inf\limits_{r\in\Re}J(r)$

因此有$J(\overline{r})=\min\limits_{r\in\Re}J(r)$

定理 3.1 即得证。

4. 必要条件

定理 4.1：令r为最优控制问题(2.1)的解，则存在一个三元函数(v,ξ,r)满足如下方程：

$$\begin{cases}v_t-v_{xx}+rv=f+\lambda\int_0^t v(s)\mathrm{d}s, & (x,t)\in Q\\ v(0,t)=v(l,t)=0, & t\in(0,T]\\ v(x,0)=\varphi(x), & x\in(0,l)\end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} -\xi_t-\xi_{xx}+r\xi-\lambda\int_t^T\xi(s)\mathrm{d}s=0, & (x,t)\in Q \\ \xi(0,t)=\xi(l,t)=0, & t\in(0,T] \\ \xi(x,T)=v(x,T)-\psi(x), & x\in(0,l) \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\int_0^l\int_0^T v\xi(r-h)\mathrm{d}t\mathrm{d}x-M\int_0^l\nabla r\cdot\nabla(r-h)\mathrm{d}x\geq 0 \tag{4.3}$$

证明：$\forall h\in\Re$，$0\leq\delta\leq 1$ 有 $r_\delta\equiv(1-\delta)r+\delta h\in\Re$，则

$$J_\delta\equiv J(r_\delta)=\frac{1}{2}\int_0^l\left|v(x,T;r_\delta)-\psi(x)\right|^2\mathrm{d}x+\frac{M}{2}\int_0^l\left|\nabla r_\delta\right|^2\mathrm{d}x \tag{4.4}$$

在 $r=r_\delta$ 时令 v_δ 为(1.4)的解，由于 r 是最优解则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}J_\delta}{\mathrm{d}\delta}\right|_{\delta=0}=\int_0^l\left[v(x,T;r)-\psi(x)\right]\left.\frac{\partial v_\delta}{\partial\delta}\right|_{\delta=0}+M\int_0^l\nabla r\cdot\nabla(h-r)\mathrm{d}x\geq 0 \tag{4.5}$$

令 $\widetilde{v_\delta}=\dfrac{\partial v_\delta}{\partial\delta}$ 计算得出如下方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{v_\delta}\right)-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\widetilde{v_\delta}\right)+r_\delta\widetilde{v_\delta}=(r-h)v_\delta+\lambda\int_0^t\widetilde{v_\delta}(s)\mathrm{d}s, & (x,t)\in Q \\ \widetilde{v_\delta}(0,t)=\widetilde{v_\delta}(l,t)=0, & t\in(0,T] \\ \widetilde{v_\delta}(x,0)=0, & x\in(0,l) \end{cases} \tag{4.6}$$

令 $\eta=\widetilde{v_\delta}\big|_{\delta=0}$ 则 η 满足

$$\begin{cases} \eta_t-\eta_{xx}+r\eta=(r-h)v+\lambda\int_0^t\eta(s)\mathrm{d}s, & (x,t)\in Q \\ \eta(0,t)=\eta(l,t)=0, & t\in(0,T] \\ \eta(x,0)=0, & x\in(0,l) \end{cases} \tag{4.7}$$

由(4.5)可得：

$$\int_0^l\left[v(x,T;r)-\psi(x)\right]\eta(x,T)\mathrm{d}x+M\int_0^l\nabla r\cdot\nabla(h-r)\mathrm{d}x\geq 0 \tag{4.8}$$

令 $\mathcal{L}\eta=\eta_t-\eta_{xx}+r\eta-\lambda\int_0^t\eta(s)\mathrm{d}s$

假设 ξ 是以下问题的解

$$\begin{cases} \mathcal{L}^*\xi=-\xi_t-\xi_{xx}+r\xi-\lambda\int_t^T\xi(s)\mathrm{d}s=0, & (x,t)\in Q \\ \xi(0,t)=\xi(l,t)=0, & t\in(0,T] \\ \xi(x,T)=v(x,T)-\psi(x), & x\in(0,l) \end{cases} \tag{4.9}$$

$\mathcal{L}^*$ 是 $\mathcal{L}$ 的伴随算子，由(4.7)和(4.9)式可得：

$$\begin{aligned} 0&=\int_0^l\int_0^T\eta\mathcal{L}^*\xi\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^l\int_0^T\left[-\eta\xi_t-\eta\xi_{xx}+r\eta\xi-\lambda\eta\int_t^T\xi(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &=-\int_0^l\eta\xi\big|_0^T\mathrm{d}x+\int_0^l\int_0^T\eta_t\xi\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\int_0^l\int_0^T\left[-\eta\xi_{xx}+r\eta\xi-\lambda\eta\int_t^T\xi(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &=-\int_o^l\left[v(x,T)-\psi(x)\right]\eta(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^l\int_0^T v\xi(r-h)\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\int_0^l\int_0^T\lambda\xi\int_0^t\eta(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\quad-\int_0^l\int_0^T\lambda\eta\int_t^T\xi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}x \end{aligned}$$

由于

$$\int_0^l\int_0^T \lambda\xi\int_0^t \eta(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int_0^l\int_0^T \lambda\eta\int_t^T \xi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}x = 0$$

因此

$$0 = \int_0^l\int_0^T \eta\mathscr{L}^*\xi\mathrm{d}t\mathrm{d}x = -\int_o^l\left[v(x,T)-\psi(x)\right]\eta(x,T)\mathrm{d}x + \int_0^l\int_0^T v\xi(r-h)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \tag{4.10}$$

再由(4.8)和(4.10)式可得：

$$\int_0^l\int_0^T v\xi(r-h) - M\int_0^l \nabla r\cdot\nabla(r-h)\mathrm{d}x \ge 0$$

定理 4.1 即得证。

5. 局部唯一性和稳定性

由于最优控制问题 P'是非凸的，故不存在唯一的解，但是当$T \ll 1$时可证明此解是局部唯一的，且具有稳定性。从而在某种意义下我们将一个不适定问题转化为一个适定的最优控制问题，为数值计算打下了坚实的理论基础。

引理 5.1： 对任意有界连续函数 $f(x)\in C(0,l)$，有

$$\max_{(0,l)}\left|f(x)\right| \le \left|f(x_0)\right| + \sqrt{l\int_0^l\left|\nabla f\right|^2\mathrm{d}x} \tag{5.1}$$

这里 x_0 是 $(0,l)$ 上的不动点。

证明：因为$0<x<l$所以有

$$\begin{aligned}\left|f(x)\right| &\le \left|f(x_0)\right| + \left|f(x)-f(x_0)\right| = \left|f(x_0)\right| + \left|\int_{x_0}^x f'\mathrm{d}x\right| \\ &\le \left|f(x_0)\right| + \left(\int_0^l 1\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_0^l\left|\nabla f\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12} = \left|f(x_0)\right| + \left(l\int_0^l\left|\nabla f\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\end{aligned}$$

引理 5.1 即得证。

引理 5.2 [8]：设 $v(x,t)\in C^2(Q)\cap C(\bar{Q})$ 是问题(1.4)的解，则对 $v(x,t)$ 有如下估计式：

$$\max_{\bar{Q}}|v| \le \max\left\{\frac{1}{q_0}\sup_Q|f|,\sup_{[0,l]}|\phi|\right\} \tag{5.2}$$

引理 5.3： 对方程$(1.4)_4$有如下估计：

$$\|u\|_\infty \le \|v(x,t)-\psi(x)\|_\infty \tag{5.3}$$

证明过程与引理 5.2 类似，此处略。

本部分主要证明解得局唯一性和稳定性，假设$\psi_1(x),\psi_2(x)$是给定的两个函数，且满足$\psi(x)\in C[0,l]$，令 $r_1(x),r_2(x)$ 是最优控制问题 P'分别对应于 $\psi=\psi_i,(i=1,2)$ 的解，$\{v_i,\xi_i\}(i=1,2)$ 是 $r=r_i(i=1,2)$ 时方程(4.1)和(4.2)的解，其中令 $v_1-v_2=V,\xi_1-\xi_2=\mu,r_1-r_2=R$ 。

则 v 和 μ 满足

$$\begin{cases} V_t - V_{xx} + r_1V = -Rv_2 + \lambda\int_0^t V(s)\mathrm{d}s, & (x,t)\in Q \\ V(0,t)=V(l,t)=0, & x\in(0,l) \\ V(x,0)=0, & t\in(0,T] \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\begin{cases} -\mu_t - \mu_{xx} + r_1\mu = -R\xi_2 + \lambda\int_t^T \mu(s)\mathrm{d}s, & (x,t)\in Q \\ \mu(0,t) = \mu(l,t) = 0, & t\in(0,T] \\ \mu(x,T) = V(x,T) - (\psi_1 - \psi_2), & x\in(0,l) \end{cases} \tag{5.5}$$

引理 5.4： 由方程(5.4)可得如下估计：

$$\max_{0\le t\le T}\int_0^l V^2\mathrm{d}x \le C\left(\max|R|\right)^2\int_0^l\int_0^T |v_2|^2\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \tag{5.6}$$

证明：由于 $0<\beta_0\le r\le\beta_1$，

$$\int_0^l\int_0^t\left(\frac{V^2}{2}\right)_t \mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_0^l\int_0^t V_x^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_0^l\int_0^t r_1V^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x = -\int_0^l\int_0^t Rv_2V\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_0^l\int_0^t\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_0^\tau V(s)\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x$$

则有

$$\frac{1}{2}\int_0^l V^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_0^l\int_0^t V_x^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_0^l\int_0^t r_1V^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x = -\int_0^l\int_0^t Rv_2V\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_0^l\left(\int_0^t V(s)\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}x$$

整理得：

$$\frac{1}{2}\int_0^l V^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_0^l\int_0^t V_x^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x \le \left(\max|R|\right)^2\int_0^l\int_0^t |v_2|^2\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \frac{\lambda T}{2}\int_0^l\int_0^t V^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_0^l\int_0^t V^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

从而有

$$\int_0^l V^2(x,t)\mathrm{d}x \le C\left(\max|R|\right)^2\int_0^l\int_0^T |v_2|^2\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + (2+\lambda T)\int_0^l\int_0^t V^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

由 Gronwall’s 不等式得：

$$\int_0^l V^2(x,t)\mathrm{d}x \le C\left(\max|R|\right)^2\int_0^l\int_0^T |v_2|^2\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

C 是 T 与无关的常数。

引理 5.4 即得证。

引理 5.5： 由方程(5.5)可得如下估计：

$$\max_{0\le t\le T}\int_0^l \mu^2\mathrm{d}x \le C\left(\max|R|\right)^2\int_0^l\int_0^T\left(|v_2|^2 + |\xi_2|^2\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + C\int_0^l|\psi_1-\psi_2|^2\,\mathrm{d}x \tag{5.7}$$

证明：由于 $0<\beta_0\le r\le\beta_1$，由方程(5.5)可得：

$$\int_0^l\int_t^T -\left(\frac{\mu}{2}\right)_t^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_0^l\int_t^T \mu_x^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_0^l\int_t^T r_1\mu^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_0^l\int_t^T -R\xi_2\mu\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_0^l\left(\int_t^T \mu(s)\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}x$$

即

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^l \mu^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_0^l\int_t^T \mu_x^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2}\int_0^l\left|V^2(x,T)\right|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l|\psi_1-\psi_2|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_0^l\left(\int_t^T \mu(s)\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}x - \int_0^l\int_t^T R\xi_2\mu\mathrm{d}t\mathrm{d}x \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^l \mu^2(x,t) + \int_0^l\int_t^T \mu_x^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2}\left(\max|R|^2\right)\int_0^l\int_t^T|\xi_2|^2\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l\int_t^T \mu^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l V^2(x,T)\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^l|\psi_1-\psi_2|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_0^l\left(\int_t^T \mu(s)\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}x \end{aligned}$$

结合(5.6)式可得：

$$\int_0^l \mu^2(x,t)\mathrm{d}x \le C(\max|R|)^2 \int_0^l\int_0^T \left(|v_2|^2+|\xi_2|^2\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\int_0^l|\psi_1-\psi_2|^2\mathrm{d}x$$
$$+(1+\lambda T)\int_0^l\int_t^T \mu^2(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

当 $T \ll 1$ 时由 Gronwall’s 不等式可得：

$$\max_{0\le t\le T}\int_0^l \mu^2(x,t)\mathrm{d}x \le C(\max|R|)^2 \int_0^l\int_0^T \left(|v_2|^2+|\xi_2|^2\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x+C\int_0^l|\psi_1-\psi_2|^2\mathrm{d}x$$

引理 5.5 即得证。

定理 5.4： 假设 $r_1(x),r_2(x)$ 是最优控制问题 P'的两个最小值，如果存在 $x_0\in(0,l)$，使 $r_1(x_0)=r_2(x_0)$，当 $T \ll 1$ 时有 $\max\limits_{x\in(0,l)}|r_1-r_2|=\dfrac{Cl^{\frac{1}{3}}}{M^{\frac{1}{3}}}=\|\psi_1-\psi_2\|_{L^2[0,l]}$，对 $\forall x\in(0,l)$，这里 C 与 T,l,M 无关。

证明：在(4.3)式中，当 $r=r_1$ 时取 $h=r_2$，当 $r=r_2$ 时，取 $h=r_1$，则有

$$\int_0^l\int_t^T v_1\xi_1(r_1-r_2)\mathrm{d}t\mathrm{d}x-M\int_0^l \nabla r_1\nabla(r_1-r_2)\mathrm{d}x\ge 0 \tag{5.8}$$

$$\int_0^l\int_t^T v_2\xi_2(r_2-r_1)\mathrm{d}t\mathrm{d}x-M\int_0^l \nabla r_2\nabla(r_2-r_1)\mathrm{d}x\ge 0 \tag{5.9}$$

当 $r=r_i(i=1,2)$ 时 $\{v_i,\xi_i\}(i=1,2)$ 分别是(4.1)，(4.2)的解

由(5.8) + (5.9)得：

$$\begin{aligned} M\int_0^l|\nabla(r_1-r_2)|^2\mathrm{d}x &\le \int_0^l\int_0^T (v_1\xi_1-v_2\xi_2)(r_1-r_2)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &=\int_0^l\int_0^T (v_1\xi_1-v_2\xi_1+v_2\xi_1-v_2\xi_2)(r_1-r_2)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &=\int_0^l\int_0^T (V\xi_1+\mu v_2)R\mathrm{d}t\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.10}$$

即

$$M\int_0^l|\nabla(r_1-r_2)|^2\mathrm{d}x \le \int_0^l\int_0^T R(V\xi_1+v_2\mu)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \tag{5.11}$$

由定理 5.4 假设知存在 $x_0\in(0,l)$ 使

$$R(x_0)=r_1(x_0)-r_2(x_0)=0 \tag{5.12}$$

由引理 5.1 知

$$\max_{(0,l)}|R(x)|\le|R(x_0)|+\sqrt{l\int_0^l|\nabla R|^2\mathrm{d}x}=\sqrt{l\int_0^l|\nabla R|^2\mathrm{d}x} \tag{5.13}$$

再由(5.10)，(5.13)及 Young 不等式可得：

$$\begin{aligned} \max|R|^2 &\le l\int_0^l|\nabla R|^2\mathrm{d}x \le \frac{l}{M}\int_0^l\int_0^T R(V\xi_1+v_2\mu)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2l}\int_0^l|R|^2\mathrm{d}x+\frac{Tl^2}{2M^2}\int_0^l\int_0^T|V\xi_1+v_2\mu|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2}\max|R|^2+\frac{Tl^2}{M^2}\max_Q|\xi_1|^2\int_0^l\int_0^T V^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\frac{Tl^2}{M^2}\max_Q|v_2|^2\int_0^l\int_0^T\mu^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2}\max|R|^2+C\frac{T^2l^2}{M^2}\max_Q|\xi_1|^2\cdot\left(\int_0^l\int_0^T|v_2|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)\cdot\max|R|^2 \\ &\quad +C\frac{T^2l^2}{M^2}\max_Q|v_2|^2\cdot\left(\int_0^l\int_0^T|v_2|^2+|\xi_2|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)\cdot\max|R|^2+C\frac{T^2l^2}{M^2}\int_0^l|\psi_1-\psi_2|^2\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.14}$$

由引理 5.2 和引理 5.3 可知

$$\max_Q |\xi_1|^2, \max_Q |\xi_2|^2, \max_Q |v_2|^2 \le C \tag{5.15}$$

从而根据(5.14)，(5.15)式知，

$$\left(\max|R|^2\right) \le C\frac{T^3 l^2}{M^2}\max|R|^2 + C\frac{T^2 l^2}{M^2}\int_0^l |\psi_1-\psi_2|^2 \mathrm{d}x \tag{5.16}$$

当 $T \ll 1$ 使

$$C\frac{T^3 l^2}{M^2} = \frac{1}{2} \tag{5.17}$$

由(5.16)和(5.17)式得：

$$\max_{x\in(0,l)} |r_1 - r_2| = \frac{Cl^{\frac{1}{3}}}{M^{\frac{1}{3}}}\|\psi_1-\psi_2\|_{L^2[0,l]} \tag{5.18}$$

定理 5.4 即得证。

注： 正则化参数的选取在反问题的研究中非常重要，尤其在数值计算中不同的正则化参数会对数值结果产生巨大影响。由定理 5.4 容易得到如果存在误差界 ε，则当正则化参数 M 以下面方式依赖于误差界并趋于零时，

$$\|\psi_1-\psi_2\| \le \varepsilon, \frac{\varepsilon^2}{M^{\frac{2}{3}}} \to 0$$

则最优控制解是局部唯一且稳定的。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11461039, 61663018, 11961042)；兰州交通大学“百名青年优秀人才培养计划”；甘肃省自然科学基金资助项目(18JR3RA122)。

参考文献

[1] 周蜀林. 偏微分方程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2005.

[2] 姜礼尚, 等, 编. 数学物理方程讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 1996.

[3] Aboulaichb, R. and Achchaba, D. (2018) Parameter Identification by Optimization Method for a Pollution Problem in Porous Media. *Acta Mathematica Scientia*, **38**, 1345-1360. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(18)30818-X

[4] Yang, L., Yu, J.-N. and Deng, Z.-C. (2008) An Inverse Problem of Identifying the Coefficient of Parabolic Equation. *Applied Mathematical Modelling*, **32**, 1984-1995. https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.06.025

[5] Li, Z.L. and Zheng. K.W. (1998) An Inverse Problem in a Parabolic Equation. *Differential Equations and Computational Simulation*, **6**, 203-209.

[6] 杨柳. 具奇异或退化性质的二阶抛物型方程的系数反演问题[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2016.

[7] Prilepko, A.I., Orlovsky, D.G. and Vasin, I.A. (2000) Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Vol. 1. Marcel Dekker, New York.

[8] Deng, Z.C. and Yang, L. (2014) An Inverse Problem of Identifying the Radiative Coefficient in a Degenerate Parabolic Equation. *Chinese Annals of Mathematics*, **35B**, 355-382. https://doi.org/10.1007/s11401-014-0836-x