Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(4), 551-559
Published Online April 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.94066

Properties of Solutions for a Class of Nonlinear Pseudoparabolic Equations

Jiazhuo Cheng[1], Lingyu Jin[1], Shaomei Fang[1,2]

[1]College of Mathematics and Informatics, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
[2]School of Mathematics and Statistics, Yangtze Normal University, Chongqing
Email: dz90@scau.edu.cn

Received: Apr. 5th, 2020; accepted: Apr. 17th, 2020; published: Apr. 24th, 2020

Abstract

This paper studies the weak solutions of a class of fractional nonlinear pseudo-parabolic equations. First, a priori estimates of the solution of the equation are obtained through the energy method discussion, and then the Galerkin method is used to construct an approximate solution sequence to prove the existence and uniqueness of the weak solution of the equation.

Keywords

A Priori Estimates, Galerkin Method, Weak Solution

一类非线性伪抛物型方程解的性质

程嘉卓[1]，金玲玉[1]，房少梅[1,2]

[1]华南农业大学，数学与信息学院，广东 广州
[2]长江师范大学，数学与统计学院，重庆
Email: dz90@scau.edu.cn

收稿日期：2020年4月5日；录用日期：2020年4月17日；发布日期：2020年4月24日

摘 要

本文研究了一类分数阶非线性伪抛物方程的弱解问题。首先通过能量方法讨论得到方程解的先验估计，然后利用Galerkin方法构造近似解序列来证明方程弱解的存在唯一性。

关键词

先验估计，Galerkin方法，弱解

文章引用：程嘉卓，金玲玉，房少梅. 一类非线性伪抛物型方程解的性质[J]. 应用数学进展, 2020, 9(4): 551-559.
DOI: 10.12677/aam.2020.94066

1. 引言

我们考虑分数阶非线性伪抛物方程的以下初始边值问题

$$u_t+(-\Delta)^{\alpha}u_t+(-\Delta)^{\alpha}u-\mu(\nabla u)\Delta u+\left(1+\sigma(\nabla u)\right)u=f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,t)\big|_{x\in\partial\Omega}=0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\tilde{u}_0(x), \tag{3}$$

其中 $t>0, x\in\Omega, \Omega\subset R$ 是有界光滑域，T 和 α 是正常数，$f,\mu,\sigma,\tilde{u}_0$ 是满足后面指定条件的给定函数。

伪抛物线方程

$$u_t-u_{xxt}=F(x,t,u_x,u_{xx}), \tag{4}$$

由 Coleman 等人于 20 世纪 60 年代发现，用来模拟不稳定的简单剪切流的特殊运动状态[1]。伪抛物线方程用于各种领域，例如均匀流体通过裂隙岩石的渗漏[2] (三阶项的系数表示岩石的裂隙程度，其减小程度对应于增加裂纹的程度)，非线性色散长波的单向传播[3] [4] (其中 u 是振幅或旋度)，种族迁移的描述[5] (其中 u 是人口密度)。由于伪抛物线方程的广泛应用，它们引起了数学家的极大关注，例如讨论了解的存在性、渐近行为、正则性和衰减性[6] [7] [8] [9]。

描述小振幅长波在非线性色散介质中的传播过程时，经典的伪抛物线方程通常必须考虑耗散机制，以便准确反映实际情况。但是，引起波衰减的机制非常复杂，人们对其了解不多。在这种情况下，人们可能被迫依赖耗散的临时模型[10]。在对平面波的单向传播进行建模时，需要在模型中增加非线性和色散的耗散，如下式

$$u_t+u_x+uu_x-vu_{xx}-u_{xxt}=0, \tag{5}$$

其中 $v>0$ 是固定常数。方程(5)有时被称为 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB)方程，它是 Benjamin-Bona-Mahony (BBM)方程[3]和 Burgers 类型耗散项[8]的结合。最近，许多科学家开始注意到出现在工程学和物理学中的三级流体流动数学模型框架中的 BBMB 方程[11] [12] [13]。T.Aziz 等人研究了以下的 BBMB 运动方程

$$\rho u_t=\mu u_{yy}+\alpha_1 u_{yyt}+6\beta_3\left(u_{yy}\right)^2u_{yy}-\frac{\varphi}{k}\left(\mu u+\alpha_1 u_t+2\beta_3\left(u_y\right)^2u\right), \tag{6}$$

其中 $y>0, t>0$，u 表示速度分量，μ 表示粘度系数，α_1 和 β_3 是材料常数[11]。方程(6)适用于带有多孔介质的刚性板上非定常流动三级流体的数学模型。后来，在[14] (可以看作[11]的延续)中，作者在如下改进的非定常流动三级流体方程中证明了解的存在性，唯一性和指数衰减

$$u_t+\alpha(-\Delta)u_t+(-\Delta)u-\mu(\nabla u)\Delta u+\left(\gamma+\beta\sigma(\nabla u)\right)u=f(x,t), \tag{7}$$

其中 $\alpha=\beta=\gamma=1, \mu\in C(R;R), \sigma\in C^1(R;R)$ 和 $y\left(\int_0^y z\sigma'(z)\mathrm{d}z\right)\le y^2\sigma(y)(y\in R)$。

分数耗散算子 $(-\Delta)^{\alpha}$ 可以看作是 Levy 稳定扩散过程的无穷小生成器。与微积分方程相比，它可以更准确地描述某些物理现象[15] [16] [17]。因此，越来越多的科学家致力于分数阶微分方程的研究[16] [17] [18]。

基于以上工作，我们研究了分数阶方程(1)-(3)的弱解的存在性和唯一性。

2. 预备知识和引理

现对文中将用到的定义、引理和记号做一些说明。记函数空间 $L^2(\Omega)$ 的范数通常表示为 $\|\cdot\|$，其标量积由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示，$L^p(\Omega)$ 的范数记为 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$，C 表示一个正常数，该常数可能在各行之间变化。

定义 1：范数 $L^p(0,T;X)$ 表示实函数 $f:[0,T]\to X$ 的 Banach 空间，使得

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)}=\left(\int_0^T\|f\|_X^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,\ 1\le p<\infty,$$

且

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)}=\operatorname*{esssup}_{0\le t\le T}\|f\|_X,\quad p=\infty.$$

引理 1：令 σ 和 μ 均是 $R\to R$ 上映射并且属于 C，那么

$$\|\mu(\nabla v)\|_{L^\infty(\Omega)}<C,\tag{8}$$

$$\|\sigma(\nabla v)\|_{L^\infty(\Omega)}<C,\tag{9}$$

其中 $v\in H^{\alpha+1}(\Omega)$ 且常数 C 依赖于 v。

证明：利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式，有

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\Omega)}\le c_2\|v\|_{H^\alpha(\Omega)}^{\eta}\|v\|^{1-\eta}<C.\tag{10}$$

其中 $\eta=\frac{n}{2\alpha}+\frac{1}{\alpha}$。应用这个不等式，易知

$$\|\mu(\nabla v)\|_{L^\infty(\Omega)}<C,\tag{11}$$

$$\|\sigma(\nabla v)\|_{L^\infty(\Omega)}<C.\tag{12}$$

引理 2：对于 $\alpha\ge\frac{1}{2}$，令初值满足 $\tilde{u}_0(x)\in H^\alpha(\Omega)$，且

$$\mu\in C(R;R),\mu(0)=0,\mu(z)>0(\forall z\in R,z\ne0),\tag{13}$$

$$\sigma\in C^1(R;R),\sigma(0)=0,\sigma(z)>0(\forall z\in R,z\ne0),\tag{14}$$

$$f\in L^2(\Omega),\tag{15}$$

那么问题(1)-(3)有一个弱解 u，满足

$$\|u(t)\|_{H^\alpha(\Omega)}^2\le C.\tag{16}$$

证明：将(1)乘以 $u(t)$，并关于空间变量 x 在 Ω 上进行积分，我们很容易就得出了等式

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_{H^\alpha(\Omega)}^2+\|u(t)\|_{H^\alpha(\Omega)}^2+I_1+I_2=\langle f(t),u(t)\rangle,\tag{17}$$

其中 $I_1=-\langle\mu(\nabla u(t))\Delta u(t),u(t)\rangle$，$I_2=\langle\sigma(\nabla u(t))u(t),u(t)\rangle$。

估计 I_1。易知

$$\begin{aligned} I_1 &= -\left\langle \mu\left(\nabla u(t)\right)\Delta u(t), u(t)\right\rangle \\ &= -\int_\Omega \nabla\left(\int_0^{\nabla u(t)} \mu(z)\,\mathrm{d}z\right) u(t)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left(\int_0^{\nabla u(t)} \mu(z)\,\mathrm{d}z\right)\nabla u(t)\,\mathrm{d}x \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{18}$$

估计 I_2。考虑(14)，易得

$$I_2 = \left\langle \sigma\left(\nabla u(t)\right)u(t), u(t)\right\rangle \geq 0. \tag{19}$$

回顾(17)，从(18)-(19)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u(t)\right\|_{H^\alpha(\Omega)}^2 + \left\|u(t)\right\|_{H^\alpha(\Omega)}^2 \leq C, \tag{20}$$

其中 C 依赖 f。那么运用~Gronwall~引理，可推断出

$$\left\|u(t)\right\|_{H^\alpha(\Omega)}^2 \leq C. \tag{21}$$

引理 2： 假设 $\alpha \geq \frac{1}{2}$，$\tilde{u}_0(x) \in H^{\alpha+1}(\Omega)$，且

$$\mu \in C(R;R), \mu(0)=0, \mu(z)>0\left(\forall z\in R, z\neq 0\right), \tag{22}$$

$$\sigma \in C^1(R;R), \sigma(0)=0, \sigma(z)>0\left(\forall z\in R, z\neq 0\right), \tag{23}$$

$$f \in L^2\left(0,\infty; H^1(\Omega)\right). \tag{24}$$

那么问题(1)-(3)有一个弱解 u 满足

$$\left\|\nabla u(t)\right\|_{H^\alpha(\Omega)}^2 \leq C. \tag{25}$$

证明： 将(1)乘以 $(-\Delta)u$，关于空间变量 x 在 Ω 上进行积分，我们有

$$\begin{aligned} &\left\|\nabla u(t)\right\|_{H^\alpha(\Omega)}^2 + \left\langle \mu\left(\nabla u(t)\right)\Delta u(t), \Delta u(t)\right\rangle + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u(t)\right\|_{H^\alpha(\Omega)}^2 \\ &+ \left\langle \sigma\left(\nabla u(t)\right)u(t), (-\Delta)u(t)\right\rangle = \left\langle f(t), (-\Delta)u(t)\right\rangle. \end{aligned} \tag{26}$$

类似(18)，我们推断

$$\left\langle \sigma\left(\nabla u(t)\right)u(t), (-\Delta)u(t)\right\rangle \geq 0. \tag{27}$$

考虑(22)，我们可以获得

$$2\left\langle \mu\left(\nabla u(t)\right)\Delta u(t), \Delta u(t)\right\rangle \geq 0. \tag{28}$$

另一方面，有

$$\left\langle f(t), (-\Delta)u(t)\right\rangle \leq \left\|\nabla f(t)\right\|\left\|\nabla u(t)\right\| \leq \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\nabla f(t)\right\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\left\|\nabla u(t)\right\|^2, \tag{29}$$

其中 ε 是一个正常数并且充分小。根据(26)-(29)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u(t)\right\|_{H^\alpha(\Omega)}^2 + \left\|\nabla u(t)\right\|_{H^\alpha(\Omega)}^2 \leq C, \tag{30}$$

其中 C 依赖 f。利用 Gronwall 引理，我们可以推断出

$$\left\|\nabla u(t)\right\|_{H^{\alpha}(\Omega)}^{2} \le C. \tag{31}$$

引理 3： 令 $\alpha \ge \dfrac{1}{2}$，$\tilde{u}_0(x) \in H^{\alpha+1}(\Omega)$，$u$ 是(1)-(3)有一个弱解，且

$$\mu \in C(R;R),\ \mu(0)=0,\ \mu(z)>0\left(\forall z\in R, z\ne 0\right), \tag{32}$$

$$\sigma \in C^1(R;R),\ \sigma(0)=0,\ \sigma(z)>0\left(\forall z\in R, z\ne 0\right), \tag{33}$$

$$f \in L^2\left(0,\infty;H^1(\Omega)\right). \tag{34}$$

满足

$$\int_0^t \left\|u_t(s)\right\|_{H^{\alpha}(\Omega)}^{2} \mathrm{d}s < C. \tag{35}$$

证明： 将(1)乘以 u_t 并关于时间变量 t 和空间变量 x 在 $(0,t)\times\Omega$ 上进行积分，整理可得

$$\begin{aligned}
&\left\|u(t)\right\|_{H^{\alpha}(\Omega)}^{2} + 2\int_0^t \left\langle \sigma\left(\nabla u(s)\right)u(s), u_t(s)\right\rangle \mathrm{d}s \\
&+2\int_0^t \left\|u_t(s)\right\|_{H^{\alpha}(\Omega)}^{2}\mathrm{d}s - 2\int_0^t \left\langle \mu\left(\nabla u(s)\right)\Delta u(s), u_t(s)\right\rangle \mathrm{d}s \\
&= \left\|u_0\right\|_{H^{\alpha}(\Omega)}^{2} + 2\int_0^t \left\langle f(s), u_t(s)\right\rangle ds.
\end{aligned} \tag{36}$$

从(32)，我们可以得到

$$-2\int_0^t \left\langle \mu\left(\nabla u(s)\right)\Delta u(s), u_t(s)\right\rangle \mathrm{d}s = 2\int_\Omega \int_0^{\nabla u(t)} \int_0^y \mu(z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \ge 0. \tag{37}$$

考虑(25)和**引理 1**，可以获得

$$\begin{aligned}
&2\left|\int_0^t \left\langle \sigma\left(\nabla u(s)\right)u(s), u_t(s)\right\rangle \mathrm{d}s\right| \\
&\le 2\left\|\sigma\left(\nabla u(s)\right)\right\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_0^t \int_\Omega \left|u(s)u_t(s)\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\le C + \delta \int_0^t \left\|u_t(s)\right\|^2 \mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{38}$$

其中 δ 是一个正常数。

因此，选择 δ 充分小，根据(36)-(38)有

$$\int_0^t \left\|u_t(s)\right\|_{H^{\alpha}(\Omega)}^{2} \mathrm{d}s < C, \tag{39}$$

其中 C 依赖 f。

3. 主要结果及其证明

借助上述引理，我们可以证明下面的定理。

定理 1： 对于 $\alpha \ge \dfrac{1}{2}$ 令初值满足 $\tilde{u}_0(x) \in H^{\alpha+1}(\Omega)$，且

$$\mu \in C(R;R),\ \mu(0)=0,\ \mu(z)>0\left(\forall z\in R, z\ne 0\right), \tag{40}$$

$$\sigma \in C^1(R;R),\ \sigma(0)=0,\ \sigma(z)>0\left(\forall z\in R, z\ne 0\right), \tag{41}$$

$$f \in L^2\left(0,\infty;H^1(\Omega)\right). \tag{42}$$

那么问题(1)-(3)有一个弱解 u，满足

$$u \in L^{\infty}\left(0,\infty;H^{\alpha+1}(\Omega)\right),\ u_t \in L^2\left(0,T;H^{\alpha}(\Omega)\right). \tag{43}$$

证明：第一步：Galerkin 逼近

在 H^{α} 上取特殊的正交基 $\{w_j\}$： $w_j(x)$ 由拉普拉斯特征函数形成：

$$\Delta w_j = \lambda_j w_j,\ w_j \in C^{\infty}(\Omega),\ 0<\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_j \to \infty. \tag{44}$$

定义

$$u_m(t)=\sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) w_j, \tag{45}$$

其中 $c_{mj}(t)(j=1,\cdots,m)$ 满足下面逼近方程

$$\begin{aligned}&\left\langle(-\Delta)^{\alpha} u_{mt}(t),w_j\right\rangle+\left\langle\left(1+\sigma\left(\nabla u_m(t)\right)\right)u_m(t),w_j\right\rangle+\left\langle(-\Delta)^{\alpha} u_m(t),w_j\right\rangle\\&+\left\langle u_{mt}(t),w_j\right\rangle-\left\langle\mu\left(\nabla u_m(t)\right)\Delta u_m(t),w_j\right\rangle=\left\langle f(t),w_j\right\rangle,1\le j\le m,\end{aligned} \tag{46}$$

初始条件

$$\begin{gathered}u_m(0)=u_{0m}\in span\left\{w_j,1\le j\le m\right\},\\ u_{0m}\to\tilde{u}_0\ (m\to\infty)\ \text{在}\ H^{\alpha+1}(\Omega)\ \text{中强收敛。}\end{gathered} \tag{47}$$

显然，此时的方程(46)-(47)是一组常微分方程。应用标准常微分方程的理论，易知当 $0\le t\le t_m=T$ 时，方程(46)-(47)具有唯一解。

第二步：取极限

根据以上估算，存在 $\{u_m(t)\}$ 的子序列，仍用 $\{u_m(t)\}$ 表示，满足

$$u_m \to u\ \text{在}\ L^{\infty}\left(0,\infty;H^{\alpha+1}(\Omega)\right)\ \text{中弱}*\text{收敛，} \tag{48}$$

$$u_{mt} \to u_t\ \text{在}\ L^2\left(0,T;H^{\alpha}(\Omega)\right)\ \text{中弱}*\text{收敛。} \tag{49}$$

应用 Riesz 定理，有

$$u_m \to u\ \text{在}\ L^2\left(0,\infty;H^{\alpha}(\Omega)\right)\ \text{中强收敛且几乎处处收敛于}\ Q_T, \tag{50}$$

$$\nabla u_m \to \nabla u\ \text{在}\ L^2(Q_T)\ \text{中强收敛且几乎处处收敛于}\ Q_T, \tag{51}$$

$$\Delta u_m \to \Delta u\ \text{在}\ L^2(Q_T)\ \text{中强收敛且几乎处处收敛于}\ Q_T\ \text{。} \tag{52}$$

考虑**引理 1**、**引理 2** 和**引理 3**，我们可以得到

$$\begin{gathered}\left\|\int_0^{\nabla u_m}\mu(z)\,\mathrm{d}z\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}<C,\\ \left\|\sigma(\nabla u_m)u_m\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}<C.\end{gathered} \tag{53}$$

应用控制收敛定理，我们发现

$$\int_0^{\nabla u_m}\mu(z)\,\mathrm{d}z\to\int_0^{\nabla u}\mu(z)\,\mathrm{d}z\ \text{在}\ L^2(Q_T)\ \text{中强收敛，} \tag{54}$$

$$\sigma(\nabla u_m)u_m\to\sigma(\nabla u)u\ \text{在}\ L^2(Q_T)\ \text{中强收敛。} \tag{55}$$

通过(47)-(52)和(54)-(55)，在(46)中取极限，我们获得

$$
\begin{aligned}
&\left\langle u_t(t),w\right\rangle+\left\langle(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(t),(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}w\right\rangle+\left\langle\int_0^{\nabla u(t)}\mu(z)\mathrm{d}z,\nabla w\right\rangle\\
&+\left\langle(-\Delta)^{\alpha}u_t(t),(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}w\right\rangle+\left\langle\left(1+\sigma\left(\nabla u(t)\right)\right)u(t),w\right\rangle\\
&=\left\langle f(t),w\right\rangle,\ \forall w\in H^{\alpha}(\Omega),\\
&u(0)=\tilde{u}_0.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

另外

$$
u\in L^{\infty}\left(0,\infty;H^{\alpha+1}(\Omega)\right),\ u_t\in L^2\left(0,T;H^{\alpha}(\Omega)\right).\tag{57}
$$

第三步：解的唯一性

令 u 和 v 是(1)-(3)的弱解。定义 $w=u-v$ ，我们有

$$
\begin{aligned}
&w_t+(-\Delta)^{\alpha}w_t+(-\Delta)^{\alpha}w-\left(\mu(\nabla u)\Delta u-\mu(\nabla v)\Delta v\right)\\
&+w+\left(\sigma(\nabla u)u-\sigma(\nabla v)v\right)=0,\\
&w(0)=0.
\end{aligned}
\tag{58}
$$

将(58)与 w 相乘，然后关于时间变量 t 和空间变量 x 从 $(0,t)\times\Omega$ 进行积分，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left\|w(t)\right\|_{H^{\alpha}(\Omega)}^2-2\int_0^t\left\langle\mu\left(\nabla u(s)\right)\Delta u(s)-\mu\left(\nabla v(s)\right)\Delta v(s),w(s)\right\rangle\mathrm{d}s\\
&+2\int_0^t\left\|w(s)\right\|_{H^{\alpha}(\Omega)}^2\mathrm{d}s+2\int_0^t\left\langle\sigma\left(\nabla u(s)\right)u(s)-\sigma\left(\nabla v(s)\right)v(s),w(s)\right\rangle\mathrm{d}s=0.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

利用函数的单调性，我们推断

$$
\begin{aligned}
&-2\int_0^t\left\langle\mu\left(\nabla u(s)\right)\Delta u(s),w(s)\right\rangle-\left\langle\mu\left(\nabla v(s)\right)\Delta v(s),w(s)\right\rangle\mathrm{d}s\\
&=2\int_0^t\left\langle\int_0^{\nabla u(s)}\mu(z)\mathrm{d}z-\int_0^{\nabla v(s)}\mu(z)\mathrm{d}z,\nabla w(s)\right\rangle\mathrm{d}s\geq 0.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

另一方面，我们发现

$$
\begin{aligned}
&-2\int_0^t\left\langle\sigma\left(\nabla u(s)\right)u(s)-\sigma\left(\nabla v(s)\right)v(s),w(s)\right\rangle\mathrm{d}s\\
&=-2\int_0^t\Big[\left\langle\sigma\left(\nabla u(s)\right)v(s),w(s)\right\rangle+\left\langle\sigma\left(\nabla u(s)\right)w(s),w(s)\right\rangle\\
&\quad-\left\langle\sigma\left(\nabla v(s)\right)v(s),w(s)\right\rangle\Big]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

利用估计，我们有

$$
\left|\sigma\left(\nabla v(s)\right)-\sigma\left(\nabla u(s)\right)\right|<L_1\left|\nabla v(s)-\nabla u(s)\right|,\tag{62}
$$

那么，由(62)，可知

$$
\begin{aligned}
&-2\int_0^t\left\langle\sigma\left(\nabla u(s)\right)v(s),w(s)\right\rangle-\left\langle\sigma\left(\nabla v(s)\right)v(s),w(s)\right\rangle\mathrm{d}s\\
&=2\int_0^t\left\langle\left(\sigma\left(\nabla v(s)\right)-\sigma\left(\nabla u(s)\right)\right)v(s),w(s)\right\rangle\mathrm{d}s\\
&\leq 2L_1\left\|v(s)\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}\int_0^t\left|\left\langle\left|\nabla w(s)\right|,w(s)\right\rangle\right|\mathrm{d}s\\
&\leq L_1\left\|v(s)\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}\int_0^t\int_{\Omega}\left(\left\|\nabla w(s)\right\|^2+\left\|w(s)\right\|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\leq C\int_0^t\left\|w(s)\right\|_{H^{\alpha}(\Omega)}^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

回顾(61)，从(63)可推出

$$-2\int_0^t \left\langle \sigma\left(\nabla u(s)\right)u(s)-\sigma\left(\nabla v(s)\right)v(s), w(s)\right\rangle \mathrm{d}s \le C\int_0^t \left\|w(s)\right\|_{H^\alpha(\Omega)}^2 \mathrm{d}s. \tag{64}$$

令 $\rho(s)=\left\|w(s)\right\|_{H^\alpha(\Omega)}^2$，从(58)-(60)和(64)，我们有

$$\rho(s)\le C\int_0^t \rho(s)\mathrm{d}s. \tag{65}$$

此时，应用 Gronwall 引理，我们有 $\rho(s)=0$，即 $w=0$。

基金项目

本文受国家自然科学基金项目(No.11271141)和重庆市科学技术委员会(cstc2018jcyjAX0787)资助。

参考文献

[1] Coleman, B.D., Duffin, R.J. and Mizel, V.J. (1965) Instability, Uniqueness, and Nonexistence Theorems for the Equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a Strip. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **19**, 100-116. https://doi.org/10.1007/BF00282277

[2] Barenblatt, G.I., Zheltov, I.P. and Kochina, I.N. (1960) Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks [Strata]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **24**, 1286-1303. https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6

[3] Benjamin, T.B., Bona, J.L. and Mahony, J.J. (1972) Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **272**, 47-78. https://doi.org/10.1098/rsta.1972.0032

[4] Ting, T.W. (1963) Certain Non-Steady Flows of Second-Order Fluids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **14**, 1-26. https://doi.org/10.1007/BF00250690

[5] Padron, V. (2004) Effect of Aggregation on Population Recovery Modeled by a Forward-Backward Pseudoparabolic Equation. *Transactions of the American Mathematical Society*, **356**, 2739-2756. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-03-03340-3

[6] Bona, J.L. and Dougalis, V.A. (1980) An Initial- and Boundary-Value Problem for a Model Equation for Propagation of Long Waves. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **75**, 503-522. https://doi.org/10.1016/0022-247X(80)90098-0

[7] Amick, C.J., Bona, J.L. and Schonbek, M.E. (1989) Decay of Solutions of Some Nonlinear Wave Equations (ENG). *Journal of Differential Equations*, **81**, 1-49. https://doi.org/10.1016/0022-0396(89)90176-9

[8] Zhang, L. (1995) Decay of Solution of Generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equations in N-Space Dimensions. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, **25**, 1343-1369. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)00252-D

[9] Medeiros, L.A. and Miranda, M.M. (1977) Weak Solutions for a Nonlinear Dispersive Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **59**, 432-441. https://doi.org/10.1016/0022-247X(77)90071-3

[10] Bona, J.L., Pritchard, W.G. and Scott, L.R. (1980) Solitary-Wave Interaction. *Physics of Fluids*, **23**, 438. https://doi.org/10.1063/1.863011

[11] Taha, A. and Mahomed, F.M. (2014) A Note on the Solutions of Some Nonlinear Equations Arising in Third-Grade Fluid Flows: An Exact Approach. *The Scientific World Journal*, **2014**, Article ID: 109128. https://doi.org/10.1155/2014/109128

[12] Hayat, T., Shahzad, F. and Ayub, M. (2007) Analytical Solution for the Steady Flow of the Third Grade Fluid in a Porous Half Space. *Applied Mathematical Modelling*, **31**, 2424-2432. https://doi.org/10.1016/j.apm.2006.09.008

[13] Sajid, M. and Hayat, T. (2008) Series Solution for Steady Flow of a Third Grade Fluid through Porous Space. *Transport in Porous Media*, **71**, 173-183. https://doi.org/10.1007/s11242-007-9118-3

[14] Ngoc, L.T.P., Yen, D.T.H. and Long, N.T. (2018) Existence and Asymptotic Behavior of Solutions of the Dirichlet Problem for a Nonlinear Pseudoparabolic Equation. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2018**, 1-20.

[15] Kilbas, A.A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006) Theory and Applications of Fractinal Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Elsevier, Amsterdam.

[16] Pu, X., Guo, B. and Zhang, J. (2012) Global Weak Solutions to the 1-D Fractional Landau-Lifshitz Equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B* (*DCDS-B*), **14**, 199-207. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2010.14.199

[17] Guo, B., Han, Y. and Xin, J. (2008) Existence of the Global Smooth Solution to the Period Boundary Value Problem of Fractional Nonlinear Schrodinger Equation. *Applied Mathematics & Computation*, **204**, 468-477. https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.07.003

[18] Zhang, S. (2003) Existence of Positive Solution for Some Class of Nonlinear Fractional Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **278**, 136-148. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00583-8