Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(9), 1486-1492
Published Online September 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.99175

Hans汉斯

带记忆项发展方程在$\mathbb{R}^n$上的适定性

李　军，张江卫

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙
Email: 2286693643@qq.com, zjwmath@163.com

收稿日期：2020年8月21日；录用日期：2020年9月10日；发布日期：2020年9月17日

摘　要

在本文中，主要研究带记忆项反应扩散方程在无界域上的适定性问题，应用经典的Galerkin方法得到了整体弱解的存在性，同时证明了解的唯一性和解对初值的连续依赖性，其中非线性项满足任意阶指数增长。

关键词

反应扩散方程，无界域，整体弱解，任意阶指数增长，记忆项

Well-Posed for Evolution Equations with Memory Term on $\mathbb{R}^n$

Jun Li, Jiangwei Zhang

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan
Email: 2286693643@qq.com, zjwmath@163.com

Received: Aug. 21st, 2020; accepted: Sep. 10th, 2020; published: Sep. 17th, 2020

Abstract

In this paper, we mainly study the suitability of the reaction-diffusion equation with memory term in the unbounded domain, obtain the existence of the global weak solution by classical Galerkin method, and prove the uniqueness of the understanding and the continuous dependence on the initial value, where the nonlinear term satisfies the exponential growth of any order.

Keywords

Reaction Diffusion Equation, Unbounded Domain, Global Weak Solution, Exponential Growth of

文章引用: 李军, 张江卫. 带记忆项发展方程在 $\mathbb{R}^n$ 上的适定性[J]. 应用数学进展, 2020, 9(9): 1486-1492.
DOI: 10.12677/aam.2020.99175

Any Order, Memory

1. 引言

在本文中，我们研究如下带记忆项经典反应扩散方程在相空间 $H^1(\mathbb{R}^n)\times L_\mu^2(\mathbb{R};H^1(\mathbb{R}^n))$ 的适定性问题。

$$\begin{cases} u_t-\Delta u-\int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s+\lambda u+f(u)=g, & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+, \\ u(x,0)=u_0(x),\eta^0=\eta^0(x,s)=\int_0^s u_0(x,-r)\mathrm{d}r, & (x,s)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 λ 是正常数， $g=g(x)\in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ 为已知函数，且 $\eta^t=\eta^t(x,s)=\int_0^s u(x,t-r)\mathrm{d}r$ ，故而

$$\eta_t^t=-\eta_s^t+u. \tag{1.2}$$

另外，我们设记忆核和非线性项满足以下条件：

(h_1) 记忆核满足

$$\mu\in C^1(\mathbb{R}^+)\cap L^1(\mathbb{R}^+),\mu(s)>0,\forall s\in\mathbb{R}^+ \tag{1.3}$$

且存在 $\delta>0$ ，使得

$$\mu'(s)+\delta\mu(s)\le 0,\forall s\in\mathbb{R}^+ \tag{1.4}$$

并记

$$m_0=\int_0^\infty \mu(s)\mathrm{d}s<\infty. \tag{1.5}$$

(h_2) 线性项满足：假设 $f\in C^1,f(0)=0$ ，且对满足如下增长条件

$$\theta_1|s|^p-\beta_1|s|^2\le f(s)s\le\theta_2|s|^p+\beta_2|s|^2,\quad \forall s\in\mathbb{R},p\ge 2. \tag{1.6}$$

和耗散条件

$$f'(s)\ge -l \tag{1.7}$$

且 $\beta_1<\lambda$ ，其中 $\theta_i,\beta_i\,(i=1,2)$ 和 l 是正数。

对于方程(1.1)这类经典反应扩散方程，其通常被应用于流体力学、固体力学和热传导理论等领域[1] [2]，由此引起了很多学者的关注，并且对其解的长时间行为做了大量研究，故而对方程适定性的研究也就凸显重要。

对于方程(1.1)，对其适定性问题的相关研究主要有，Zhang [3]考虑了系统整体强解在 $H_0^1(\Omega)\times L_\mu^2(\mathbb{R}^+,H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ 空间中解的存在唯一性及其解对初值的连续依赖性，其中非线性项满足任意阶多项式增长条件。最近，Luo [4]考虑了带有记忆项非经典反应扩散方程在 $H^1(\mathbb{R}^n)\times L_\mu^2(\mathbb{R};H^1(\mathbb{R}^n))$ 中的适定性问题，其非线性项亦满足任意阶多项式增长。故而对方程适定性的研究也就凸显重要。

据我们所知，对于方程(1.1)其在无界域上的渐近行为已有相关的一些研究[5] [6] [7]，但对其方程的适当性研究还很缺乏。其主要原因是由记忆项和无界域所引起，于是 Sobolev 紧嵌入不再成立，使问题

的研究比较困难。因此本文主要应用文[4]中的思想并结合经典的 Galerkin 方法和一些分析技巧得到本文的结果。

2. 预备知识

为方便起见，我们做如下假定：

用$|\cdot|_p$表示$L^p(\mathbb{R}^n)(p\geq 1)$上的模；用$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$L^2(\mathbb{R}^n)$上的内积；用$\|\cdot\|_0$表示$H^1(\mathbb{R}^n)$上的范数。特别的，记$\|\cdot\|_0^2=|\cdot|_2^2+|\nabla\cdot|_2^2$。

另外，当$r=0$时，记$\mathcal{H}_r=L^2(\mathbb{R}^n)$；当$r=1$时，记$\mathcal{H}_r=H^1(\mathbb{R}^n)$；且设$L_\mu^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_r)$为定义于$\mathbb{R}^+$取值于$\mathcal{H}_r$的一族 Hilbert 空间，对其赋以内积和范数如下：

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{\mu,\mathcal{H}_r}=\int_0^\infty\mu(s)\int_\Omega A^{r/2}\varphi A^{r/2}\psi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

$$\|\varphi\|_{\mu,\mathcal{H}_r}^2=\int_0^\infty\mu(s)\int_\Omega\left|A^{r/2}\varphi\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

由此我们可定义如下 Hilbert 空间

$$\mathcal{M}_r=\mathcal{H}_r\times L_\mu^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_r)$$

其范数为：

$$\|z\|_{\mathcal{M}_r}=\left\|(u,\eta^t)\right\|_{\mathcal{M}_r}=\left(\|u\|_{\mathcal{H}_r}^2+\left\|\eta^t\right\|_{\mu,\mathcal{H}_r}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

3. 方程的适定性

3.1. 解的存在性

定义 3.1： 设$f(u)$满足(1.6)~(1.7)，$z_0=(u_0,\eta^0)\in\mathcal{M}_1,z=(u,\eta^t)$是方程(1.1)的整体弱解，记$I=[0,T]$则对$\forall T>0$，若$z$满足方程(1.1)并且

$$u\in C(I;\mathcal{H}_0)\cap L^2(I;\mathcal{H}_1)\cap L^p\left(I;L^p(\mathbb{R}^n)\right),u_t\in L^2(I;\mathcal{H}_0)$$

$$\eta^t\in C\left(\mathbb{R};L_\mu^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_0)\right);\eta_t^t+\eta_s^t\in L^\infty\left(\mathbb{R};L_\mu^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1)\right)$$

并且对任意$\omega(x)\in H^1(\mathbb{R}^n),\varphi(x,t)\in\mathcal{H}_1$有

$$\begin{cases}\langle u_t,\omega\rangle+\langle\nabla\eta^t,\nabla\omega\rangle_{\mu,\mathcal{H}_0}+\langle\nabla u,\nabla\omega\rangle+\lambda\langle u,\omega\rangle+\langle f(u),\omega\rangle=\langle g,\omega\rangle\\ \langle\eta_t^t+\eta_s^t,\varphi\rangle_{\mu,\mathcal{H}_0}=\langle u,\varphi\rangle_{\mu,\mathcal{H}_0}\end{cases}$$

对于$t\in\mathbb{R}$几乎处处成立。

首先，对任意的正整数n，我们给定一个球

$$B_n=\left\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<n\right\}\tag{3.1}$$

由于B_n是有界域，故利用标准的 Faedo-Galerkin 方法可以获得如下初边值问题解的存在性

$$\begin{cases}u_{nt}-\Delta u_n-\int_0^\infty\mu(s)\Delta\eta_n^t(s)\mathrm{d}s+\lambda u_n+f(u_n)=g_n,\quad x\in B_n,\\ \eta_{nt}^t=-\eta_{ns}^s+u_n,\end{cases}\tag{3.2}$$

初始条件为：

$$u_n(x,0)=\chi_n u_0(x),\eta_n^0(x,s)=\int_0^s \chi_n u_0(x,-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{3.3}$$

边界条件为：

$$u_n(x,t)\big|_{\partial B_n}=0,\eta_n^t(x,s)\big|_{\partial B_n\times\mathbb{R}^+}=0. \tag{3.4}$$

其中 $\chi_n(x)$ 为一个光滑函数，其满足

$$\chi_n=\begin{cases}1, & x\in B_{n-1},\\ 0, & x\notin B_n.\end{cases}$$

对上述方程的解 $z_n=(u_n,\eta_n^t)$ 我们给出如下引理。

引理 3.2：假设 $T>0, f\in C^1(\mathbb{R})$ 且满足条件(1.6)~(1.7)，核函数 μ 满足而 $g\in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$，则对于任意的 $t\in[0,T]$，有如下估计：

$$|u_n(t)|_2^2+\|\nabla\eta_n^t\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2+\int_0^T\left(\|u_n(s)\|_0^2+\|\nabla\eta_n^s\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2+|u_n(s)|_p^p\right)\mathrm{d}s\le\rho_1.$$

其中 ρ_1 仅依赖于 T，不依赖于 n。

证明：对(3.2)中的第一个方程乘以 u_n，并在 $\mathbb{R}^n$ 上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|u_n(t)|_2^2+\|\nabla\eta_n^t\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2\right)+\gamma_1\left(\|u_n\|_0^2+\|\nabla\eta_n^t\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2+|u_n|_p^p\right)\le\int_{\mathbb{R}^n}g_n u_n, \tag{3.5}$$

其中 $\gamma_1=\min\left\{1,\theta_1,\frac{\delta}{2},\lambda-\beta_1\right\}$。由 Hölder 不等式和 Young 不等式，有

$$\int_{\mathbb{R}^n}g_n u_n\le\frac{1}{2\gamma_1}\|g_n\|_{H^{-1}}^2+\frac{\gamma_1}{2}\|u_n\|_0^2\le\frac{1}{2\gamma_1}\|g\|_{H^{-1}}^2+\frac{\gamma_1}{2}\|u_n\|_0^2. \tag{3.6}$$

改写(3.5)式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|u_n(t)|_2^2+\|\nabla\eta_n^t\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2\right)+\gamma_1\left(\|u_n\|_0^2+\|\nabla\eta_n^t\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2+|u_n|_p^p\right)\le\frac{1}{\gamma_1}\|g\|_{H^{-1}}^2. \tag{3.7}$$

应用 Gronwall 引理有

$$|u_n(t)|_2^2+\|\nabla\eta_n^t\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2\le\left(|u_0|_2^2+\|\eta^0\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2\right)\mathrm{e}^{-\gamma_1 t}+\frac{1}{\gamma_1^2}\|g\|_{H^{-1}}^2. \tag{3.8}$$

并且对(3.7)两边在 $[0,T]$ 上对 t 积分，有

$$\int_0^T\left(|u_n(t)|_p^p+\|u_n(t)\|_0^2+\|\nabla\eta_n^t\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2\right)\mathrm{d}t\le\frac{1}{\gamma_1}\left(|u_0|_2^2+\|\eta^0\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2+\frac{T}{\gamma_1}\|g\|_{H^{-1}}^2\right), \tag{3.9}$$

令

$$\rho_1=2\max\left\{|u_0|_2^2+\|\eta^0\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2+\frac{1}{\gamma_1^2}\|g\|_{H^{-1}}^2,\frac{1}{\gamma_1}\left(|u_0|_2^2+\|\eta^0\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2+\frac{T}{\gamma_1}\|g\|_{H^{-1}}^2\right)\right\}.$$

结合(3.8)~(3.9)则结论成立，证毕！

引理 3.3 [4]：由假设(h_1)对任意的 $t\in[0,T]$，η_n^t 满足如下估计：

$$\|\eta_n^t\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2+\int_0^t\|\eta_n^s\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2\mathrm{d}s\le\rho_2.$$

其中 ρ_2 仅依赖于 T，但不依赖于 n。

引理 3.4：设引理 3.2 成立，对所有的 $t\in[0,T]$，则存在不依赖 n 的正常数 ρ_3，使得

$$\left|u_n(t)\right|_p^p \le \rho_4;\quad \int_0^T \left|u_{nt}(\tau)\right|_2^2 \mathrm{d}\tau \le \rho_3$$

成立。

证明：令 $F(s)=\int_0^s f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$，则由(1.6)，可得

$$\theta_3\left|u_n\right|^p - \beta_3 \le F(u_n) \le \theta_4\left|u_n\right|^p + \beta_4. \tag{3.10}$$

其中 $\theta_i,\beta_i\ (i=3,4)$ 均为正数。

对(3.2)中的第一个方程两边乘以 u_{nt}，并在 $\mathbb{R}^n$ 上积分，并结合 Hölder 不等式和 Young 不等式可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left|\nabla u_n\right|_2^2 + \lambda\left|u_n\right|_2^2 + 2\int_{\mathbb{R}^n} F(u_n)\right] + 2\left|u_{nt}\right|_2^2 \le 2\|g\|_{H^{-1}}^2 + 2m_0\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2 + \left\|u_{nt}\right\|_0^2 \tag{3.11}$$

令

$$E(t)=\left|\nabla u_n\right|_2^2 + \lambda\left|u_n\right|_2^2 + 2\int_{\mathbb{R}^n} F(u_n) \tag{3.12}$$

则有

$$\left|u_{nt}\right|_2^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) \le 2m_0\left\|\eta_n^t\right\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2 + 2\|g\|_{H^{-1}}^2 \tag{3.13}$$

由(3.10)式，可得

$$\theta_3\left|u_n(t)\right|_p^p - \beta_3\left|u_n(t)\right|_2^2 \le \int_{\mathbb{R}^n} F(u_n(t)) \le \theta_4\left|u_n(t)\right|_p^p + \beta_4\left|u_n(t)\right|_2^2. \tag{3.14}$$

对(3.13)式在 $[0,T]$ 上对 t 积分，有

$$\int_0^T \left|u_{nt}(\tau)\right|_2^2 \mathrm{d}\tau + E(T) \le E(0) + 2m_0\int_0^T \left\|\eta_n^\tau\right\|_{\mu,\mathcal{H}_0}^2 \mathrm{d}\tau + 2T\|g\|_{H^{-1}}^2. \tag{3.15}$$

根据(3.14)、引理 3.3 和引理 3.2 得

$$\int_0^T \left|u_{nt}(\tau)\right|_2^2 \mathrm{d}\tau + 2\theta_3\left|u_n(T)\right|_p^p \le 2m_0\rho_2 + (2\beta_3+\lambda+2\beta_4)\rho_1 + 2T\|g\|_{H^{-1}}^2 + \left\|\nabla u_0\right\|_2^2 + 2\theta_4\left\|u_0\right\|_p^p.$$

进一步有 n 个

$$\int_0^T \left|u_{nt}(\tau)\right|_2^2 \mathrm{d}\tau + 2\theta_3\left|u_n(t)\right|_p^p \le \rho_3. \tag{3.16}$$

其中

$$\rho_3 = 2m_0\rho_2 + (2\beta_3+\lambda+2\beta_4)\rho_1 + 2T\|g\|_{H^{-1}}^2 + \left\|\nabla u_0\right\|_2^2 + 2\theta_4\left\|u_0\right\|_p^p$$

则存在与 n 无关的正常数 $\rho_4=\dfrac{\rho_3}{2\theta_3}$，使得任意的 $t\in(0,T]$ 有

$$\left|u_n(t)\right|_p^p \le \rho_4;\quad \int_0^T \left|u_{nt}(\tau)\right|_2^2 \mathrm{d}\tau \le \rho_3.$$

证毕！

通过上述引理可以得如下关于方程(1.1)解的存在性定理：

定理 3.5: 假设条件(h_1)~(h_2)成立，则对任意的 $T>0$ 和 $z_0=(u_0,\eta^0)\in\mathcal{M}_1$。方程(1.1)存在弱解 $z=(u,\eta^t)$，且其满足 $u\in L^\infty(0,T;\mathcal{H}_1),\eta^t\in L_\mu^2(0,T;\mathcal{H}_1)$。

证明：在 B_n 外取 $(u_n,\eta_n^t)=0$，则可将 (u_n,η_n^t) 延拓到整个 $\mathbb{R}^n$ 上，结合引理 3.3 和引理 3.2，可得

u_n 在 $L^\infty\left(0,T;H^1\left(\mathbb{R}^n\right)\right)\cap L^2\left(0,T;\mathcal{H}_1\right)$ 一致有界；

η_n^t 在 $L^\infty\left(0,T;\mathcal{H}_1\right)\cap L^2\left(0,T;\mathcal{H}_1\right)$ 一致有界；

u_{nt} 在 $L^2\left(0,T;\mathcal{H}_1\right)$ 一致有界。

故存在 $\left\{z_n=\left(u_n,\eta_n^t\right)\right\}_{n=1}^\infty$ 的子列 $\left\{z_{n_k}=\left(u_{n_k},\eta_{n_k}^t\right)\right\}_{k=1}^\infty$，满足

$u_{n_k}\rightharpoonup u$ 在 $L^2\left(0,T;\mathcal{H}_1\right)$ 中弱收敛；

$\eta_{n_k}^t\rightharpoonup\eta^t$ 在 $L^2\left(0,T;\mathcal{H}_1\right)$ 中弱收敛；

$u_{n_kt}\rightharpoonup u_t$ 在 $L^2\left(0,T;\mathcal{H}_1\right)$ 中弱收敛。

此外，取 q 为 $p\left(p\geq 2\right)$ 互为对偶数，则结合(1.7)式，可以得到

$$\int_0^T\int_{B_n}\left|f\left(u_n\right)\right|^q\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq C\int_0^T\left(\left|u_n\left(t\right)\right|_p^p+\left|u\left(t\right)\right|_2^2\right)\mathrm{d}t \tag{3.17}$$

由引理 3.4，令 $\rho_0=C\left(\rho_3+\rho_1T\right)$，则

$$\int_0^T\int_{B_n}\left|f\left(u_n\right)\right|^q\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq\rho_0. \tag{3.18}$$

同理，当 $u_n\notin B_n$ 时，若 $u_n=0$，则将 u_n 延拓到整个 $\mathbb{R}^n$ 上，则有 $f\left(u_n\right)\rightharpoonup\chi$ 在 $L^q\left(\left(0,T\right]\times\mathbb{R}^n\right)$ 是弱收敛的。

而对任意给定的 $t\in\left(0,T\right]$，在 $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ 中 $u_n\rightharpoonup u$ 且 $\left|u_n\right|_2^2\in\left[0,\rho_1\right]$，则 $u_n\to u\left(n\to\infty\right)$ 在 $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ 中是强收敛的。因此 $u_n\to u\left(n\to\infty\right)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中是几乎处处收敛的，由 f 的连续性，有 $f\left(u_n\left(x,t\right)\right)\to f\left(u\left(x,t\right)\right)$ 于 $\left[0,T\right]\times\mathbb{R}^n$ 上几乎处处收敛，并且由 Lebesgue 逐项积分定理可知，存在 $\phi\in L^2\left(0,T;C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}f\left(u_n\right)\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}f\left(u\right)\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{3.19}$$

可得在 $L^q\left(\left[0,T\right]\times\mathbb{R}^n\right)\subset H^{-1}\left(\left[0,T\right]\times\mathbb{R}^n\right)$ 中 $f\left(u_n\right)\rightharpoonup f\left(u\right)$，且由弱极限的唯一性可知：$\chi=f\left(u\right)$。

因为 $g_n\left(x\right)\in H^{-1}\left(B_n\right)$，对于一切的 $x\in\mathbb{R}^n$，有 $g_n\to g\left(n\to\infty\right)$，则 $g\left(x\right)\in L^2\left(0,T;H^{-1}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$。

故当 $n\to\infty$ 时，对所有的 $\omega\left(x\right)\in L^2\left(0,T;C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)\right),\varphi\left(x,t\right)\in L_\mu^2\left(\mathbb{R}^+;C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ 有以下等式成立：

$$\begin{cases}\left\langle u_t,\omega\right\rangle+\left\langle\nabla\eta^t,\nabla\omega\right\rangle_{\mu,\mathcal{H}_0}+\left\langle\nabla u,\nabla\omega\right\rangle+\lambda\left\langle u,\omega\right\rangle+\left\langle f\left(u\right),\omega\right\rangle=\left\langle g,\omega\right\rangle,\\ \left\langle\eta_t^t+\eta_s^t,\varphi\right\rangle_{\mu,\mathcal{H}_0}=\left\langle u,\varphi\right\rangle_{\mu,\mathcal{H}_0},\end{cases}$$

证毕！

3.2. 解的唯一性和对初值的连续依赖性

定理 3.5：假设条件(h$_1$)~(h$_2$)成立，对任意的 $T>0$ 和 $z_0=\left(u_0,\eta^0\right)\in\mathcal{M}_1$。方程(1.1)在 $\mathcal{M}_1$ 中有唯一弱解 $z=\left(u,\eta^t\right)$，且其解 $z\left(t\right)=\left(u\left(t\right),\eta^t\right)$ 连续依赖于初值 $z_0=\left(u_0,\eta^0\right)$。

证明：设 $z_1=\left(u_1,\eta_1^t\right),z_2=\left(u_2,\eta_2^t\right)$ 是方程(1.1)的两个解，且初值 $z_{10},z_{20}\in\mathcal{M}_1,g\in H^{-1}\left(\mathbb{R}^n\right)$，令 $\omega=u_1-u_2,\zeta^t=\eta_1^t-\eta_2^t,z=z_1-z_2$，则 ω 满足下面的初边值问题

$$\begin{cases}\omega_t-\Delta\omega-\int_0^\infty\mu\left(s\right)\Delta\zeta^t\left(s\right)\mathrm{d}s+\lambda\omega+f\left(u_1\right)-f\left(u_2\right)=0\\ \zeta_t^t=-\zeta_s^t+\omega,\end{cases} \tag{3.20}$$

对方程(3.20)两端用 ω 作用，则得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[|\omega|_2^2+\left\|\zeta^t\right\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2\right]+\left[2\lambda|\omega|_2^2+\delta\left\|\zeta^t\right\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2\right]\le -2\left\langle f\left(u_1\right)-f\left(u_2\right),\omega\right\rangle. \tag{3.21}$$

对(3.21)式的右端项，我们有

$$-2\left\langle f\left(u_1\right)-f\left(u_2\right),\omega\right\rangle=-\int_{\mathbb{R}^n}\left(f\left(u_1\right)-f\left(u_2\right)\right)\omega\mathrm{d}x\le 2l|\omega|_2^2. \tag{3.22}$$

结合(3.21)式和(3.22)式，令 $\left\|z^t\right\|_{\mathcal{M}_1}^2=\|\omega\|_0^2+\left\|\zeta^t\right\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|z^t\right\|_{\mathcal{M}_1}^2\le 2l\left\|z^t\right\|_{\mathcal{M}_1}^2.$$

故由 Gronwall 引理可得

$$\left\|z_1-z_2\right\|_{\mathcal{M}_1}^2\le \mathrm{e}^{2lT}\left\|z_1\left(0\right)-z_2\left(0\right)\right\|_{\mathcal{M}_1}^2. \tag{3.23}$$

当且仅当 $z_1\left(0\right)=z_2\left(0\right)$ 时，(3.23)式中的等号成立。由此证得方程(1.1)解的唯一性和解对初值得连续依赖性，证毕！

致　谢

作者衷心感谢罗青青和张江卫两位同学的帮助，感谢湖南省研究生科研创新项目资助(编号：CX20200891)。

参考文献

[1] Chen, P.J. and Gurtin, M.E. (1968) On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **19**, 614-627. https://doi.org/10.1007/BF01594969

[2] Barenblatt, G., Zheltov, I. and Kochina, I. (1960) Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **24**, 1286-1303. https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6

[3] 张江卫, 罗双利, 李军. 带记忆项的反应扩散方程适定性问题[J]. 应用数学进展, 2018, 7(11): 1418-1428.

[4] 罗青青, 张江卫. 一类带记忆项拟线性发展方程的适定性[J]. 数学理论与应用, 2019(2): 42-50.

[5] 韩英豪, 程艳丽. 在 $\mathbb{R}^n$ 上的具有线性记忆项的非线性反应扩散方程的吸引子的 Hausdorff 维数和分形维数估计[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2011, 34(2): 129-136.

[6] 韩英豪, 贺亚静, 苏红. $\mathbb{R}^n$ 上具有记忆项的非自治反应扩散方程的拉回吸引子的存在性[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2012(4): 15-22.

[7] 汪璇, 韩英, 高承华. 记忆型非经典扩散方程在 $H^1\left(\mathbb{R}^n\right)\times L_\mu^2\left(\mathbb{R};H^1\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ 中的全局吸引子[J]. 数学物理学报, 2018, 38(6): 167-185.