Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(11), 3835-3840
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1011407

加权Bergman空间到Bloch空间的Volterra积分算子

王尔敏，许家家*

岭南师范学院数学与统计学院，广东 湛江

收稿日期：2021年10月15日；录用日期：2021年11月5日；发布日期：2021年11月17日

摘 要

本论文主要讨论从 Békollé 权诱导的 Bergman 空间 A^p_ω 到 Bloch 空间 $\mathcal{B}$ 的Volterra 积分算子的有界性和紧性刻画。

关键词

加权Bergman空间，Bloch空间，Volterra积分算子

Volterra Type Operators from Weighted Bergman Space to the Bloch Space

Ermin Wang, Jiajia Xu*

School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang Guangdong

Received: Oct. 15^{th}, 2021; accepted: Nov. 5^{th}, 2021; published: Nov. 17^{th}, 2021

Abstract

We consider the boundedness and compactness of Volterra type operators from the

∗ 通讯作者。

文章引用: 王尔敏, 许家家. 加权Bergman空间到Bloch空间的Volterra积分算子[J]. 应用数学进展, 2021, 10(11): 3835-3840. DOI: 10.12677/aam.2021.1011407

weighted Bergman spaces induced by Békollé functions to the Bloch Space.

Keywords

Weighted Bergman Spaces, Bloch Space, Volterra Type Operators

1. 引言

设 $\mathbb{D}$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的单位圆盘, $H(\mathbb{D})$ 是 $\mathbb{D}$ 上解析函数的全体. 我们用 dA 表示 $\mathbb{D}$ 上的标准面积测度. 给定 $\mathbb{D}$ 上非负可积函数 ω, 当 $0 < p < \infty$ 时, 加权 Bergman 空间 A^p_ω 定义为:

$$A^p_\omega = \{f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|^p_{L^p_\omega} := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \omega(z) dA(z) < \infty\}.$$

本文中考虑的权 ω 是所谓的 Békollé 权. 设 $\eta > -1$, 令 $dA_\eta = (\eta+1)(1-|z|^2)^\eta dA$. 当 $p_0 > 1, \eta > -1$ 时, 若对于任意的 Carleson 方块

$$S(\theta, h) = \{z = re^{i\alpha} : 1-h < r < 1, |\theta - \alpha| < \frac{h}{2}\}, \quad \theta \in [0, 2\pi], h \in (0,1),$$

均存在常数 $k > 0$, 使得

$$\left(\int_{S(\theta,h)} \omega dA_\eta\right)\left(\int_{S(\theta,h)} \omega^{-\frac{p_0'}{p_0}} dA_\eta\right)^{\frac{p_0}{p_0'}} \le k[A_\eta(S(\theta,h))]^{p_0},$$

其中 $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0'} = 1$, 则称函数 ω 属于集合 $B_{p_0}(\eta)$. 关于这类权函数可参考文献 [1–3].

记

$$K^\eta_z(w) = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^{\eta+2}}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

$K^\eta_z = K^\eta(\cdot, z)$ 称为 $A^2_{(1-|z|^2)^\eta}$ 的再生核函数.

Bloch 空间 $\mathcal{B}$ 是由 $\mathbb{D}$ 上满足条件

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

的解析函数 f 组成的集合.

设 $g\in H(\mathbb{D})$,定义 Volterra 积分算子 T_g 为

$$T_gf(z)=\int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta,\ \ f\in H(\mathbb{D}).$$

Pommerenke 在 [4] 中首先研究了积分算子 T_g 在 Hardy 空间 H^2 的有界性问题.在此之后,许多学者研究了其他不同解析函数空间上的 Volterra 积分算子. Li 在 [5] 中给出了从标准权 Bergman 空间到 Bloch 空间的 Volterra 积分算子的有界性和紧性问题.本文我们主要考虑由 Békollé 权诱导的Bergman空间 A^p_ω 到 Bloch 空间的 Volterra 积分算子的有界性和紧性问题.

在本文中, 我们用 $a\lesssim b$ 表示存在常数 $C>0$ 使得 $a\le Cb$, $a\asymp b$ 表示存在常数 $C>0$ 使得$C^{-1}a\le b\le Ca$.

2. 预备知识

首先, 我们给出下面的结论, 见文献 [2].

引理2.1 设 $p_0>1, p>0, 0<\alpha<1$, $\omega\in B_{p_0}(\eta)$. 则对任意的 $f\in A^p_\omega$, 有

$$|f(z)|\le\frac{C}{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}\|f\|_{A^p_\omega}.$$

其中 C 是与 $z\in\mathbb{D}$ 无关的常数.

对于再生核 K^γ_z, 我们有下面的 L^p_ω 范数估计,见文献 [3].

引理2.2 令 $p>0, p_0>1, \alpha\in(0,1), \eta>-1$ 且 $p_0\ge p$. 假设 $\frac{\omega}{(1-|z|^2)^\eta}\in B_{p_0}(\eta)$, $\gamma\ge(\eta+2)p_0/p-2$.则

$$K(z,z)\asymp\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{-1};\|K^\gamma_z\|_{L^p_\omega}\asymp\frac{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}{(1-|z|)^{\gamma+2}}.$$

下面的结论给出了 $T_g: A^p_\omega\to\mathcal{B}$ 是紧算子的一个充要条件, 该引理的证明与文献 [6] 中引理 2.4 类似, 我们在此省略证明过程.

引理2.3 设 $T_g: A^p_\omega\to\mathcal{B}$是有界算子,则 $T_g: A^p_\omega\to\mathcal{B}$ 是紧算子的充要条件是对任意有界序列 $\{f_n\}\subset A^p_\omega$ 且在 $\mathbb{D}$ 的任意紧子集一致收敛于 0, 则

$$\lim_{n\to\infty}\|T_gf_n\|_{\mathcal{B}}=0.$$

3. A^p_ω 到 $\mathcal{B}$ 上的 Volterra 积分算子

结合以上引理, 我们现在研究 Volterra 积分算子 T_g 从 A^p_ω 到 $\mathcal{B}$ 上的有界性和紧性刻画, 得到如下定理.

定理3.1 假设 $p>0, p_0>1, \alpha\in(0,1), \eta>-1$, $g\in H(\mathbb{D})$, $\frac{\omega}{(1-|z|^2)^\eta}\in B_{p_0}(\eta)$, 则 $T_g: A^p_\omega\to\mathcal{B}$ 是有界算子当且仅当

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(z)|\frac{1}{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}<\infty.$$

证明 必要性: 假设 $T_g: A^p_\omega\to\mathcal{B}$ 是有界算子. 令

$$k_{p,z}(w)=\frac{K_z^{\gamma+1}(w)}{\|K_z^{\gamma+1}\|_{L^p_\omega}},\ z\in\mathbb{D},$$

其中 $\gamma\geq(\eta+2)p_0/p-2$. 显然, $\|k_{p,z}\|_{L^p_\omega}=1$, 故有

$$\|T_gk_{p,z}\|_{\mathcal{B}}\leq\|T_g\|_{A^p_\omega\to\mathcal{B}}\|k_{p,z}\|_{L^p_\omega}=\|T_g\|_{A^p_\omega\to\mathcal{B}}.$$

另一方面, 由引理 2.2, 我们有

$$|k_{p,z}(w)|=\frac{|K_z^{\gamma+1}(w)|}{\|K_z^{\gamma+1}\|_{L^p_\omega}}\gtrsim\frac{1}{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}.$$

综上,

$$(1-|z|^2)|g'(z)|\frac{1}{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}\lesssim\|T_gk_{p,z}\|_{\mathcal{B}}<\infty.$$

充分性: 假设

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(z)|\frac{1}{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}<\infty.$$

则对任意的 $f\in A^p_\omega$, 由引理 2.1,有

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|g'(z)||f(z)| &\lesssim (1-|z|^2)|g'(z)|\frac{1}{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}\|f\|_{A^p_\omega}\\ &\lesssim (1-|z|^2)|g'(z)|\frac{1}{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}.\end{aligned}$$

所以, $\|T_gf\|_{\mathcal{B}}<\infty$. 故 $T_g: A^p_\omega\to\mathcal{B}$ 是有界算子.

定理3.2 假设 $p>0, p_0>1, \alpha\in(0,1), \eta>-1$, $g\in H(\mathbb{D})$, $\frac{\omega}{(1-|z|^2)^\eta}\in B_{p_0}(\eta)$,则 $T_g: A^p_\omega\to\mathcal{B}$ 是紧算子当且仅当

$$\lim_{|z|\to1}(1-|z|)|g'(z)|\frac{1}{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}=0.$$

证明 必要性: 假设 $T_g: A^p_\omega\to\mathcal{B}$是紧算子. 由于当 $|z|\to1$时, $k_{p,z}$ 在 $\mathbb{D}$ 的任意紧子集上一致

收敛于 0. 从而

$$
\begin{aligned}
0=\lim_{|z|\to 1}\|T_g k_{p,z}\|_{\mathcal{B}} &\gtrsim \lim_{|z|\to 1}\sup_{w\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(w)||k_{p,z}(w)| \\
&\gtrsim \lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)|g'(z)||k_{p,z}(z)| \\
&\gtrsim \lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)|g'(z)|\frac{1}{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}.
\end{aligned}
$$

从而,

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|)|g'(z)|\frac{1}{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}=0.$$

充分性: 假设 $\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)|g'(z)|\frac{1}{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}=0$, 则对任意的 $\epsilon>0$, 存在 $r_0\in(0,1)$, 使得 $|z|>r_0$ 时,有

$$(1-|z|^2)|g'(z)|\frac{1}{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}<\epsilon.$$

又当 $|z|\le r_0$ 时,有

$$(1-|z|^2)|g'(z)|\frac{1}{\left(\int_{D_{z,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}<\infty.$$

从而由定理 3.1 知, $T_g: A^p_\omega\to B$ 是有界算子. 并且我们知道,存在正数 M,使得

$$M:=\sup_{|w|\le r_0}(1-|w|^2)|g'(w)|<\infty.$$

设 $\{f_n\}$为A^p_ω 中的有界序列,且在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于 0. 则

$$
\begin{aligned}
\|T_g f_n\|_{\mathcal{B}} &= \sup_{w\in\mathbb{D}}(1-|w|^2)|g'(w)||f_n(w)| \\
&= \sup_{|w|\le r_0}(1-|w|^2)|g'(w)||f_n(w)|+\sup_{|w|>r_0}(1-|w|^2)|g'(w)||f_n(w)| \\
&\lesssim M|f_n(w)|+\sup_{|w|>r_0}(1-|w|^2)|g'(w)|\frac{1}{\left(\int_{D_{w,\alpha}}\omega dA\right)^{1/p}}\|f_n\|_{L^p_\omega} \\
&\lesssim M|f_n(w)|+\epsilon
\end{aligned}
$$

因此,当 $n\to\infty$ 时, $\|T_g f_n\|_{\mathcal{B}}\to 0$. 所以 $T_g: A^p_\omega\to\mathcal{B}$ 是有紧算子.

基金项目

本论文受国家自然科学基金项目(12001258)和岭南师范学院科研项目(ZL1925)资助。

参考文献

[1] Békollé, D. (1981/1982) Inégalité à poids pour le projecteur der Bergman dans la boule unite de $\mathbb{C}^n$. *Studia Mathematica*, **71**, 305-323. https://doi.org/10.4064/sm-71-3-305-323

[2] Constantin, O. (2007) Discretizations of Integral Operators and Atomic Decompositions in Vector-Valued Weighted Bergman Spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, **59**, 523-554. https://doi.org/10.1007/s00020-007-1536-7

[3] Constantin, O. (2010) Carleson Embeddings and Some Classes of Operators on Weighted Bergman Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **365**, 668-682. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.11.035

[4] Pommerenke, C. (1977) Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **52**, 591-602. https://doi.org/10.1007/BF02567392

[5] Li, S. (2008) Volterra Composition Operators between Weighted Bergman Spaces and Bloch Type Spaces. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **45**, 229-248. https://doi.org/10.4134/JKMS.2008.45.1.229

[6] 施业成, 王尔敏. 从指数权 Bergman 空间 A^p_ψ 到 Bloch 空间的 Volterra 积分算子[J]. 理论数学, 2021(11): 1643-1648. https://doi.org/10.12677/PM.2021.119182