Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(11), 3912-3922**
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1011416

Hans汉斯

次黎曼流形上的次椭圆调和映射梯度估计

邹文婷

浙江师范大学，数学与计算机科学学院，浙江 金华

收稿日期：2021年10月19日；录用日期：2021年11月9日；发布日期：2021年11月22日

摘 要

如果黎曼叶状结构的水平分布满足括号生成条件，则它是一类特殊的次黎曼流形。本文主要研究此类黎曼叶状结构上次椭圆调和映射的梯度估计及Liouville 定理。

关键词

次黎曼流形，次椭圆调和映射，黎曼叶状结构，梯度估计，Liouville 定理

Gradient Estimate of Subelliptic Harmonic Maps on Sub-Riemannnian Manifolds

Wenting Zou

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Oct. 19^{th}, 2021; accepted: Nov. 9^{th}, 2021; published: Nov. 22^{nd}, 2021

Abstract

The Riemannian foliation is a special class of sub-Riemannian manifolds, if its hori-

文章引用: 邹文婷. 次黎曼流形上的次椭圆调和映射梯度估计[J]. 应用数学进展, 2021, 10(11): 3912-3922.
DOI: 10.12677/aam.2021.1011416

zontal distribution satisfies the bracket generating condition. In this paper, we study the gradient estimation of the subelliptic harmonic maps and the Liouville-type theorems.

Keywords

Sub-Riemannian Manifolds, Subelliptic Harmonic Maps, Riemannian Foliation, Gradient Estimate, Liouville's Theorem

1. 引言

由经典的Liouville 型定理可知, R^n 上的有界调和函数是常值函数. 1975 年, Yau [1] 将其推广到黎曼几何中, 说明了具有非负Ricci 曲率的完备黎曼流形上正调和函数的梯度估计. 1980 年, S.Y.Cheng [2] 推广了Yau 的结果到调和映射情形, 证明了从Ricci 曲率有下界的完备流形到Cartan-Hadamard 流形的调和映射的梯度估计. 1982年, H.I.Choi [3] 在此基础上进一步探讨了目标流形为具有非负上界截面曲率的黎曼流形的正则球的情形, 并得到相关的Liouville 定理.

定理 1 设$(M^{m+d}, H, g_H; g)$ 是一个非紧完备的全测地黎曼叶状结构, 在$B_{2R}(x_0) \subset M$ 上,

$$Ric_H \geq -k \text{ 且 } \mid T \mid, \mid div_H T \mid \leq k_1 \tag{1.1}$$

其中$k, k_1 \geq 0$. 设(N, h) 是黎曼流形, 其截面曲率具有非负上界κ, $\kappa \geq 0$. 设$B_D(p_0)$ 是以p_0 为中心, D 为半径的正则球. 若$f : B_{2R}(x_0) \subset M \to B_D(p_0) \subset N$ 是次椭圆调和映射, 则$\mid d_H f \mid^2$ 在$B_R(x_0)$ 上是一致有界的. 更精确地说,

$$\max_{B_R(x_0)} \mid d_H f \mid^2 \leq C_1 \left(k + \frac{1}{R}\right) \tag{1.2}$$

其中C_1 只依赖于k, k_1, κ, D.

推论 1 如果M 具有非负的水平$Ricci$ 曲率且它的挠率及其水平散度是有界的, 那么没有非平凡的从M 到正则球的次椭圆调和映射.

2. 预备知识

在这一节中，我们将简要介绍次黎曼流形和次椭圆调和映射的基本概念和性质.

设M 是$m+d$ 维C^{∞} 流形, H 是切丛TM 的子丛, 且$\dim H=m$. 子丛H 称为水平分布. 如果M 上的任意一点p 的切空间T_pM 可以被H 中切向量场连同由它们李括号生成的切向量场线性张成, 则称H 满足括号生成条件. 若进一步g_H 是定义在H 上的度量, 则(H,g_H) 称为M 上的次黎曼结构. 被赋予次黎曼结构(H,g_H) 的流形M 称为次黎曼流形, 记为(M,H,g_H). 如果M 上黎曼度量g 在H上的限制正好是g_H, 那么称g 为g_H 的黎曼延拓(参见 [4]). 记∇^R 是g 的黎曼联络. 此后, 我们在次黎曼流形(M,H,g_H) 上固定一个黎曼延拓g, 记为$(M,H,g_H;g)$. 此时, 切丛TM 具有正交分解

$$TM=H\oplus V \tag{2.1}$$

其中V 称为垂直分布.

在次黎曼流形上存在如下与次黎曼结构相容的典范联络, 称为广义Bott 联络, 记为∇,

$$\nabla_XY=\begin{cases}\pi_H(\nabla^R_XY), & X,Y\in\Gamma(H)\\ \pi_H([X,Y]), & X\in\Gamma(V),Y\in\Gamma(H)\\ \pi_V([X,Y]), & X\in\Gamma(H),Y\in\Gamma(V)\\ \pi_V(\nabla^R_XY]), & X,Y\in\Gamma(V)\end{cases} \tag{2.2}$$

虽然∇ 保持了水平分布和垂直分布, 但∇ 一般不保持黎曼度量g. 广义Bott 联络的挠率T 可由如下公式表达(参见 [5]):

$$T\left(X,Y\right)=-\pi_V\left(\left[\pi_H\left(X\right),\pi_H\left(Y\right)\right]\right)-\pi_H\left(\left[\pi_V\left(X\right),\pi_V\left(Y\right)\right]\right) \tag{2.3}$$

设$\{e_i\}_{i=1}^m$ 和$\{e_\alpha\}_{\alpha=m+1}^{m+d}$ 分别为分布H 和V 的局部正交标架场, 我们约定:

$$1\leq i,j,k,...,\leq m;\quad m+1\leq\alpha,\beta,\gamma,...,\leq m+d;\quad 1\leq A,B,C,...,\leq m+d \tag{2.4}$$

挠率T 水平散度定义为$div_HT\left(X\right)=\sum\limits_i\left(\nabla_{e_i}T\right)\left(X,e_i\right)$, 其中$X\in\Gamma\left(TM\right)$. 令垂直分布$V$ 的平均曲率向量场为:

$$\zeta=\pi_H\left(\sum_\alpha\nabla^R_{e_\alpha}e_\alpha\right) \tag{2.5}$$

例 1 对于黎曼叶状结构$(M,\mathscr{F},g)$, 若它的水平分布H 满足强括号生成条件，则(M,H,g_H) 是

次黎曼流形, 其中$g_H = g\mid_H$. 此时,

$$T(X,Y) = -\pi_V([\pi_H(X), \pi_H(Y)]) \tag{2.6}$$

进一步, 如果$\mathscr{F}$ 是全测地的, 则向量场$\zeta = 0$ 且$\nabla g = 0$ *[6]*. 我们约定本文中黎曼叶状结构的水平分布都满足强括号生成条件.

固定$p \in M$, 定义

$$\eta_p(v) = \sum_{1\le i<j\le m} \langle T(e_i, e_j), v\rangle^2 = \sum_{1\le i<j\le m} \langle [e_i, e_j], v\rangle^2 \tag{2.7}$$

其中$v \in V_p$. 令

$$\eta_{min}(p) = \min_{0\neq v\in V_p} \frac{\eta_p(v)}{\mid v\mid^2}$$

文献 [5] 中引理5.6 说明了H 是强括号生成的当且仅当η_{min} 恒为正.

设$(M,H,g_H;g)$ 是次黎曼流形, (N,h) 是黎曼流形. 记$\tilde{\nabla}$ 是(N,h) 的黎曼联络. 从M 到N 的光滑映射f 的水平能量定义为:

$$E_H(f) = \frac{1}{2}\int_M \mid d_H f\mid^2 dvol_g \tag{2.8}$$

其中$d_H f$ 是微分df 在H 的限制, $dvol_g$ 是次黎曼流形M上由度量g 诱导的体积元. 它的Euler-Lagrange 方程是

$$\tau_H(f) = trace(\nabla df\mid_{H\times H}) - df(\zeta) = 0 \tag{2.9}$$

定义 1 *(参见 [5])光滑映射$f: M\to N$ 称为次椭圆调和映射, 如果$\tau_H(f) = 0$.*

记f_i^I 和f_{ik}^I 分别是df 和∇df 的分量, $\zeta_{,A}^k$ 和$T_{ij,k}^\alpha$ 分别是ζ 和挠率T 的协变导数. 文献 [5]推导了如下共变导数的交换关系及Bochner 公式.

引理 1 *设$f: M\to N$ 是光滑映射, 则其共变导数的交换关系为:*

$$f_{ij}^I - f_{ji}^I = f_\alpha^I T_{ij}^\alpha \tag{2.10}$$

$$f_{\alpha\beta}^I - f_{\beta\alpha}^I = f_k^I T_{\alpha\beta}^k \tag{2.11}$$

$$f_{i\alpha}^I - f_{\alpha i}^I = 0 \tag{2.12}$$

且$Bochner$ 公式为:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta_H\left|d_H f\right|^2=&\left(f_{ik}^I\right)^2+f_i^I\tau_{H,i}^I+f_i^I\zeta_{,i}^k f_k^I+\zeta^k f_i^I f_\alpha^I T_{ki}^\alpha+f_i^I f_j^I R_{kik}^j+2f_i^I f_{\alpha k}^I T_{ik}^\alpha\\
&-f_i^I f_k^K\widetilde{R}_{KJL}^I f_i^J f_k^L+f_i^I f_\alpha^I T_{ik,k}^\alpha
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

$$
\frac{1}{2}\Delta_H\left|d_V f\right|^2=\left(f_{\alpha k}^I\right)^2+f_\alpha^I\tau_{H,\alpha}^I+f_\alpha^I\zeta_{,\alpha}^k f_k^I+f_\alpha^I f_j^I R_{k\alpha k}^j-f_\alpha^I f_k^K\widetilde{R}_{KJL}^I f_\alpha^J f_k^L
\tag{2.14}
$$

引理 2 设$(M,\mathscr{F},g)$ 是全测地黎曼叶状结构, 在$B_{2R}(x_0)\subset M$ 上,

$$
Ric_H\geq -k \text{ 且 } |T|,\ |div_H T|\leq k_1 \tag{2.15}
$$

其中$k,k_1\geq 0$. 设(N,h) 是黎曼流形且截面曲率满足

$$
K^N\leq\kappa \tag{2.16}
$$

其中$\kappa\geq 0$. 若$f:M\to N$ 是次椭圆调和映射, 则有

$$
\begin{aligned}
\Delta_H\left|d_H f\right|^2\geq&(2-2\varepsilon_1)\left|\nabla_H d_H f\right|^2-\left(2k+\frac{C_2}{\epsilon_2}+\frac{C_2^2}{\varepsilon_1\eta_{\min}}\right)\left|d_H f\right|^2\\
&+\frac{1}{2}\varepsilon_1\eta_{\min}\left|d_V f\right|^2-2C_2\varepsilon_2\left|\nabla_H d_V f\right|^2-2\kappa\left|d_H f\right|^4
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

$$
\Delta_H\left|d_V f\right|^2\geq 2\left|\nabla_H d_V f\right|^2-2\kappa\left|d_H f\right|^2\left|d_V f\right|^2 \tag{2.18}
$$

其中ε_1, ε_2 是正数, C_2 是仅依赖于k_1 的常数. 特别地, 当$k_1=0$ 时, $C_2=0$.

证明 由于$(M,\mathscr{F},g)$ 是全测地黎曼叶状结构, 则平均曲率向量场$\zeta=0$ 且$R_{k\alpha k}^j=0$. 利用目标流形N 的曲率条件(2.16), 结论(2.18)可由(2.14)直接推导. 利用共变导数交换关系(2.10) 有如下计算:

$$
\begin{aligned}
\left(f_{ik}^I\right)^2\geq&\sum_I\sum_{i<j}\left(\left(f_{ij}^I\right)^2+\left(f_{ji}^I\right)^2\right)\\
=&\frac{1}{2}\sum_I\sum_{i<j}\left(\left(f_{ij}^I+f_{ji}^I\right)^2+\left(f_{ij}^I-f_{ji}^I\right)^2\right)\\
\geq&\frac{1}{2}\sum_I\sum_\alpha\sum_{i<j}\left(f_\alpha^I\right)^2\left(T_{ij}^\alpha\right)^2\\
=&\frac{1}{2}\sum_I\sum_\alpha\left(f_\alpha^I\right)^2\eta\left(e_\alpha\right)\\
\geq&\frac{1}{2}\eta_{min}\mid d_V f\mid^2
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

将上式(2.19) 代入(2.13), 并对$f_i^I f_{\alpha k}^I T_{ik}^\alpha$ 和$f_i^I f_\alpha^I T_{ik,k}^\alpha$ 利用$Schwarz$ 不等式, 则可得(2.17).

设(N,h) 是具有截面曲率$K^N \le \kappa$, $(\kappa \ge 0)$ 的黎曼流形, ρ 是N 上到固定一点y_0 的距离函数. 令

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1-cos(\sqrt{\kappa}t)}{\kappa}, & \kappa > 0 \\ \frac{t^2}{2}, & \kappa = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

和

$$\psi(q) = \phi \circ \rho(q) \tag{2.21}$$

由黎曼几何中的Hessian 比较定理可知

$$Hess\psi \ge cos(\sqrt{\kappa}\rho) \cdot h \tag{2.22}$$

引理 3 *(参见 [7])* 若$0 < D < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$, 则存在$\nu \in [1,2)$, $b > \phi(D)$ 和$\delta > 0$ 仅依赖于D , 使得

$$\nu \frac{\cos(\sqrt{\kappa}t)}{b - \phi(t)} - 2\kappa \ge \delta, \quad \forall t \in [0, D] \tag{2.23}$$

特别地, 如果f 是从全测地黎曼叶状结构M 到截面曲率有非负上界κ 的黎曼流形N 的正则球$B_D(y_0)$ 上的次椭圆调和映射. 那么

$$\nu \frac{\Delta_H(\psi \circ f)}{b - \psi \circ f} - 2\kappa \mid d_H f \mid^2 \ge \delta \mid d_H f \mid^2 \tag{2.24}$$

3. 水平梯度估计

在本节开始，我们先给出一个特殊函数的定义:

定义 2 如果M 上存在一个光滑函数$r : M \to [0, +\infty)$ 是仿紧的, 且存在常数C_3, 使得

$$\mid \nabla_H r \mid \le C_3, \quad \Delta_H r \ge -C_3 \left(1 + \frac{1}{r}\right) \tag{3.1}$$

则称r 满足比较定理性质.

注 1 若M 是$Ricci$ 曲率有下界的黎曼流形, 则它的距离函数满足(3.1).

设$(M^{m+d}, H, g_H; g)$ 是一个非紧完备的次黎曼流形, 在$B_{2R}(x_0) \subset M$ 上满足

$$Ric_H \ge -k \quad 且 \quad \mid T \mid, \mid div_H T \mid \le k_1 \tag{3.2}$$

其中k, $k_1 \geq 0$. 设r 是M 上满足比较定理性质的函数, 且函数$\varphi \in C_0^\infty([0,\infty))$, 使得

$$\varphi|_{[0,1]} = 1, \quad \varphi|_{[2,\infty]} = 0, \quad -C_4'|\varphi|^{\frac{1}{2}} \leq \varphi \leq 0 \tag{3.3}$$

其中C_4' 是正常数. 令$\chi(r) = \varphi(\frac{r}{R})$, 则

$$\frac{|\nabla_H \chi|^2}{\chi} \leq \frac{C_4}{R^2}, \quad 且 \quad \Delta_H \chi \geq -\frac{C_4}{R} \quad 在B_{2R} \backslash Cut\,(x_0)\,上成立 \tag{3.4}$$

其中$C_4 = C_4(m,k,k_1)$.

为了估计$|\ d_H f\ |^2$, 考虑辅助函数

$$\Phi_{\mu\chi} = |\ d_H f\ |^2 + \mu\chi\ |\ d_V f\ |^2 \tag{3.5}$$

其中μ 为待定的正数.

引理 4 在$x \in B_{2R}\,(x_0)$ 处, 若$\chi(x) \neq 0$, 则有

$$\begin{aligned}\Delta_H \Phi_{\mu\chi} \geq & \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1\right) \frac{|\nabla_H \Phi_{\mu\chi}|^2}{\Phi_{\mu\chi}} - 2\kappa\,|d_H f|^2\,\Phi_{\mu\chi} \\ & + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1 \eta_{\min} + \mu \Delta_H \chi - 3\varepsilon_1^{-1} \mu \chi^{-1}\,|\nabla_H \chi|^2\right) |d_V f|^2 \\ & - \left(2k + \frac{C_2}{\epsilon_2} + \frac{C_2^2}{\varepsilon_1 \eta_{\min}}\right) |d_H f|^2\end{aligned} \tag{3.6}$$

证明 以下计算都在x 点处进行, 令$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 \mu \chi}{C_2}$, 由(2.17) 和(2.18) 得,

$$\begin{aligned}\Delta_H \Phi_{\mu\chi} =& \Delta_H \left(|d_H f|^2 + \mu\chi\,|d_V f|^2\right) \\ \geq & (2 - 2\varepsilon_1)\,|\nabla_H d_H f|^2 - \left(2k + \frac{C_2}{\epsilon_2} + \frac{C_2^2}{\varepsilon_1 \eta_{\min}}\right) |d_H f|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 \eta_{\min}\,|d_V f|^2 \\ & - 2C_2 \varepsilon_2\,|\nabla_H d_V f|^2 - 2\kappa\,|d_H f|^4 + \mu \Delta_H \chi\,|d_V f|^2 + 4\mu\,\langle \nabla_H \chi \otimes d_V f, \nabla_H d_V f \rangle \\ & + 2\mu\chi\,|\nabla_H d_V f|^2 - 2\kappa\mu\chi\,|d_H f|^2\,|d_V f|^2 \\ =& (2 - 2\varepsilon_1)\left(|\nabla_H d_H f|^2 + \mu\chi\,|\nabla_H d_V f|^2\right) + 4\mu\,\langle \nabla_H \chi \otimes d_V f, \nabla_H d_V f \rangle - 2\kappa \Phi_{\mu\chi}\,|d_H f|^2 \\ & + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1 \eta_{\min} + \mu \Delta_H \chi\right) |d_V f|^2 - \left(2k + \frac{C_2}{\epsilon_2} + \frac{C_2^2}{\varepsilon_1 \eta_{\min}}\right) |d_H f|^2\end{aligned} \tag{3.7}$$

由$Cauchy$ 不等式，则有下列估计:

$$
\begin{aligned}
\left|\nabla_H \Phi_{\mu\chi}\right|^2 =& \left|\nabla_H\left(\left|d_H f\right|^2+\mu\chi\left|d_V f\right|^2\right)\right|^2 \\
\leq & 4\left|d_H f+\sqrt{\mu\chi} d_V f\right|^2 \cdot\left|\nabla_H d_H f+\sqrt{\mu\chi} \nabla_H d_V f+\sqrt{\mu} \frac{\nabla_H \chi}{2\sqrt{\chi}} \otimes d_V f\right|^2 \\
= & 4\Phi_{\mu\chi}\left(\left|\nabla_H d_H f\right|^2+\mu\chi\left|\nabla_H d_V f\right|^2+\frac{\mu\left|\nabla_H \chi\right|^2}{4\chi}\left|d_V f\right|^2+\mu\left\langle\nabla_H d_V f, \nabla_H \chi \otimes d_V f\right\rangle\right)
\end{aligned}
$$

从而，

$$
\begin{aligned}
& (2-2\varepsilon_1)\left(\left|\nabla_H d_H f\right|^2+\mu\chi\left|\nabla_H d_V f\right|^2\right)+4\mu\left\langle\nabla_H \chi \otimes d_V f, \nabla_H d_V f\right\rangle \\
= & (2-4\varepsilon_1)\left(\left|\nabla_H d_H f\right|^2+\mu\chi\left|\nabla_H d_V f\right|^2\right)+2\varepsilon_1\mu\chi\left|\nabla_H d_V f\right|^2+4\mu\left\langle\nabla_H \chi \otimes d_V f, \nabla_H d_V f\right\rangle \\
\geq & \left(\frac{1}{2}-\varepsilon_1\right) \frac{\left|\nabla_H \Phi_{\mu\chi}\right|^2}{\Phi_{\mu\chi}}-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon_1\right) \frac{\mu\left|\nabla_H \chi\right|^2}{\chi}\left|d_V f\right|^2 \\
& +(2+4\varepsilon_1)\mu\left\langle\nabla_H d_V f, \nabla_H \chi \otimes d_V f\right\rangle+2\varepsilon_1\mu\chi\left|\nabla_H d_V f\right|^2 \\
\geq & \left(\frac{1}{2}-\varepsilon_1\right) \frac{\left|\nabla_H \Phi_{\mu\chi}\right|^2}{\Phi_{\mu\chi}}-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon_1\right)\mu \frac{\left|\nabla_H \chi\right|^2}{\chi}\left|d_V f\right|^2-\frac{(2+4\varepsilon_1)^2}{2}\mu\frac{\left|\nabla_H \chi\right|^2}{4\chi}\left|d_V f\right|^2 \\
\geq & \left(\frac{1}{2}-\varepsilon_1\right) \frac{\left|\nabla_H \Phi_{\mu\chi}\right|^2}{\Phi_{\mu\chi}}-3\varepsilon_1^{-1}\mu \frac{\left|\nabla_H \chi\right|^2}{\chi}\left|d_V f\right|^2
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

将(3.8) 代入(3.7) 即可完成证明.

接下来是定理1的证明:

证明 根据引理3，可取适当的$\nu \in [1,2)$，$b > \phi(D)$ 满足(2.23)． 令$F_{\mu\chi} = \frac{\Phi_{\mu\chi}}{(b-\psi\circ f)^\nu}$． 其中$\psi$由(2.21)定义. 设$x$ 是$B_{2R}(x_0)$ 上$\chi F_{\mu\chi}$ 一个非零的极大值点，则在x 点处，有

$$
0=\nabla_H \ln(\chi F_{\mu\chi})=\frac{\nabla_H \chi}{\chi}+\frac{\nabla_H \Phi_{\mu\chi}}{\Phi_{\mu\chi}}+\nu\frac{\nabla_H(\psi\circ f)}{b-\psi\circ f} \tag{3.9}
$$

$$
\begin{aligned}
0 \geq & \Delta_H \ln(\chi F_{\mu\chi})=\frac{\Delta_H \chi}{\chi}-\frac{\left|\nabla_H \chi\right|^2}{\chi^2}+\frac{\Delta_H \Phi_{\mu\chi}}{\Phi_{\mu\chi}}-\frac{\left|\nabla_H \Phi_{\mu\chi}\right|^2}{\Phi_{\mu\chi}^2} \\
& +\nu \frac{\Delta_H(\psi\circ f)}{b-\psi\circ f}+\nu \frac{\left|\nabla_H(\psi\circ f)\right|^2}{(b-\psi\circ f)^2}
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

利用引理4, (3.10)在x 点处可化为

$$\begin{aligned}0 \geq & \frac{\Delta_H \chi}{\chi}-\frac{\mid \nabla_H \chi \mid^2}{\chi^2}-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1\right) \frac{\mid \nabla_H \Phi_{\mu \chi} \mid^2}{\Phi_{\mu \chi}^2}-2 \kappa \mid d_H f \mid^2 \\ & +\nu \frac{\Delta_H(\psi \circ f)}{b-\psi \circ f}+\nu \frac{\left|\nabla_H(\psi \circ f)\right|^2}{(b-\psi \circ f)^2} \\ & +\left(\frac{1}{2} \varepsilon_1 \eta_{\min }+\mu \Delta_H \chi-3 \varepsilon_1^{-1} \mu \chi^{-1}\left|\nabla_H \chi\right|^2\right) \frac{\left|d_V f\right|^2}{\Phi_{\mu \chi}} \\ & -\left(2 k+\frac{C_2}{\epsilon_2}+\frac{C_2^2}{\varepsilon_1 \eta_{\min }}\right) \frac{\left|d_H f\right|^2}{\Phi_{\mu \chi}}\end{aligned}$$

取$\varepsilon_1=\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{4}$, 由(3.9) 式得

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1\right) \frac{\mid \nabla_H \Phi_{\mu \chi} \mid^2}{\Phi_{\mu \chi}^2}=-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1\right)\left(-\frac{\nabla_H \chi}{\chi}-\nu \frac{\nabla_H(\psi \circ f)}{b-\psi \circ f}\right)^2 \\ \geq & -\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_3^{-1}\right) \frac{\mid \nabla_H \chi \mid^2}{\chi^2}-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_3\right) v^2 \frac{\mid \nabla_H(\psi \circ f) \mid^2}{(b-\psi \circ f)^2}\end{aligned}$$

令$\varepsilon_3=\frac{2-\nu}{2+\nu}>0$, 则$\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_3^{-1}\right)=\frac{2+\nu}{\nu(2-\nu)}$, $\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_3\right)\nu^2=\nu$. 于是

$$\begin{aligned}0 \geq & \frac{\Delta_H \chi}{\chi}-\left(1+\frac{2+\nu}{\nu(2-\nu)}\right) \frac{\mid \nabla_H \chi \mid^2}{\chi^2}+\nu \frac{\triangle_H(\psi \circ f)}{b-\psi \circ f}-2 \kappa \mid d_H f \mid^2 \\ & +\left(\frac{1}{2} \varepsilon_1 \eta_{min}+\mu \Delta_H \chi-3 \varepsilon_1^{-1} \mu \chi^{-1} \mid \nabla_H \chi \mid^2\right) \frac{\mid d_V f \mid^2}{\Phi_{\mu \chi}} \\ & -\left(2 k+\frac{C_2}{\epsilon_2}+\frac{C_2^2}{\varepsilon_1 \eta_{\min }}\right) \frac{\mid d_H f \mid^2}{\Phi_{\mu \chi}}\end{aligned}$$

由(3.4) 与引理3, 得

$$\begin{aligned}0 \geq & -\frac{C_4}{\chi R}-\left(1+\frac{2+\nu}{\nu(2-\nu)}\right) \frac{C_4}{\chi R^2}+\delta \mid d_H f \mid^2 \\ & +\left(\frac{1}{2} \varepsilon_1 \eta_{min}+\mu \Delta_H \chi-3 \varepsilon_1^{-1} \mu \frac{C_4}{R^2}\right) \frac{\mid d_V f \mid^2}{\Phi_{\mu \chi}} \\ & -\left(2 k+\frac{C_2}{\epsilon_2}+\frac{C_2^2}{\varepsilon_1 \eta_{\min }}\right) \frac{\mid d_H f \mid^2}{\Phi_{\mu \chi}} \\ \geq & -\frac{C_\nu}{\chi R}+\delta \mid d_H f \mid^2+\left(\frac{1}{2} \varepsilon_1 \eta_{min}-\frac{\mu C_\nu}{R}\right) \frac{\mid d_V f \mid^2}{\Phi_{\mu \chi}} \\ & -\left(2 k+\frac{C_2}{\epsilon_2}+\frac{C_2^2}{\varepsilon_1 \eta_{\min }}\right) \frac{\mid d_H f \mid^2}{\Phi_{\mu \chi}}\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中$C_\nu=C_\nu(\nu,C_4)$, $\delta>0$ 由引理3决定且仅依赖于D.
又由$\Phi_{\mu\chi}=\mid d_H f\mid^2+\mu\chi\mid d_V f\mid^2$, 得

$$\mid d_V f \mid^2=\mu^{-1}\chi^{-1}(\Phi_{\mu\chi}-\mid d_H f\mid^2)$$

所以(3.11) 可化为

$$
\begin{aligned}
0 \geq & \frac{-C_\nu}{\chi R} + \delta \mid d_H f \mid^2 + (\frac{1}{2}\varepsilon_1\eta_{min} - \frac{\mu C_\nu}{R})\mu^{-1}\chi^{-1} \\
& + (-\frac{1}{2}\mu^{-1}\chi^{-1}\varepsilon_1\eta_{min} + \frac{\chi^{-1}C_\nu}{R} - 2k - \frac{C_2}{\epsilon_2} - \frac{C_2^2}{\varepsilon_1\eta_{\min}})\frac{\mid d_H f \mid^2}{\Phi_{\mu\chi}} \\
\geq & \frac{1}{\chi}(\frac{1}{2}\varepsilon_1\mu^{-1}\eta_{min} - \frac{2C_\nu}{R}) \\
& + [\delta\chi\Phi_{\mu\chi} - \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1\mu^{-1}\eta_{min} + 2k + \frac{C_2^2}{\varepsilon_1\mu} + \frac{C_2^2}{\varepsilon_1\eta_{min}}\right)]\frac{\mid d_H f \mid^2}{\chi\Phi_{\mu\chi}}
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

为了使$\frac{1}{2}\varepsilon_1\mu^{-1}\eta_{min} - \frac{2C_\nu}{R}$ 非负，我们可以取$\varepsilon_1\mu^{-1} = \frac{4C_\nu}{\eta_{min}R}$, 既$\mu^{-1} = \frac{4C_\nu}{\varepsilon_1\eta_{min}R}$. 于是

$$
\begin{aligned}
\chi\Phi_{\mu\chi} \leq & \delta^{-1}\left(\frac{4C_\nu}{R} + 2k + \frac{C_2^2}{\varepsilon_1\mu} + \frac{C_2^2}{\varepsilon_1\eta_{min}}\right) \\
= & \delta^{-1}C_5
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

其中$C_5 = \frac{4C_\nu}{R} + 2k + \frac{C_2^2}{\varepsilon_1\mu} + \frac{C_2^2}{\varepsilon_1\eta_{min}}$. 因此

$$
\max_{B_{2R}(x_0)}\chi F_{\mu\chi} \leq \frac{\chi\Phi_{\mu\chi}}{(b-\psi\circ f)^\nu}(x) \leq \frac{C_5}{\delta(b-\phi(D))^\nu} \tag{3.14}
$$

由此得

$$
\max_{B_R(x_0)} \mid d_H f \mid^2 \leq b^\nu \max_{B_R(x_0)} F_{\mu\chi} \leq \frac{C_5 b^\nu}{\delta(b-\phi(D))^\nu} \tag{3.15}
$$

则

$$
\begin{aligned}
\max_{B_R(x_0)} \mid d_H f \mid^2 \leq & \frac{4C_\nu}{R} + 2k + \frac{C_2^2}{\varepsilon_1\mu} + \frac{C_2^2}{\varepsilon_1\eta_{min}} \\
= & C_1\left(k + \frac{1}{R}\right)
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

其中C_1 只依赖于k, k_1, κ, D. 从而完成定理1的证明.

参考文献

[1] Yau, S. (1975) Harmonic Functions on Complete Riemannian Manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **28**, 201-228. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280203

[2] Cheng, S.Y. (1980) Liouville Theorem for Harmonic Maps. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **36**, 147-151. https://doi.org/10.1090/pspum/036/573431

[3] Choi, H.I. (1982) On the Liouville Theorem for Harmonic Maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **85**, 91-94. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1982-0647905-3

[4] Strichartz, R.S. (1986) Sub-Riemannian Geometry. *Journal of Differential Geometry*, **24**, 221-263. https://doi.org/10.4310/jdg/1214440436

[5] Dong, Y. (2021) Eells-Sampson Type Theorems for Subelliptic Harmonic Maps from Sub-Riemannian Manifolds. *Journal of Geometric Analysis*, **31**, 3608-3655. https://doi.org/10.1007/s12220-020-00408-z

[6] Baudoin, F. (2016) Sub-Laplacians and Hypoelliptic Operators on Totally Geodesic Riemannian Foliations. *Geometry, Analysis and Dynamics on Sub-Riemannian Manifolds*, 259-321. https://doi.org/10.4171/162-1/3

[7] Chong, T., Dong, Y.X., Ren, Y.B., *et al.* (2020) Pseudo-Harmonic Maps from Complete Noncompact Pseudo-Hermitian Manifolds to Regular Balls. *Journal of Geometric Analysis*, **30**, 3512-3541. https://doi.org/10.1007/s12220-019-00206-2