Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(11), 4047-4055**
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1011430

基于图运算的局部反魔幻着色数的研究

刘丹丹[1*]，边　红[1†]，于海征[2]，魏丽娜[1]

[1]新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
[2]新疆大学数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2021年10月23日；录用日期：2021年11月13日；发布日期：2021年11月29日

摘　要

令 $G=(V(G),E(G))$ 是有 n 个顶点和 m 条边的简单连通图。一个双射 $f:E(G)\to\{1,2,\cdots,m\}$ 称为图 G 的一个局部反魔幻标号，如果对于图 G 中的任意两个相邻的顶点 u 和 v 满足 $\omega(u)\neq\omega(v)$，这里 $\omega(u)=\sum_{e\in E(u)}f(e)$，其中 $E(u)$ 是与点 u 相关联的边的集合。如果给图 G 中任意一个顶点 v 着颜色 $\omega(v)$，那么图 G 的任意一个局部反魔幻标号都会导出图 G 的一个正常点着色。图 G 的局部反魔幻着色数 $\chi_{la}(G)$ 是图 G 的局部反魔幻标号所导出的所有着色中的最少颜色数。本文主要研究经过一些图运算(如：友谊图加一条悬挂边 $F_n+\{e\}$ 和一些特殊图星图 $P_m(S_n)$ 和双星图 $P_m(S_{l,q})$ 的剖分图)之后图的局部反魔幻着色问题。

关键词

反魔幻标号，局部反魔幻标号，局部反魔幻着色数，剖分

Research on the Local Antimagic Chromatic Number Based on Graph Operations

Dandan Liu[1*], Hong Bian[1†], Haizheng Yu[2], Lina Wei[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
[2]College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

∗ 第一作者。
† 通讯作者。

文章引用: 刘丹丹, 边红, 于海征, 魏丽娜. 基于图运算的局部反魔幻着色数的研究[J]. 应用数学进展, 2021, 10(11): 4047-4055. DOI: 10.12677/aam.2021.1011430

Received: Oct. 23^{rd}, 2021; accepted: Nov. 13^{th}, 2021; published: Nov. 29^{th}, 2021

Abstract

Let $G = (V(G), E(G))$ be a simple connected graph with $|V(G)| = n$ and $|E(G)| = m$. A bijection $f : E(G) \to \{1, 2, \ldots, m\}$ is called local antimagic labeling if for any two adjacent vertices u and v, $\omega(u) \neq \omega(v)$, where $\omega(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$, and $E(u)$ is the set of edges incident to u. Thus any local antimagic labeling induces a proper vertex coloring of G, where the vertex u is assigned the color $\omega(u)$. The local antimagic chromatic number $\chi_{la}(G)$ is the minimum number of colors taken over all colorings induced by local antimagic labelings of G. In this paper, we study the exact values of the local antimagic chromatic numbers of some graphs based graph operation, such as $F_n + \{e\}$, where e is a pendant edge adding to F_n and the sub-divided graphs $P_m(S_n)$ and $P_m(S_{l,q})$ of some special graphs.

Keywords

Antimagic Labeling, Local Antimagic Labeling, Local Antimagic Chromatic Number, Sub-Divided

1. 引言

令 $G = (V(G), E(G))$ 是一个没有孤立点的有限简单无向图. 称一个双射 $f : E(G) \to \{1, 2, \cdots, |E(G)|\}$ 为图 G 的反魔幻标号, 如果 f 满足对于图 G 的任意两个顶点 u 和 v 都有 $\omega(u) \neq \omega(v)$, 其中 $\omega(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$, $E(u)$ 是与顶点 u 相关联的边的集合. 一个图 G 称为反魔幻的, 如果图 G 有一个反魔幻标号. 图的反魔幻标号的定义最早是由 Hartsfield 和 Ringel [1]在 1990 年首次提出的, 他们还提出"除了 K_2 以外的所有连通简单图都有一个反魔幻标号"的猜想, 但至今这个猜想尚未完全解决.

近几年, Arumugam 等人 [2]和 Bensmail 等人 [3]分别独立地提出了一个比反魔幻标号相对较弱的定义: 局部反魔幻标号, 并且也都提出"除了 K_2 以外的所有连通简单图都有一个局部反魔幻标

号”的猜想. 称一个双射$f : E(G) \to \{1, 2, \cdots, |E(G)|\}$是图$G$的一个局部反魔幻标号, 如果对于图$G$的任何两个相邻的顶点$u$和$v$都有$\omega(u) \neq \omega(v)$, 其中$\omega(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$, $E(u)$是与点u相关联的边的集合. 一个图G称为局部反魔幻的, 如果图G有一个局部反魔幻标号. 若对图G的点v着颜色$\omega(v)$, 显然图G的任一个局部反魔幻标号自然地导出图G的一个正常点着色. 同时Arumugam等人 [2]提出了局部反魔幻着色数的定义: 图G的局部反魔幻着色数是其局部反魔幻标号中所使用的最少颜色数, 记为$\chi_{la}(G)$, 他们还给出了路、圈、友谊图、轮图等一些特殊图类的局部反魔幻着色数的确切值.

Arumugam等人 [2]给出了路、图G与$\overline{k_2}$的交图、轮图($n \equiv 0 \pmod 4$)的局部反魔幻着色数的范围, 以及星图、友谊图、友谊图删去一条边、线图、圈图的局部反魔幻着色数的确切值. 在2018年, Lau [4]等人研究了与圈相关的联图的局部反魔幻着色数, 以及一个图删去或加上一条特定边的局部反魔幻着色数; 在文献 [5]中, 研究了一些带有割点的图的局部反魔幻着色数, 比如: 蝌蚪图等; 在文献 [6]中, 给出了完全二部图的局部反魔幻着色数; 同年Arumugam [7]等人给出了路、圈、完全图K_n与空图$\overline{K_m}$的点corona积的局部反魔幻着色数; Nazula [8]也在同年给出了单圈图的局部反魔幻着色数的刻画, 比如: 风筝图、圈有两条悬挂边. 在2020年, Dafik [9]等人给出了友谊图的剖分图的局部反魔幻着色数的确切值, 以及轮图、星图的剖分图的局部反魔幻着色数的范围.

基于Arumugam、Lau、Dafik等人研究的友谊图和星图在一些图运算下局部反魔幻着色数的结果, 本文研究了友谊图加一条悬挂边和星图、双星图的剖分图的局部反魔幻着色数.

2. 主要结果

一个友谊图是任意两个顶点都恰好有一个公共邻点的简单图, 记为F_n, 其中n指的是F_n中三角形的个数. 令友谊图F_n的点集为$V(F_n) = \{u_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\}$, 边集为$E(F_n) = \{u_iv_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{xu_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{xv_i : 1 \leq i \leq n\}$. 假设$e$是友谊图$F_n$的任意一条边, 那么$F_n - \{e\}$则表示$F_n$删去一条边$e$. Arumugam等人 [2]得到下面的引理.

引理1 [2] 对于图$F_n - \{e\}$, e是友谊图F_n的任意一条边, 那么$\chi_{la}(F_n - \{e\}) = 3$.

本节考虑友谊图F_n加上任意一条悬挂边e之后的局部反魔幻着色数, 得到以下结果.

定理2 对于图$F_n + \{e\}$, e为加在友谊图$F_n (n \geq 2)$上的任意一条悬挂边, 则

$$3 \leq \chi_{la}(F_n + \{e\}) \leq \begin{cases} 3, & e = xv; \\ 4, & \text{其它}. \end{cases}$$

证明 令图$F_n + \{e\}$的点集为$V(F_n + \{e\}) = V(F_n) + \{v\}$, 边集为$E(F_n + \{e\}) = E(F_n) + \{e\}$. 可以明显得到$\chi_{la}(F_n + \{e\}) \geq \chi(F_n + \{e\}) = 3$. 接下来, 定义一个双射$f : E \to \{1, 2, \ldots, 3n + 1\}$, 则

$$f(e) = 3n + 1;$$

$$f(u_iv_i) = i, 1 \leq i \leq n;$$

$$f(xu_i) = 2n + 1 - i, 1 \leq i \leq n;$$

和

$$f(xv_i) = 3n + 1 - i, 1 \le i \le n.$$

根据以上标号, 分以下两种情形讨论各点的权值之和:

情形 1 悬挂边 e 加在友谊图 F_n 的中心点 x 上. 由讨论可知 $e = xv$, 此时各顶点的权值之和为:

$$\omega(v) = 3n + 1;$$

$$\omega(x) = 4n(n+1) + 1;$$

$$\omega(v_i) = 3n + 1, 1 \le i \le n;$$

和

$$\omega(u_i) = 2n + 1, 1 \le i \le n.$$

明显地, f 是图 $F_n + \{e\}$ 的一个局部反魔幻标号, 且使用了 3 种互异的颜色, 因此 $\chi_{la}(F_n + \{e\}) \le 3$. 故 $\chi_{la}(F_n + \{e\}) = 3$. 如 $F_3 + \{e\}$ 的局部反魔幻着色见图 1.

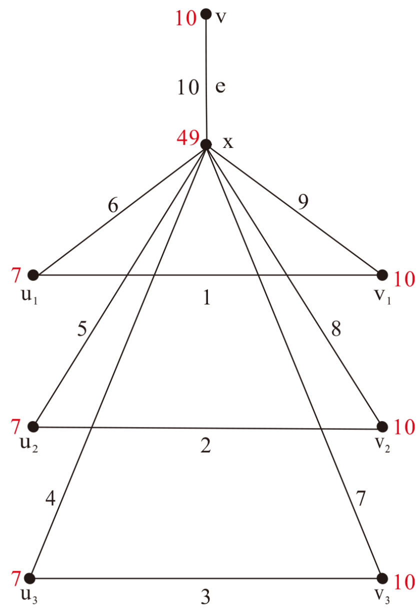

Figure 1. The local antimagic coloring of $F_3 + \{e\}$

图 1. $F_3 + \{e\}$的局部反魔幻着色

情形 2 悬挂边 e 加在友谊图 F_n 的任意一个二度点上. 不失一般性, 假设悬挂边与点 u_1 相连, 即 $e = u_1v$, 此时可以得到顶点的权值之和为:

$$\omega(v) = 3n + 1;$$

$$\omega(u_1) = 5n + 2;$$

$$\omega(u_i) = 2n+1, 2 \le i \le n;$$

$$w(v_i) = 3n+1, 1 \le i \le n;$$

和

$$\omega(x) = n(4n+1), 1 \le i \le n.$$

明显地, f 是图 $F_n + \{e\}$ 的一个局部反魔幻标号且使用了 4 种互异的颜色, 故 $\chi_{la}(F_n + \{e\}) \le 4$. 如 $F_3 + \{e\}$ 的局部反魔幻着色见图 2.

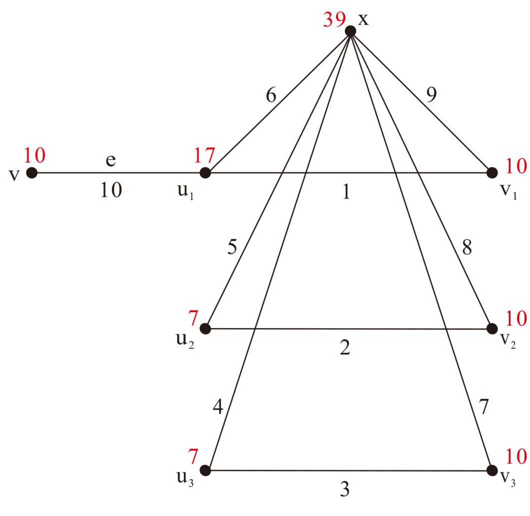

Figure 2. The local antimagic coloring of $F_3 + \{e\}$
图 2. $F_3 + \{e\}$的局部反魔幻着色

引理 2 [2] 对于任意一个有 l 个叶子的树 T, 有 $\chi_{la}(T) \ge l+1$.

引理 3 [9] 图 $SS_{n,m}$ 是星图的边剖分图. 对于 $n \geqslant 2$ 和 $m \geqslant 3$ 的任意整数, 图 $SS_{n,m}$ 的局部反魔幻着色数为 $n+1 \le \chi_{la}(SS_{n,m}) \le n+2$.

由引理 3, 本文找到了使星图的剖分图 $P_m(S_n)$ 的局部反魔幻着色数为 $\chi_{la}(P_m(S_n)) = n+1$ 的图.

定理 4 图 $P_m(S_n)$ 是星图 S_n 的 m 次边剖分图, 若满足以下任一条件:

1) $m = 1$, 且 $2 \le n \le 3$;

2) m 为偶数且 $2m \le n \le 2m+1$, 则有

$$\chi_{la}(P_m(S_n)) = n+1.$$

证明 令图 $P_m(S_n)$ 的点集为 $V(P_m(S_n)) = \{u_0\} \cup \{u_{ki} : 1 \le k \le m, 1 \le i \le n\} \cup \{u_{0i} : 1 \le i \le n\}$, 边集为 $E(P_m(S_n)) = \{u_0u_{1i} : 1 \le i \le n\} \cup \{u_{ki}u_{k+1i} : 1 \le k \le m-1, 1 \le i \le n\} \cup \{u_{mi}u_{0i} : 1 \le i \le n\}$. 图 $P_m(S_n)$ 的顶点数为 $|V(P_m(S_n))| = mn+n+1$, 边数为 $|E(P_m(S_n))| = mn+n$. 定义一个双射 $f : E \to \{1, 2, \ldots, |E(P_m(S_n))|\}$, 得到:

情形 1 当 $m=1$ 时, 有 $\chi_{la}(P_1(S_2))\le 3$, 和 $\chi_{la}(P_1(S_3))\le 4$(它们的局部反魔幻着色见下图3的 (a)、(b)), 故 f 是一个局部反魔幻标号使得当 $2\le n\le 3$时, 有 $P_1(S_n)\le n+1$.

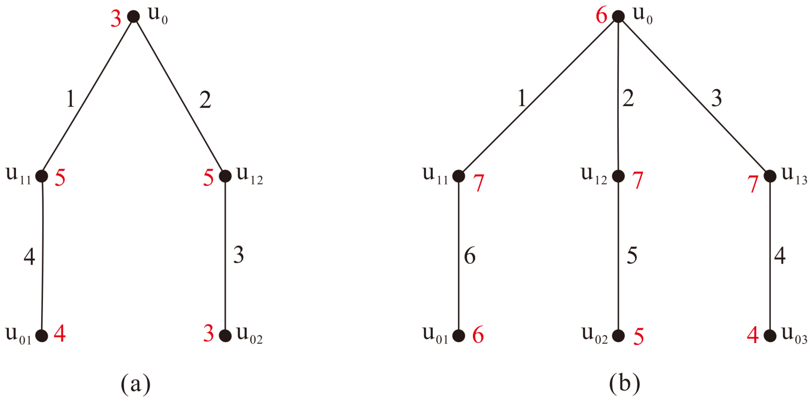

Figure 3. (a) the local antimagic coloring of $P_1(S_2)$; (b) the local antimagic coloring of $P_1(S_3)$

图 3. (a) 图$P_1(S_2)$的局部反魔幻着色；(b) 图$P_1(S_3)$的局部反魔幻着色

情形 2 当 m 为偶数时:

$$f(u_0u_{1i})=i, 1\le i\le n;$$

$$f(u_{mi}u_{0i})=mn+i, 1\le i\le n;$$

$$f(u_{0i}u_{mi})=mn+n+1-i, 1\le i\le n;$$

$$f(u_{ki}u_{k+1i})=\begin{cases} mn+(1-k)n+1-i, & k\equiv 1\ (mod\ 2), 1\le i\le n; \\ kn+i, & k\equiv 0\ (mod\ 2), 1\le i\le n. \end{cases}$$

由上述标号计算可知, 此时各顶点的权值之和为:

$$\omega(u_0)=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$\omega(u_{0i})=mn+i, 1\le i\le n;$$

$$\omega(u_{ki})=\begin{cases} mn+1, & k\equiv 1\ (mod\ 2), 1\le i\le n; \\ (m+2)n+1, & k\equiv 0\ (mod\ 2), 1\le i\le n. \end{cases}$$

当 $k\equiv 1\ (mod\ 2)$ 时, 得到 $\omega(u_{ki})=\omega(u_{01})=mn+1$; $\omega(u_0)$ 必定与某个 $\omega(u_{0i})$ 相等, $2\le i\le n$: 当 $n=2m$ 时, $\omega(u_0)=\omega(u_{0\frac{n}{2}})=\frac{n(n+1)}{2}$; 当 $n=2m+1$ 时, 得到 $\omega(u_0)=\omega(u_{0n})=\frac{(2m+1)(2m+1+1)}{2}$. 明显地, f 是一个局部反魔幻标号且使用了 $n+1$ 种互异的颜色, 因此 $\chi_{la}(P_m(S_n))\le n+1$.

星图的剖分图具有 n 个叶子点和一个中心点, 由引理 2 可知, $\chi_{la}(P_m(S_n))\ge n+1$. 综上所述, 当满足上述任一条件时, 有 $\chi_{la}(P_m(S_n))=n+1$. 如 $P_2(S_4)$的局部反魔幻着色见下图 4.

定理 5 图 $P_m(S_{l,q})$ 是双星图 $S_{l,q}$的 m 次边剖分图, 当 $l\ge 2$ 和 $q\ge 2$ 为任意整数时, 则 $l+q+1\le P_m(S_{l,q})\le l+q+3$.

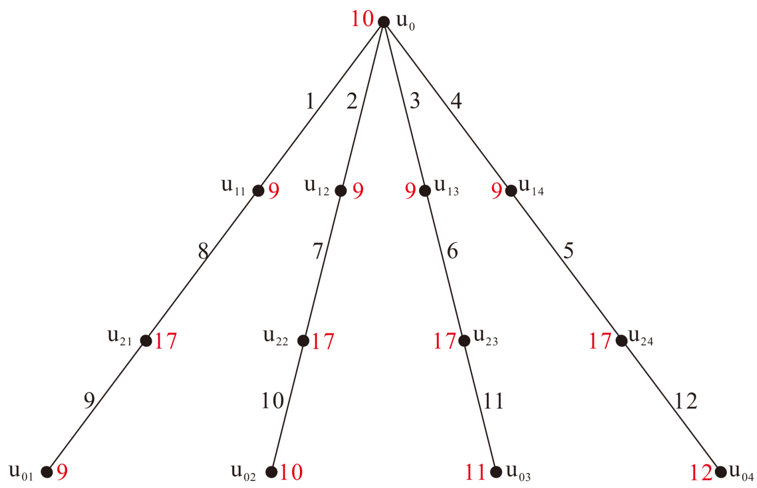

Figure 4. The local antimagic coloring of $P_2(S_4)$

图 4. $P_2(S_4)$的局部反魔幻着色

证明 令图 $P_m(S_{l,q})$ 的点集为 $V(P_m(S_{l,q})) = \{u_0^1, u_0^2\} \cup \{u_{ki} : 1 \le i \le l, 1 \le k \le m\} \cup \{u_{0i} : 1 \le i \le l\} \cup \{u_{ki} : l+2 \le i \le l+q+1, 1 \le k \le m\} \cup \{u_{0i} : l+2 \le i \le l+q+1\} \cup \{u_i : 1 \le i \le m\}$, 边集为 $E(P_m(S_{l,q})) = \{u_0^1 u_{1i} : 1 \le i \le l\} \cup \{u_{ki}u_{k+1i} : 1 \le i \le l, 1 \le k \le m-1\} \cup \{u_{mi}u_{0i} : 1 \le i \le l\} \cup \{u_0^1 u_1\} \cup \{u_i u_{i+1} : 1 \le i \le m-1\} \cup \{u_m u_0^2\} \cup \{u_0^2 u_{1i} : l+2 \le i \le l+q+1\} \cup \{u_{ki}u_{k+1i} : l+2 \le i \le l+q+1, 1 \le k \le m-1\} \cup \{u_{mi}u_{0i} : l+2 \le i \le l+q+1\}$. 图 $P_m(S_{l,q})$ 的顶点数为 $|V(P_m(S_{l,q}))| = (m+1)(l+q+1)+1$, 边数为 $|E(P_m(S_{l,q}))| = (m+1)(l+q+1)$. 定义一个双射 $f : E \to \{1, 2, \ldots, |E(P_m(S_{l,q}))|\}$, 得到

$$f(u_m u_0^2) = (m+1)(l+q+1) - l;$$

$$f(u_{0i}u_{mi}) = (m+1)(l+q+1) + 1 - i, 1 \le i \le l;$$

$$f(u_{0i}u_{mi}) = (m+1)(l+q+1) + 1 - i, l+2 \le i \le l+q+1;$$

$$f(u_0^1 u_1) = \begin{cases} \frac{(m-1)(l+q+1)}{2} + l + 1, & 1 \equiv m \ (mod\ 2); \\ m(l+q+1) + \frac{[1-(m-1)](l+q+1)}{2} - l, & 1 \equiv m-1 \ (mod\ 2); \end{cases}$$

$$f(u_i u_{i-1}) = \begin{cases} \frac{(m-k)(l+q+1)}{2} + l + 1, & k \equiv m \ (mod\ 2); \\ m(l+q+1) + \frac{[k-(m-1)](l+q+1)}{2} - l, & k \equiv m-1 \ (mod\ 2); \end{cases}$$

$$f(u_0^1 u_{1i}) = \begin{cases} \frac{(m-1)(l+q+1)}{2} + i, & 1 \equiv m \ (mod\ 2), 1 \le i \le l; \\ m(l+q+1) + \frac{[1-(m-1)](l+q+1)}{2} + 1 - i, & 1 \equiv m-1 \ (mod\ 2), 1 \le i \le l; \end{cases}$$

$$f(u_{ki}u_{k-1i}) = \begin{cases} \frac{(m-k)(l+q+1)}{2} + i, & k \equiv m \ (mod\ 2), 1 \le i \le l; \\ m(l+q+1) + \frac{[k-(m-1)](l+q+1)}{2} + 1 - i, & k \equiv m-1 \ (mod\ 2), 1 \le i \le l; \end{cases}$$

$$f(u_0^2 u_{1i}) = \begin{cases} \frac{(m-1)(l+q+1)}{2} + i, & k \equiv m \ (mod\ 2), l+2 \le i \le l+q+1; \\ m(l+q+1) + \frac{[1-(m-1)](l+q+1)}{2} + 1 - i, & k \equiv m-1 \ (mod\ 2), l+2 \le i \le l+q+1; \end{cases}$$

DOI: 10.12677/aam.2021.1011430

$$f(u_{ki}u_{k-1i})=\begin{cases}\frac{(m-k)(l+q+1)}{2}+i, & k\equiv m\ (mod\ 2), l+2\le i\le l+q+1;\\ m(l+q+1)+\frac{[k-(m-1)](l+q+1)}{2}+1-i, & k\equiv m-1\ (mod\ 2), l+2\le i\le l+q+1.\end{cases}$$

由以上标号可得, 各顶点的权值之和为:

$$\omega(u_{0i})=(m+1)(l+q+1)+1-i, 1\le i\le l;$$

$$\omega(u_0^1)=\begin{cases}\frac{m(l+1)^2+l+1}{2}, & k\equiv m\ (mod\ 2);\\ \frac{(m+1)(l+1)^2+l+1}{2}, & k\equiv m-1\ (mod\ 2);\end{cases}$$

$$\omega(u_{0i})=(m+1)(l+q+1)+1-i, l+2\le i\le l+q+1;$$

$$\omega(u_0^2)=\begin{cases}\frac{mq^2+q}{2}+(m+1)(l+q+1), & k\equiv m\ (mod\ 2);\\ \frac{(m+1)q^2+q}{2}+(m+1)(l+q+1), & k\equiv m-1\ (mod\ 2);\end{cases}$$

$$\omega(u_{ki})=\begin{cases}(m+1)(l+q+1)+1, & k\equiv m\ (mod\ 2), 1\le i\le l;\\ m(l+q+1)+1, & k\equiv m-1\ (mod\ 2), 1\le i\le l;\end{cases}$$

$$\omega(u_i)=\begin{cases}(m+1)(l+q+1)+1, & k\equiv m\ (mod\ 2), 1\le i\le m;\\ m(l+q+1)+1, & k\equiv m-1\ (mod\ 2), 1\le i\le m;\end{cases}$$

$$\omega(u_{ki})=\begin{cases}(m+1)(l+q+1)+1, & k\equiv m\ (mod\ 2), l+2\le i\le l+q+1;\\ m(l+q+1)+1, & k\equiv m-1\ (mod\ 2), l+2\le i\le l+q+1.\end{cases}$$

当 $i=l+q+1$, $k\equiv m-1\ (mod\ 2)$ 时, 有 $\omega(u_{0l+q+1})=m(l+q+1)+1$. 明显地, f 是图 $P_m(S_{l,q})$ 的一个局部反魔幻标号且使用了 l+q+3 种互异的颜色, 故 $P_m(S_{l,q})\le l+q+3$. 根据引理 2 可知 $l+q+1=\chi(P_m(S_{l,q}))\le\chi_{la}(P_m(S_{l,q}))$. 综上可得, 图 $P_m(S_{l,q})$ 的局部反魔幻着色数为 $l+q+1\le P_m(S_{l,q})\le l+q+3$. 如 $P_2(S_{3,4})$ 的局部反魔幻着色见图 5.

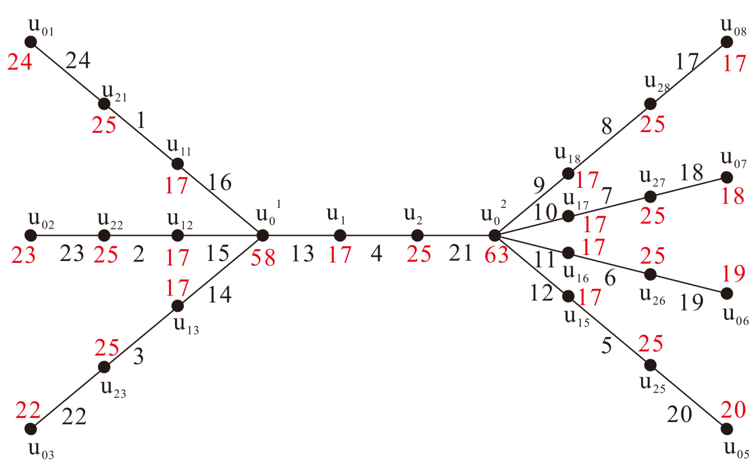

Figure 5. The local antimagic coloring of $P_2(S_{3,4})$

图 5. $P_2(S_{3,4})$的局部反魔幻着色

基金项目

国家自然科学基金项目(11761070, 61662079); 2021年新疆维吾尔自治区自然基金联合项目(2021D01C078); 2020年新疆师范大学一流专业、一流课程项目资助。

参考文献

[1] Hartsfield, N. and Ringel, G. (1990) Pearls in Graph Theory. Academic Press, INC., Boston.

[2] Arumugam, S., Premalatha, K., Bacă, M. and Semaničová-Feňovčíková, A. (2017) Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph. *Graphs and Combinatorics*, **33**, 275-285. https://doi.org/10.1007/s00373-017-1758-7

[3] Bensmail, J., Senhaji, M. and Lyngsie, K.S. (2017) On a Combination of the 1-2-3 Conjecture and the Antimagic Labelling Conjecture. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **19**, 1-17.

[4] Lau, G.C., Shiu, W.C. and Ng, H.K. (2018) On Local Antimagic Chromatic Number of Cycle-Related Join Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **41**, 133-152. https://doi.org/10.7151/dmgt.2177

[5] Lau, G.C., Shiu, W.C. and Ng, H.K. (2018) On Local Antimagic Chromatic Number of Cut-Vertices. arXiv:1805.04801 [math.CO]

[6] Lau, G.C., Ng, H.K. and Shiu, W.C. (2020) Affirmative Solutions on Local Antimagic Chromatic Number. *Graphs and Combinatorics*, **36**, 1337-1354. https://doi.org/10.1007/s00373-020-02197-2

[7] Arumugam, S., Lee, Y.C., Premalatha, K. and Wang, T.M. (2018) On Local Antimagic Vertex Coloring for Corona Products of Graphs. arXiv:1808.04956 [math.CO] https://doi.org/10.1007/s00373-017-1758-7

[8] Nazula, N.H., Slamin, S. and Dafik, D. (2018) Local Antimagic Vertex Coloring of Unicyclic Graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*, **2**, 30-34. https://doi.org/10.19184/ijc.2018.2.1.4

[9] Dafik, D., Agustin, I.H., Marsidi and Kurniawati, E.Y. (2020) On the Local Antimagic Vertex Coloring of Sub-Devided Some Special Graph. *Journal of Physics Conference Series*, **1538**, Article ID: 012021. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1538/1/012021