Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(4), 1184-1190
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104128

Hans汉斯

非自治单种群Chemostat模型的全局渐近稳定性

邢喜民[1]，辛　巧[2]，薛婷婷[1]，徐加波[1*]

[1]新疆工程学院，数理学院，新疆 乌鲁木齐
[2]伊犁师范大学，数学与统计分院，新疆 伊宁
Email: 24033663@qq.com, *xujiabo_math@aliyun.com

收稿日期：2021年3月25日；录用日期：2021年4月15日；发布日期：2021年4月28日

摘　要

本文首先考察了营养稀释率与移除率相同情形下的非自治单种群Chemostat系统的动力学行为。其次，假定营养稀释率与移除率相同，降低了微分方程的维数。最后，利用常微分方程的比较原理，给出了Chemostat系统稳定性的充分条件。

关键词

种群动力系统，Chemostat模型，非自治系统，全局渐近稳定

Global Asymptotic Stability of a Non-Autonomous Single-Population Chemostat Model

Ximin Xing[1], Qiao Xin[2], Tingting Xue[1], Jiabo Xu[1*]

[1]College of Mathematics and Physics, Xinjiang Institute of Engineering, Urumqi Xinjiang
[2]College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
Email: 24033663@qq.com, *xujiabo_math@aliyun.com

Received: Mar. 25th, 2021; accepted: Apr. 15th, 2021; published: Apr. 28th, 2021

Abstract

In this paper, the dynamic behavior of a non-autonomous single-population Chemostat system

*通讯作者。

文章引用: 邢喜民, 辛巧, 薛婷婷, 徐加波. 非自治单种群 Chemostat 模型的全局渐近稳定性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 1184-1190. DOI: 10.12677/aam.2021.104128

with the same nutrient dilution rate and removal rate is investigated. Then, under the assumption that the nutrient dilution rate and removal rate are the same, the dimension of the differential equation is reduced. Finally, by using the comparison principle of ordinary differential equations, the sufficient conditions for the stability of Chemostat system are given.

Keywords

Population Dynamic System, Chemostat Model, Non-Autonomous Systems, Globally Asymptotically Stable

1. 模型简介及基本假设

Chemostat 系统是一种连续培养微生物的实验装置，可看作简单的湖泊系统或废水处理系统，在研究微生物群落的演变中扮演着十分重要的角色。关于不同类型的 Chemostat 数学模型的局部稳定性，一些专家[1] [2] [3] [4]做了研究。然而，Chemosetat 系统的全局稳定性却鲜有专家进行研究。Chemosetat 系统的全局稳定性可用来研究系统中营养物质和微生物、微生物之间的相互影响和演化，在微生物培养模型的理论和实验观察中作用显著。非自治单种群 Chemostat 数学模型描述如下：

$$\begin{cases} S'(t)=b_0(t)-D(t)S(t)-x(t)p(t,S(t)) \\ x'(t)=x(t)\left(p(t,S(t))-D(t)\right) \\ S(0)=S_0\geq 0,\ \ x(0)=x_0\geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

t 表示时刻，$S(t)$ 表示营养液的浓度，$x(t)$ 表示培养皿中微生物的浓度，$b_0(t)$ 表示培养皿中营养液的输入率，$D(t)$ 表示培养皿中营养液的稀释率和微生物的移除率，$p(t,S(t))$ 表示培养皿中微生物对营养液的消耗率。S_0,x_0 分别表示初始时刻培养皿中营养液的浓度和微生物的浓度。不难看出，模型中的参数随着时刻 t 的改变而变化，因此该数学模型为非自治常微分方程组。结合其生物学的实际意义，对于模型中的参数我们给出一些基本要求：$b_0(t)>0$，$D(t)$ 关于 $t\in[0,\infty]$ 连续有界，函数 $p(t,\cdot):[0,\infty]\times(-\infty,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$ 连续且 $p(t,0)=0$。为了确定模型(1)的动力学行为，我们给出如下条件。

(H_1) 存在正常数 $\lambda>0$，使得

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\lambda}D(v)\mathrm{d}v>0. \tag{2}$$

(H_2) 对任意给定的常数 M，存在 $L=L(M)>0$，使得对任意的 s_1 和 $s_2\in[0,M]$ 和 $t\in[0,+\infty]$ 有 $\left|p(t,s_1)-p(t,s_2)\right|\leq L\left|s_1-s_2\right|$。

(H_3) 对任意 $t\in[0,+\infty]$，$p(t,s)$ 关于 s 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调不减。

(H_4) $\dfrac{\partial p(t,s)}{\partial s}$ 在 $(t,s)\in[0,\infty]\times(-\infty,+\infty)$ 上存在，且存在常数 η 和连续函数 $a(t),b(t)$ 使得

$$a(s)b(t)\leq\frac{\partial p(t,s)}{\partial s}\leq\eta. \tag{3}$$

其中，$a(s)$ 和 $b(t)$ 关于 s 和 t 连续并满足

$$a(s)>0,\ s\neq 0,\ \liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\lambda} b(v)\mathrm{d}v>0 \tag{4}$$

(H$_5$) $\inf_{t\geq 0} b_0(t)\geq 0\lambda>0$，使得 $\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+\lambda} b_0(v)\mathrm{d}v>0$。

本文假定营养稀释率与移除率相同，将二维的微分方程降低为一维微分方程，利用微分不等式，最终给出 Chemostat 系统稳定性的充分条件。

2. 平凡解的局部渐近稳定性和不稳定性

为考察系统(1)的局部渐近稳定性和不稳定性的充要条件，首先给出两个引理。

引理 1 R_+^2 是系统(1)的正不变集，其中 $R_+^2=\{(S,x)\,|\,S>0,x>0\}$。

证明：由 $S'(t)\big|_{S=0}=b_0(t)>0$，$x(t)=x(0)\exp\left\{\int_0^t\left(p(v,S(v))-D(v)\right)\mathrm{d}v\right\}$，所以 R_+^2 是系统(1)的正不变集。

下面给出关于非自治线性方程的一个很有用的引理。

$$\omega'(t)=b_0(t)-D(t)\omega(t) \tag{5}$$

引理 2 如果(H$_1$)、(H$_2$)、(H$_3$)成立，那么

1) 若 $\omega(t)$ 是系统(5)任意初值大于零的解，则存在常数 $m>0, M>0$ 使得

$$m\leq\liminf_{t\to\infty}\omega(t)\leq\limsup_{t\to\infty}\omega(t)\leq M.$$

2) 若 $\omega_1(t),\omega_2(t)$ 是系统(5)任意两个初值大于零的解，则满足 $\lim_{t\to\infty}\left(\omega_1(t)-\omega_2(t)\right)=0$。

定义 $I(t)=S(t)+x(t)$，取 $\omega^*(t)$ 为系统(5)满足初值 $\omega(0)>0$ 的一个特解。由引理 2 知：

定理 1 如果 $S(t),x(t)\geq 0$，则

$$\lim_{t\to\infty}\left(I(t)-\omega^*(t)\right)=0 \tag{6}$$

证明：由于 $I(t)$ 满足微分方程 $I'(t)=b_0(t)-D(t)I(t)$，根据引理 2 结论成立。

定理 2 如果(H$_1$)、(H$_2$)、(H$_3$)成立，那么系统(1)的满足初始条件 $S(0)\geq 0, x(0)\geq 0$ 的解 $(S(t),x(t))$ 的每个分量以 $M\,(M>0)$ 为上界。

证明：由(6)可知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T\geq 0$，当 $t\geq T$ 时，$S(t)+x(t)\leq\omega^*(t)+\varepsilon$。又由引理 2 可知 $S(t)\leq\omega^*(t)+\varepsilon$。由 ε 的任意性和引理 1 可得 $\limsup_{t\to\infty}S(t)\leq M$。同理可证 $\limsup_{t\to\infty}x(t)\leq M$。

显然，$(\omega^*(t),0)$ 是系统(1)的一个平凡解。

下面我们将给出此平凡解局部稳定和不稳定的判据。

定理 3 如果(H$_1$)成立，那么

1) 如果

$$\limsup_{t\to\infty}\int_t^{t+\lambda}\left(p(s,\omega^*(s)-D(s))\right)\mathrm{d}s<0 \tag{7}$$

那么 $(\omega^*(t),0)$ 是系统(1)的渐近稳定的解。

2) 如果

$$\limsup_{t\to\infty}\int_t^{t+\lambda}\left(p(s,\omega^*(s)-D(s))\right)\mathrm{d}s>0 \tag{8}$$

那么 $(\omega^*(t),0)$ 是系统(1)的不稳定解。

证明：考虑系统(1)的关于平凡解 $(\omega^*(t),0)$ 的变分方程，在不引起混淆的情况下我们仍然沿用原来的记号，

$$\begin{pmatrix} S'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D(t) & -p\left(t,\omega^*(t)\right) \\ 0 & p\left(t,\omega^*(t)\right)-D(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t) \\ x(t) \end{pmatrix}.$$

该线性方程的基解矩阵可以表示如下：

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \exp\left\{\int_0^t -D(s)\mathrm{d}s\right\} & * \\ 0 & \exp\left\{\int_0^t \left(p\left(s,\omega^*(s)\right)-D(s)\right)\mathrm{d}s\right\} \end{pmatrix},$$

其中$*$部分是微分方程

$$u'(t) = -D(t)u(t) - \exp\left\{\int_0^t \left(p\left(s,\omega^*(s)\right)-D(s)\right)\mathrm{d}s\right\}\left(p\left(t,\omega^*(t)\right)-D(t)\right)$$

的解，注意到$u'(t) \le -D(t)u(t)$，利用微分方程比较原理可得

$$u(t) \le u(0)\exp\left\{\int_0^t -D(s)\mathrm{d}s\right\}.$$

由假设(H_1)可知，再依据条件(7)可知，平凡解是系统的局部稳定的解。显然，当条件(8)成立时，该平凡解是不稳定的。证毕。

3. 非平凡正解的全局部渐近稳定性

为研究在假设(H_1)~(H_5)和条件(8)成立的情况下，系统(1)有全局渐近稳定的正解，我们引入辅助方程

$$z'(t) = z(t)\left(p\left(t,\omega^*(t)-z(t)\right)-D(t)\right) \tag{9}$$

显然$[0,M]$是系统(9)的一个不变集。

由条件(8)可知，存在充分小的$\overline{\varepsilon}$的和充分大的T_0，使得，当$t \ge T_0$时，有$\int_t^{t+\lambda}\left(p\left(s,\omega^*(s)\right)-D(s)\right)\mathrm{d}s > \overline{\varepsilon}$成立。

即$\int_t^{t+\lambda}\left(p\left(s,\omega^*(s)-\delta\right)-p\left(s,\omega^*(s)-\delta\right)+p\left(s,\omega^*(s)-D(s)\right)\right)\mathrm{d}s > \overline{\varepsilon}$。

由假设(H_4)以及微分中值定理进而可得$\int_t^{t+\lambda}\left(p\left(s,\omega^*(s)-\delta\right)-D(s)+\dfrac{\partial p(s,\xi)}{\partial s}\delta\right)\mathrm{d}s > \overline{\varepsilon}$，从而

$$\int_t^{t+\lambda}\left(p\left(s,\omega^*(s)-\delta\right)-D(s)\right)\mathrm{d}s > \overline{\varepsilon}-\delta\eta\lambda$$

令$\varepsilon = \overline{\varepsilon}-\delta\eta\lambda$，只要选取$\delta < \dfrac{\overline{\varepsilon}}{\eta\lambda}$，有

$$\int_t^{t+\lambda}\left(p\left(s,\omega^*(s)-\delta\right)-D(s)\right)\mathrm{d}s > \varepsilon. \tag{10}$$

引理 3 设$z(t)$是系统(9)的解，那么存在$T_1 \ge T_0$使得$z(T_1) > \delta$。

证明：假设命题不成立，那么对于所有的$t > T_0$有$z(t) \le \delta$。从T_0到t进行积分可得

$$\begin{aligned} z(t) &= z(T_0)\exp\left\{\int_{T_0}^t \left(p\left(u,\omega^*(u)-z(u)\right)-D(u)\right)\mathrm{d}u\right\} \\ &\ge z(T_0)\exp\left\{\int_{T_0}^t \left(p\left(u,\omega^*(u)-\delta\right)-D(u)\right)\mathrm{d}u\right\} \end{aligned}$$

由(10)式可知$\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = \infty$，这与$z(t) \le \delta$矛盾。证毕。

引理 4 设 $z(t)$ 是系统(9)的满足初始条件 $z(0)>0$ 的解，那么存在 $T_2>0$，使得，对所有的 $t\ge T_2$，有 $z(t)\ge\delta\exp\{-\lambda D_{\max}\}$。

证明：由引理(3)可知，存在 T_1，使得 $z(T_1)>\delta$。假设命题不成立，那么存在 $T>T_1$，使得 $z(T)\ge\delta\exp\{\lambda D_{\max}\}$。取 $T_2=\sup\{t\,|\,z(t)=\delta,T_1<t<T\}$，那么 $z(T_2)=\delta$，而且对所有的 $t\in(T_2,T)$ 有 $z(t)<\delta$。同时，不难发现，$T-T_2<\lambda$。事实上，如果 $T-T_2\ge\lambda$，那么对所有的 $t\in(T_2,T_2+\lambda)$，有 $z(t)<\delta$。于是我们有

$$\begin{aligned}\delta>z(T_2+\lambda)&=z(T_2)\exp\left\{\int_{T_0}^{T_2+\lambda}\left(p\left(u,\omega^*(u)-z(u)\right)-D(u)\right)\mathrm{d}u\right\}\\&\ge z(T_2)\exp\left\{\int_{T_2}^{t}\left(p\left(u,\omega^*(u)-\delta\right)-D(u)\right)\mathrm{d}u\right\}\\&\ge z(T_2)=\delta\end{aligned}$$

这是一个矛盾。于是 $T-T_2<\lambda$。由此进而可得

$$\begin{aligned}\delta\exp\{-\lambda D_{\max}\}\ge z(T)&=z(T_2)\exp\left\{\int_{T_2}^{T}\left(p\left(u,\omega^*(u)-z(u)\right)-D(u)\right)\mathrm{d}u\right\}\\&\ge z(T_2)\exp\left\{\int_{T_2}^{T}\left(-D(u)\right)\mathrm{d}u\right\}\\&\ge z(T_2)\exp\left\{\int_{T_2}^{T}\left(-D_{\max}\right)\mathrm{d}u\right\}\\&=\delta\exp\{-D_{\max}(T-T_2)\}\\&>\delta\exp\{-D_{\max}\lambda\}\end{aligned}$$

证毕。

定理 4 如果(H_1)~(H_5)和条件(8)成立，那么系统(9)全局渐近稳定。

证明：设 $z(t)$ 和 $z^*(t)$ 是系统(9)的两个满足初值 $z(0),z^*(0)>0$ 的解，记 $V(t)=\left|\ln z(t)-\ln z^*(t)\right|$。于是

$$\begin{aligned}V'(t)&=sign\left(z(t)-z^*(t)\right)\left(p\left(t,\omega^*(t)-z(t)\right)-p\left(t,\omega^*(t)-z^*(t)\right)\right)\\&=\frac{sign\left(z(t)-z^*(t)\right)\left(\partial p(t,\varphi)\right)}{\partial S\left(z(t)-z^*(t)\right)}\\&=-\left|z(t)-z^*(t)\right|\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial S}\\&\le -V(t)\left|\xi(t)\right|a(\varphi)b(t)\end{aligned}$$

这里 $\xi(t)$ 介于 $z(t)$ 和 $z^*(t)$ 之间，由引理 4 可知存在 $T_2>0$，使得当 $t\ge T_2$ 时，$M\ge\xi(t)\ge\delta\exp\{-D_{\max}\lambda\}$。$\varphi(t)$ 介于 $\omega^*(t)-z(t)$ 和 $\omega^*(t)-z^*(t)$ 之间，由引理 2 可知，$\varphi(t)\in[m-M,M]$，令 $\underline{a}=\inf a(\varphi)$，于是 $V'(t)\le -V(t)\delta\exp\{-D_{\max}\lambda\underline{a}b(t)\}$。

由比较原理可得：

$$V(t)\le -V(T_2)\int_{T_2}^{t}\delta\exp\{-D_{\max}\lambda\underline{a}b(v)\mathrm{d}v\}.$$

利用假设可知，$\lim_{t\to\infty}V(t)=0$，于是我们有，$\lim_{t\to\infty}\left(z(t)-z^*(t)\right)=0$。从而证明了系统(9)的全局吸引性。

方便起见，我们设 $z^*(t)$ 为系统(9)的一个满足初始条件 $z^*(0)>0$ 的特解。于是，我们有如下引理。

引理 5 如果(8)成立，那么对于充分大的T_3下列不等式成立

$$z^*(t)\le\omega^*(t)\ (t>T_3).$$

证明：我们首先证明不等式$z^*(t)>\omega^*(t)\ (t>T_3)$不成立。事实上，如果这个不等式成立，那么，

$$z^{*\prime}(t)=z^*(t)\Big(p\big(t,\omega^*(t)-z^*(t)\big)-D(t)\Big)\le z^*(t)\big(-D(t)\big)$$

利用微分不等式和假设(H_1)，我们可以得到

$$z^*(t)=z^*(T_3)\exp\left\{\int_{T_3}^{t}-D(t)\mathrm{d}t\right\}$$

于是，$\lim_{t\to\infty}z^*(t)=0$，然而，另一方面，$m\le\liminf_{t\to\infty}\omega^*(t)$，这和$z^*(t)\le\omega^*(t)(t>T_3)$，矛盾。于是存在充分大的$T_3$使得$z^*(T_3)\le\omega^*(T_3)$成立。我们说，对于所有$t$满足$t>T_3$都有$z^*(t)\le\omega^*(t)$成立。不然，存在$T_4>T_3$使得$z^*(T_4)>\omega^*(T_4)$。于是存在$T^*\in[T_3,T_4]$，使得$z^*(T^*)=\omega^*(T^*)$且$z^{*\prime}(T^*)=\omega^{*\prime}(T^*)$然而，另一方面，我们有

$$\begin{aligned}z^{*\prime}(T^*)-\omega^{*\prime}(T^*)&=b_0(T^*)-D(T^*)\omega(T^*)-z(T^*)\Big(p\big(T^*,\omega^*(T^*)-z(T^*)\big)-D(T^*)\Big)\\&>b^0(T^*)-D(T^*)\omega(T^*)+z(T^*)D(T^*)\\&=b^0(T^*)>0\end{aligned}$$

矛盾。证毕。

定理 5 $\big(\omega^*(t)-z^*(t),z^*(t)\big)$是系统(1)全局渐近稳定的解，即：

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\omega^*(t)-z^*(t),\ \lim_{t\to\infty}x(t)=z^*(t).$$

证明：显然，$\big(\omega^*(t)-z^*(t),z^*(t)\big)$是系统(1)的正解。

由定理 1 可知，$\lim_{t\to\infty}\big(S(t)+x(t)\big)=\omega^*(t)$，因此只需要证明$\lim_{t\to\infty}x(t)=z^*(t)$即可。事实上，令$I(t)=I(t)=S(t)+x(t)$，系统(1) 可等价于如下系统

$$\begin{cases}I'(t)=b_0(t)-D(t)I(t)\\x'(t)=x(t)\Big(p\big(t,I(t)-x(t)\big)-D(t)\Big)\\I(0)=I_0\ge0,x(0)=x_0\ge0\end{cases}\tag{11}$$

显然，$\omega^*(t)$是上述系统第一个方程的一个特解，把$\omega^*(t)$代入第二个方程可得，

$$x'(t)=x(t)\Big(p\big(t,\omega^*(t)-x(t)\big)-D(t)\Big)\tag{12}$$

由定理 3 可知$\lim_{t\to\infty}x(t)=z^*(t)$。证毕。

4. 结论与讨论

Chemosetat 系统的全局稳定性可用来研究系统中营养物质和微生物、微生物之间的相互影响和演化，对微生物培养模型的理论和实验观察意义明显。本文首先研究了一类非自治单种群 Chemostat 系统的动力学行为，并假定营养稀释率与移除率相同，从而将二维的微分方程降低为一维微分方程，最后利用微分不等式等工具得到了 Chemostat 系统全局吸引的充分条件。

在实际的工作和应用中，营养稀释率和移除率相同的假设有时并不满足。如果两者不相同，系统的稳定性仍有进一步研究的价值，感兴趣的学者可以研究如下系统(13)的全局渐近稳定性。

$$\begin{cases} S'(t) = b_0(t) - D(t)S(t) \\ x'(t) = x(t)\left(p(t,S(t)) - d(t)\right) \\ S(0) = S_0 \geq 0, x(0) = x_0 \geq 0. \end{cases} \tag{13}$$

此外，两种群竞争 Chemostat 系统的动力学行为也是一个值得进一步研究的问题。

近年来，很多学者[5]-[14]开始考虑随机微分方程的建模方法。本文的研究方法和结论是否可以推广到随机模型，随机模型和确定型模型结论的一致性等问题都十分值得研究。而本文的研究将对上述几个问题的研究提供有益的参考。

基金项目

新疆维吾尔自治区青年科技创新人才培养项目(2017Q087)，新疆维吾尔自治区高校科研计划自然科学项目(XJEDU2021Y048)。

参考文献

[1] 孙明娟, 董庆来, 代丽. 一类带有毒素生产的比率型 Chemostat 模型的定性分析[J]. 系统科学与数学, 2017, 37(9): 20-27.

[2] 董庆来, 马万彪. 具有时滞和可变营养消耗率的比率型 Chemostat 模型稳定性分析[J]. 系统科学与数学, 2009, 29(2): 86-99.

[3] 周玉平, 黄迅成. 一个三维 Chemostat 竞争系统的 Hopf 分支和周期解[J]. 应用数学, 2006, 19(2): 178-184.

[4] 宋国华, 李秀琴, 窦家维, 贺庆棠. Chemostat 系统中 Hopf 分支的存在性[J]. 系统科学与数学, 2001, 21(4): 486-490.

[5] Wang, L., Jiang, D. and Wolkowicz, G.S.K. (2019) Global Asymptotic Behavior of a Multi-Species Stochastic Chemostat Model with Discrete Delays. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **32**, 849-872. https://doi.org/10.1007/s10884-019-09741-6

[6] Pu, W.J., Jiang, D., Wang, Y., *et al.* (2019) Spatial Dynamics of a Nonlocal Delayed Unstirred Chemostat Model with Periodic Input. *International Journal of Biomathematics*, **12**, Article ID: 1950065. https://doi.org/10.1142/S1793524519500657

[7] Zhang, X. and Yuan, R. (2019) The Existence of Stationary Distribution of a Stochastic Delayed Chemostat Model. *Applied Mathematics Letters*, **93**, 15-21. https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.01.034

[8] Gao, M., Jiang, D. and Hayat, T. (2019) Stationary Distribution and Periodic Solution of Stochastic Chemostat Models with Single-Species Growth on Two Nutrients. *International Journal of Biomathematics*, **12**, Article ID: 1950063. https://doi.org/10.1142/S1793524519500633

[9] Feng, X., Sun, S., Zhang, T., *et al.* (2018) The Effect of Parameters on Positive Solutions and Asymptotic Behavior of an Unstirred Chemostat Model with B-D Functional Response. *Advances in Difference Equations*, **2018**, Article Number: 181. https://doi.org/10.1186/s13662-018-1587-x

[10] Gong, C., Xu, C. and Yuan, S. (2017) Threshold of a Stochastic Chemostat Model with the Ivlev Functional Response Function. *Journal of University of Shanghai for Science & Technology*, **39**, 1-6.

[11] Wang, L. and Jiang, D. (2017) Asymptotic Properties of a Stochastic Chemostat Including Species Death Rate. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 438-456. https://doi.org/10.1002/mma.4624

[12] Wang, L. and Jiang, D. (2017) Periodic Solution for the Stochastic Chemostat with General Response Function. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **486**, 378-385. https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.05.097

[13] Sun, S., Guo, C. and Liu, X. (2018) Hopf Bifurcation of a Delayed Chemostat Model with General Monotone Response Functions. *Computational and Applied Mathematics*, **37**, 2714-2737.

[14] Sun, S., Sun, Y., Zhang, G., *et al.* (2017) Dynamical Behavior of a Stochastic Two-Species Monod Competition Chemostat Model. *Applied Mathematics and Computation*, **298**, 153-170. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.11.005