Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(8), 2875-2880
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.108300

Hans汉斯

一类被积函数为$\cos x \cdot \cos 2x$的不定积分问题的探讨

高冬冬，金　红，蒋诗泉

铜陵学院数学与计算机学院，安徽 铜陵
Email: gdd225410@sina.com

收稿日期：2021年7月23日；录用日期：2021年8月15日；发布日期：2021年8月26日

摘　要

本文主要介绍了一类被积函数为$\cos x \cdot \cos 2x$的不定积分问题的求解方法并证明了在不同的方法求解下所得到的任意两个原函数之间只相差一个常数；有效地回答了在适当的假设下，任意两个原函数是等价的结论。最后，我们给出了被积函数为$\cos x \cdot \cos nx\,(n \geq 2)$情形下不定积分的原函数的表达式。

关键词

第一换元积分法，第二换元积分法，分部积分法

Discussion on a Class of Indefinite Integral Problems Whose Integrand Is $\cos x \cdot \cos 2x$

Dongdong Gao, Hong Jin, Shiquan Jiang

Department of Mathematics and Computer Science, Tongling University, Tongling Anhui
Email: gdd225410@sina.com

Received: Jul. 23rd, 2021; accepted: Aug. 15th, 2021; published: Aug. 26th, 2021

Abstract

This paper mainly introduces the solution of a class of indefinite integral problems with the integrable function $\cos x \cdot \cos 2x$, and proves that there is only one constant difference between any two arbitrary functions obtained by different methods. The conclusion that any two arbitrary functions are equivalent under the appropriate assumption is effectively answered. Finally, we give the expression of the original function of indefinite integral when the integrable function is

文章引用：高冬冬，金红，蒋诗泉．一类被积函数为$\cos x \cdot \cos 2x$的不定积分问题的探讨[J]．应用数学进展，2021, 10(8): 2875-2880. DOI: 10.12677/aam.2021.108300

$\cos x \cdot \cos nx \left(n \geq 2\right)$.

Keywords

The First Integration by Substitution, The Second Integration by Substitution, Integration by Parts

1. 引言

在文献[1] [2] [3]中，我们知道，如果初等函数 $f\left(x\right)$ 在某区间上连续，那么 $f\left(x\right)$ 在该区间上的原函数一定存在且 $f\left(x\right)$ 的任意两个原函数之间只相差一个常数 C，即如果 $F\left(x\right)$ 和 $G\left(x\right)$ 都是 $f\left(x\right)$ 的原函数，则有 $F\left(x\right)-G\left(x\right)=C$。但是在经济数学和高职数学的教学中，我们发现学生对原函数存在性定理的内容及其性质存在很大的疑惑，他们并不能完全理解其中的意思。甚至有时通过不同的方法计算出的原函数与书上答案不一样，他们竟然认为自己的计算是错误的。故本文主要以一类被积函数为 $\cos x \cdot \cos 2x$ 的不定积分为例，探讨此类不定积分问题的解法及其结果的等价性，希望能给经管类和高职的学生学习高等数学微积分这一块知识提供一些有力的帮助。

2. 求不定积分 $\int \cos x \cdot \cos 2x \mathrm{d}x$

2.1. 不定积分的解法

1) 第一换元积分法

解 1：

$$\begin{aligned}
\int \cos x \cdot \cos 2x \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\left(\cos x+\cos 3x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \cos x \mathrm{d}x+\int \cos 3x \mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}\int \cos x \mathrm{d}x+\frac{1}{6}\int \cos 3x \mathrm{d}\left(3x\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{6}\sin 3x+C_1
\end{aligned} \tag{1}$$

解 2：

$$\begin{aligned}
\int \cos x \cdot \cos 2x \mathrm{d}x &= \int \cos x\left(1-2\sin^2 x\right)\mathrm{d}x \\
&= \int\left(1-2\sin^2 x\right)\mathrm{d}\sin x \\
&= \int \mathrm{d}\sin x-2\int \sin^2 x \mathrm{d}\sin x \\
&= \sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+C_2
\end{aligned} \tag{2}$$

2) 分部积分法

解 1：

$$\begin{aligned}\int\cos x\cdot\cos 2x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\cos x\mathrm{d}\sin 2x\\&=\frac{1}{2}\left[\sin 2x\cdot\cos x-\int\sin 2x\mathrm{d}\cos x\right]\\&=\frac{1}{2}\sin 2x\cos x+\frac{1}{2}\int\sin 2x\cdot\sin x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\sin 2x\cos x+\frac{1}{2}\int 2\sin x\cos x\cdot\sin x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\sin 2x\cos x+\int\sin^2 x\mathrm{d}\sin x\\&=\frac{1}{2}\sin 2x\cos x+\frac{1}{3}\sin^3 x+C_3\end{aligned}\tag{3}$$

解 2：

$$\begin{aligned}\int\cos x\cdot\cos 2x\mathrm{d}x&=\int\cos 2x\mathrm{d}\sin x\\&=\cos 2x\cdot\sin x-\int\sin x\mathrm{d}\cos 2x\\&=\cos 2x\cdot\sin x+\int\sin x\cdot 2\sin 2x\mathrm{d}x\\&=\cos 2x\cdot\sin x+\int\sin x\cdot 4\sin x\cos x\mathrm{d}x\\&=\cos 2x\cdot\sin x+4\int\sin^2 x\mathrm{d}\sin x\\&=\cos 2x\cdot\sin x+\frac{4}{3}\sin^3 x+C_4\end{aligned}\tag{4}$$

3) 第二换元积分法

解：令 $t=\cos x, t\in[0,\pi]$ (这是存在反函数 $x=\arccos t$ 的一个单调区间)且 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}\int\cos x\cdot\cos 2x\mathrm{d}x&=\int\cos x\cdot\left(2\cos^2 x-1\right)\mathrm{d}x\\&=\int 2\cos^3 x\mathrm{d}x-\int\cos x\mathrm{d}x\\&=-2\int\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t+\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\\&=-\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t^2+\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\\&=-\int\frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}\left(1-t^2\right)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}\left(1-t^2\right)\\&=\int\left(-\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)\mathrm{d}\left(1-t^2\right)\\&=\sqrt{1-t^2}-\frac{2}{3}\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}+C_5\\&=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+C_5\end{aligned}\tag{5}$$

2.2. 不定积分计算结果的等价性

这一部分我们将证明上述计算结果(1)~(5)任意两个之间只是相差一个常数 C 且在适当的假设下，任意两个结果是等价的。

1) 从结果(2)和(5)易知，不定积分 $\int \cos x \cdot \cos 2x dx$ 的两个原函数只相差一个常数 C。若 $C_2 = C_5$，结果(2)与(5)等价。

2) 证明结果(1)与(2)等价。

证明：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{6}\sin 3x+C_1 &= \frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{6}\sin(x+2x)+C_1 \\
&= \frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{6}[\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x]+C_1 \\
&= \frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{6}\left[\sin x\left(1-2\sin^2 x\right)+2\sin x\cos^2 x\right]+C_1 \\
&= \frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{6}\left[\sin x-2\sin^3 x+2\sin x\left(1-\sin^2 x\right)\right]+C_1 \\
&= \frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{6}\left[3\sin x-4\sin^3 x\right]+C_1 \\
&= \sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+C_1
\end{aligned}$$

此结果表明不定积分 $\int \cos x \cdot \cos 2x dx$ 的两个原函数只相差一个常数 C。若 $C_1 = C_2$，结果(1)与(2)等价。

3) 证明结果(3)与(2)等价。

证明：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sin 2x\cos x+\frac{1}{3}\sin^3 x+C_3 &= \sin x\cos^2 x+\frac{1}{3}\sin^3 x+C_3 \\
&= \sin x\left[1-\sin^2 x\right]+\frac{1}{3}\sin^3 x+C_3 \\
&= \sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+C_3
\end{aligned}$$

此结果表明不定积分 $\int \cos x \cdot \cos 2x dx$ 的两个原函数只相差一个常数 C。若 $C_3 = C_2$，结果(3)与(2)等价。

4) 证明结果(4)与(2)等价。

证明：

$$\begin{aligned}
\cos 2x\cdot\sin x+\frac{4}{3}\sin^3 x+C_4 &= \left(1-2\sin^2 x\right)\sin x+\frac{4}{3}\sin^3 x+C_4 \\
&= \sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+C_4
\end{aligned}$$

此结果表明不定积分 $\int \cos x \cdot \cos 2x dx$ 的两个原函数只相差一个常数 C。若 $C_4 = C_2$，结果(4)与(2)等价。

3. 不定积分的推广

这一部分我们将被积函数为 $\cos x \cdot \cos 2x$ 的不定积分推广为被积函数为 $\cos x \cdot \cos nx\,(n \geq 2)$ 不定积分，即计算不定积分 $\int \cos x \cdot \cos nx dx\,(n \geq 2)$。

1) 第一换元积分法

解：

$$
\begin{aligned}
&\int \cos x \cdot \cos nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \left[\cos(n-1)x + \cos(n+1)x\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \cos(n-1)x\mathrm{d}x + \int \cos(n+1)x\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2(n-1)}\int \cos(n-1)x\mathrm{d}(n-1)x + \frac{1}{2(n+1)}\int \cos(n+1)x\mathrm{d}(n+1)x \\
&= \frac{1}{2(n-1)}\sin(n-1)x + \frac{1}{2(n+1)}\sin(n+1)x + C_6
\end{aligned} \tag{6}
$$

2) 分部积分法

解 1：

$$
\begin{aligned}
&\int \cos x \cdot \cos nx \mathrm{d}x = \int \cos nx \mathrm{d}\sin x \\
&= \sin x \cos nx - \int \sin nx \mathrm{d}\cos nx \\
&= \sin x \cos nx + n\int \sin x \cdot \sin nx \mathrm{d}x \\
&= \sin x \cos nx - \frac{n}{2}\int \left[\cos(n+1)x - \cos(n-1)x\right]\mathrm{d}x \\
&= \sin x \cos nx - \frac{n}{2(n+1)}\sin(n+1)x + \frac{n}{2(n-1)}\sin(n-1)x + C_7
\end{aligned} \tag{7}
$$

解 2：

$$
\begin{aligned}
&\int \cos x \cdot \cos nx \mathrm{d}x = \int \cos x \mathrm{d}\left(\frac{1}{n}\sin nx\right) \\
&= \frac{1}{n}\sin nx \cos x - \frac{1}{n}\int \sin nx \mathrm{d}\cos nx \\
&= \frac{1}{n}\sin nx \cos x + \frac{1}{n}\int \sin nx \cdot \sin x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}\sin nx \cos x - \frac{1}{2n}\int \left[\cos(n+1)x - \cos(n-1)x\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}\sin nx \cos x - \frac{1}{2n(n+1)}\sin(n+1)x + \frac{1}{2n(n-1)}\sin(n-1)x + C_8
\end{aligned} \tag{8}
$$

这里，我们通过第一换元积分法和部分积分法得到了不定积分 $\int \cos x \cdot \cos nx \mathrm{d}x$ 的三个原函数(6)、(7)和(8)，经过简单的变形，我们亦能得到(6)和(7)，(6)和(8)只相差一个常数 C，即

$$
\begin{aligned}
&\sin x \cos nx - \frac{n}{2(n+1)}\sin(n+1)x + \frac{n}{2(n-1)}\sin(n-1)x + C_7 \\
&= \frac{\left[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right]}{2} - \frac{n}{2(n+1)}\sin(n+1)x + \frac{n}{2(n-1)}\sin(n-1)x + C_7 \\
&= \left[\frac{n}{2(n-1)} - \frac{1}{2}\right]\sin(n-1)x + \left[\frac{1}{2} - \frac{n}{2(n+1)}\right]\sin(n+1)x + C_7 \\
&= \frac{1}{2(n-1)}\sin(n-1)x + \frac{1}{2(n+1)}\sin(n+1)x + C_7
\end{aligned}
$$

此结果表明不定积分$\int \cos x \cdot \cos nx\mathrm{d}x$的两个原函数只相差一个常数 C。若$C_6 = C_7$，结果(6)与(7)等价；

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sin nx\cos x-\frac{1}{2n(n+1)}\sin(n+1)x+\frac{1}{2n(n-1)}\sin(n-1)x+C_8 \\
&=\frac{1}{n}\cdot\frac{\left[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x\right]}{2}-\frac{1}{2n(n+1)}\sin(n+1)x+\frac{1}{2n(n-1)}\sin(n-1)x+C_8 \\
&=\left[\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n(n+1)}\right]\sin(n+1)x+\left[\frac{1}{2n(n-1)}-\frac{1}{2n}\right]\sin(n-1)x+C_8 \\
&=\frac{1}{2(n-1)}\sin(n-1)x+\frac{1}{2(n+1)}\sin(n+1)x+C_8
\end{aligned}$$

此结果表明不定积分$\int \cos x \cdot \cos nx\mathrm{d}x$的两个原函数只相差一个常数 C。若$C_6 = C_8$，结果(6)与(8)等价。

4. 结语

本文主要以一类被积函数为$\cos x \cdot \cos 2x$的不定积分问题为例，分别用第一换元积分法、分部积分法和第二换元积分法得到了此不定积分原函数的存在形式，证明了任意两个原函数之间只相差一个常数 C 的结论并且在适当的假设下，得到了任意两个原函数是等价的结论；随后，又将此类不定积分问题进行了推广，得到了相同的结论。通过上面对被积函数为$\cos x \cdot \cos 2x$的不定积分问题的探讨，能给在学习微积分的学生提供一些帮助，使其明白在求某个初等函数的原函数的时候，有时我们通过不同的方法求得的原函数可能存在各种各样的形式，但是这些各种各样的形式之间确实经过某些简单的化简处理，我们都能得到任意两个原函数之间只相差一个常数 C。换句话说，求不定积分的答案不唯一，我们不能完全按照书上的答案来定义自己的结果，只要我们对自己所求原函数进行求导计算，如果它等于被积函数，那么我们的答案就是正确的。

基金项目

安徽省高校学科(专业)拔尖人才学术资助项目(gxbjZD2020016)；安徽省教学研究重点项目“财经类高校数学与应用数学专业教学体系与能力培养研究”(2017jyxm0464)；安徽省质量工程项目“安徽省高水平教学团队：数学建模教学团队”(2018jxtd008)。

参考文献

[1] 殷新华. 高等数学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2019: 125-143.

[2] 段峰, 周同. 高等数学基础[M]. 成都: 电子科技大学出版社, 1999: 32-36.

[3] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019: 166-171.