Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(8), 2881-2887
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.108301

Hans汉斯

对称的完全二部多重有向图的$\vec{P}_7$-因子分解

朱 莉

南通职业大学，江苏 南通
Email: ntjulie@126.com

收稿日期：2021年7月26日；录用日期：2021年8月23日；发布日期：2021年8月30日

摘 要

如果对称完全二部多重有向图$\lambda K_{m,n}^{*}$的有向弧集可以分拆为$\lambda K_{m,n}^{*}$的$\vec{P}_k$-因子，则称$\lambda K_{m,n}^{*}$存在$\vec{P}_k$-因子分解。对称完全二部多重有向图$\lambda K_{m,n}^{*}$存在$\vec{P}_7$-因子分解的充分必要条件是：1) $3m \le 4n$，2) $3n \le 4m$，3) $m+n \equiv 0(\bmod 7)$，4) $7\lambda mn/[3(m,n)]$是整数。

关键词

二部多重有向图，因子，因子分解

$\vec{P}_7$-Factorization of Symmetric Complete Bipartite Multi-Digraphs

Li Zhu

Nantong Vocational University, Nantong Jiangsu
Email: ntjulie@126.com

Received: Jul. 26th, 2021; accepted: Aug. 23rd, 2021; published: Aug. 30th, 2021

Abstract

A $\vec{P}_k$-factorization $\lambda K_{m,n}^{*}$ is a set of arc-disjoint $\vec{P}_k$-factors of $\lambda K_{m,n}^{*}$. A necessary and sufficient condition for $\vec{P}_7$-factorization of $\lambda K_{m,n}^{*}$ is that: 1) $3m \le 4n$, 2) $3n \le 4m$, 3) $m+n \equiv 0(\bmod 7)$ and 4) $7\lambda mn/[3(m+n)]$.

文章引用: 朱莉. 对称的完全二部多重有向图的$\vec{P}_7$-因子分解[J]. 应用数学进展, 2021, 10(8): 2881-2887.
DOI: 10.12677/aam.2021.108301

Keywords

Complete Bipartite Multi-Digraphs, Factor, Factorization

1. 引言

本文所涉及的图均为有向图。$K_{m,n}^*$ 表示对称完全二部有向图，其点集划分为 X 和 Y 两个部分，分别具有 m 和 n 个点。$K_{m,n}^*$ 中来自不同部分的两个点有两条方向相反的有向弧相连，同一部分的两个点无有向弧相连。$\lambda K_{m,n}^*$ 表示多重图，它是 λ 个 $K_{m,n}^*$ 的并。如果 $\lambda K_{m,n}^*$ 的子图 F 包含了图的所有点，则称 F 为 $\lambda K_{m,n}^*$ 的一个生成子图。$\vec{P}_k$ 是具有 k 个点的有向路。若 $\lambda K_{m,n}^*$ 生成子图 F 的每个分支均同构于图 $\vec{P}_k$，则称 F 为 $\lambda K_{m,n}^*$ 的一个 $\vec{P}_k$-因子。如果 $\lambda K_{m,n}^*$ 有向弧集可以分拆为 $\lambda K_{m,n}^*$ 的 $\vec{P}_k$-因子，则称 $\lambda K_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_k$-因子分解。在文献[1]中，Ushio 称 $\lambda K_{m,n}^*$ 的 $\vec{P}_k$-因子分解为可分解的 (m,n,k,λ) 二部有向路设计。如果 $\lambda K_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_k$-因子分解，则称 $\lambda K_{m,n}^*$ 是可 $\vec{P}_k$-因子分解的。本文涉及到的其他图论概念，均参照图论著作[2] [3]。

$\lambda K_{m,n}^*$ 的 $\vec{P}_k$-因子分解存在性问题已有许多研究结论。k 是偶数时，Ushio [1]、Wang [4]和 Du [5]完全解决了 $\lambda K_{m,n}^*$ 的 $\vec{P}_k$-因子分解的存在性问题。k 是奇数时，$\lambda K_{m,n}^*$ 的 $\vec{P}_k$-因子分解的存在性问题复杂了很多。当 $k=3$ 时，Ushio [6]、Du [7]和 Wang [8]，完全解决了 $\lambda K_{m,n}^*$ 的 $\vec{P}_3$-因子分解的存在性问题。当 $k=5$ 时，Wang 和 Du [9]，完全解决了 $\lambda K_{m,n}^*$ 的 $\vec{P}_5$-因子分解的存在性问题。本文研究当 $k=7$ 时，对称完全二部多重有向图 $\lambda K_{m,n}^*$ 的 $\vec{P}_7$-因子分解的存在性。即证明 $\lambda K_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_7$-因子分解的充分必要条件。

定理 1.1 对称完全二部多重有向图 $\lambda K_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_7$-因子分解的充分必要条件是：1) $3m\le 4n$，2) $3n\le 4m$，3) $m+n\equiv 0 \pmod 7$，4) $7\lambda mn/\left[3(m+n)\right]$ 是整数。

2. 主要结论

通过简单计算，可得 $\lambda K_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_7$-因子分解的必要条件。

定理 2.1 如果对称完全二部多重有向图 $\lambda K_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_7$-因子分解，则 1) $3m\le 4n$，2) $3n\le 4m$，3) $m+n\equiv 0 \pmod 7$，4) $7\lambda mn/\left[3(m+n)\right]$ 是整数。

为了证明 $\lambda K_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_7$-因子分解的充分条件，需要以下几个引理，其中 $\gcd(a,b)$ 表示 a 和 b 的最大公约数。

引理 2.2 设 a,b,u 和 v 是正整数。如果 $\gcd(au,bv)=1$，则 $\gcd(uv,au+bv)=1$。

引理 2.3 设 s 是任意正整数。如果 $\lambda K_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_7$-因子分解，则 $\lambda sK_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_7$-因子分解。

引理 2.4 设 s 是任意正整数。如果 $\lambda K_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_7$-因子分解，则 $\lambda K_{ms,ns}^*$ 存在 $\vec{P}_7$-因子分解。

引理 2.2~2.4 的证明参见文献[7] [8]。

引理 2.5 $K_{3,4}^*$ 存在 $\vec{P}_7$-因子分解。

证明 设 $K_{3,4}^*$ 的两个部分点集为 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 和 $\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$，则

$$y_1x_1y_2x_2y_3x_3y_4,\quad y_4x_3y_3x_2y_2x_1y_1,\quad y_3x_1y_4x_2y_1x_3y_2,\quad y_2x_3y_1x_2y_4x_1y_3$$

是 $K_{3,4}^*$ 的 $\vec{P}_7$-因子分解。

根据引理 2.3、2.4 和 2.5，可得以下结论。

引理 2.6 当 $4m = 3n$ 或 $4n = 3m$ 时，$\lambda K_{m,n}^*$ 存在 $\bar{P}_7$-因子分解。

考虑 $3m < 4n$ 且 $3n < 4m$ 时的情形。此时，设 $a = (4n-3m)/7$，$b = (4m-3n)/7$，$t = (m+n)/7$ 和 $r = 7\lambda mn/[3(m+n)]$。显然 a,b,t,r 是整数，同时 $0 < a < m$，$0 < b < n$。于是 $3a+4b = m$，$4a+3b = n$。可得 $r = 4\lambda(a+b) + \lambda ab/[3(a+b)]$。令 $z = \lambda ab/[3(a+b)]$，则 z 是整数。令 $\gcd(3a,4b) = d$，$3a = dp$，$4b = dq$，$\gcd(p,q) = 1$。因而 $z = \lambda dpq/[3(4p+3q)]$。通过计算可得下列各式：

$$d = 3(4p+3q)z/(\lambda pq)$$

$$m = 3(p+q)(4p+3q)z/(\lambda pq)$$

$$n = (16p+9q)(4p+3q)z/(4\lambda pq)$$

$$r = (p+q)(16p+9q)z/(pq)$$

$$a = p(4p+3q)z/(\lambda pq)$$

$$b = 3q(4p+3q)z/(4\lambda pq)$$

为了对上面的则有式子进行分类，我们引入以下引理

引理 2.7 1) 假设 $\gcd(p,9) = 1$，$\gcd(q,16) = 1$，令 $\gcd(4p+3q,\lambda) = \gamma$，那么

$$m = 12(p+q)(4p+3q)s/\gamma,\quad n = (16p+9q)(4p+3q)s/\gamma,$$

$$r = 4(p+q)(16p+9q)s\lambda/\gamma,\quad a = 4p(4p+3q)s/\gamma,\quad b = 3q(4p+3q)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

2) 假设 $\gcd(p,9) = 1$，$\gcd(q,16) = 2$，设 $q = 2q_1$，令 $\gcd(2p+3q_1,\lambda) = \gamma$，那么

$$m = 6(p+2q_1)(2p+3q_1)s/\gamma,\quad n = (8p+9q_1)(2p+3q_1)s/\gamma,$$

$$r = 2(p+2q_1)(8p+9q_1)s\lambda/\gamma,\quad a = 2p(2p+3q_1)s/\gamma,\quad b = 3q_1(2p+3q_1)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

3) 假设 $\gcd(p,9) = 1$，$\gcd(q,16) = 4$，设 $q = 4q_2$，令 $\gcd(2(p+3q_2),\lambda) = \gamma$，那么

$$m = 3(p+4q_2)(p+3q_2)s/\gamma,\quad n = (4p+9q_2)(p+3q_2)s/\gamma,$$

$$r = (p+4q_2)(4p+9q_2)s\lambda/\gamma,\quad a = p(p+3q_2)s/\gamma,\quad b = 3q_2(p+3q_2)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

4) 假设 $\gcd(p,9) = 1$，$\gcd(q,16) = 8$，设 $q = 8q_3$，令 $\gcd(p+6q_3,\lambda) = \gamma$，那么

$$m = 3(p+8q_3)(p+6q_3)s/\gamma,\quad n = 2(2p+9q_3)(p+6q_3)s/\gamma,$$

$$r = 2(p+8q_3)(2p+9q_3)s\lambda/\gamma,\quad a = p(p+6q_3)s/\gamma,\quad b = 6q_3(p+3q_3)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

5) 假设 $\gcd(p,9) = 1$，$\gcd(q,16) = 16$，设 $q = 16q_4$，令 $\gcd(p+12q_4,\lambda) = \gamma$，那么

$$m = 3(p+16q_4)(p+12q_4)s/\gamma,\quad n = 4(p+9q_4)(p+12q_4)s/\gamma,$$

$$r = 4(p+16q_4)(p+9q_4)s\lambda/\gamma,\quad a = p(p+12q_4)s/\gamma,\quad b = 12q_4(p+12q_4)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

6) 假设 $\gcd(p,9) = 3$，$\gcd(q,16) = 1$，设 $p = 3p_1$，令 $\gcd(3(4p_1+q),\lambda) = \gamma$，那么

$$m=12(3p_1+q)(4p_1+q)s/\gamma,\quad n=3(16p_1+3q)(4p_1+q)s/\gamma,$$

$$r=4(3p_1+q)(16p_1+3q)s\lambda/\gamma,\quad a=12p_1(4p_1+q)s/\gamma,\quad b=3q(4p_1+q)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

7) 假设 $\gcd(p,9)=3$， $\gcd(q,16)=2$，设 $p=3p_1$， $q=2q_1$，令 $\gcd(2p_1+q_1,\lambda)=\gamma$，那么

$$m=6(3p_1+2q_1)(2p_1+q_1)s/\gamma,\quad n=3(8p_1+3q_1)(2p_1+q_1)s/\gamma,$$

$$r=2(3p_1+2q_1)(8p_1+3q_1)s\lambda/\gamma,\quad a=6p_1(2p_1+q_1)s/\gamma,\quad b=3q_1(2p_1+q)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

8) 假设 $\gcd(p,9)=3$， $\gcd(q,16)=4$，设 $p=3p_1$， $q=4q_2$，令 $\gcd(6(p_1+q_2),\lambda)=\gamma$，那么

$$m=3(3p_1+4q_2)(p_1+q_2)s/\gamma,\quad n=3(4p_1+3q_2)(p_1+q_2)s/\gamma,$$

$$r=2(3p_1+4q_2)(4p_1+3q_2)s\lambda/\gamma,\quad a=3p_1(p_1+q_2)s/\gamma,\quad b=3q_2(p_1+q_2)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

9) 假设 $\gcd(p,9)=3$， $\gcd(q,16)=8$，设 $p=3p_1$， $q=8q_3$，令 $\gcd(3(p_1+2q_3),\lambda)=\gamma$，那么

$$m=3(3p_1+8q_3)(p_1+2q_3)s/\gamma,\quad n=6(2p_1+3q_3)(p_1+2q_3)s/\gamma,$$

$$r=2(3p_1+8q_3)(2p_1+3q_3)s\lambda/\gamma,\quad a=3p_1(p_1+2q_3)s/\gamma,\quad b=6q(p_1+2q_3)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

10) 假设 $\gcd(p,9)=3$， $\gcd(q,16)=16$，设 $p=3p_1$， $q=16q_4$，令 $\gcd(3(p_1+4q_4),\lambda)=\gamma$，那么

$$m=3(3p_1+16q_4)(p_1+4q_4)s/\gamma,\quad n=12(p_1+3q_4)(p_1+4q_4)s/\gamma,$$

$$r=4(3p_1+16q_4)(p_1+3q_4)s\lambda/\gamma,\quad a=3p_1(p_1+4q_4)s/\gamma,\quad b=12q_4(p_1+4q_4)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

11) 假设 $\gcd(p,9)=9$， $\gcd(q,16)=1$，设 $p=9p_2$，令 $\gcd(12p_2+q,\lambda)=\gamma$，那么

$$m=4(9p_2+q)(12p_2+q)s/\gamma,\quad n=3(16p_2+3q)(12p_2+q)s/\gamma,$$

$$r=4(9p_2+q)(16p_1+q)s\lambda/\gamma,\quad a=12p_2(12p_2+q)s/\gamma,\quad b=q(12p_2+q)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

12) 假设 $\gcd(p,9)=9$， $\gcd(q,16)=2$，设 $p=9p_2$， $q=2q_1$，令 $\gcd(6p_2+q_1,\lambda)=\gamma$，那么

$$m=2(9p_2+2q_1)(6p_2+q_1)s/\gamma,\quad n=3(8p_2+q_1)(6p_2+q_1)s/\gamma,$$

$$r=2(9p_2+2q_1)(8p_2+3q_1)s\lambda/\gamma,\quad a=6p_2(6p_2+q_1)s/\gamma,\quad b=q_1(6p_2+q_1)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

13) 假设 $\gcd(p,9)=9$， $\gcd(q,16)=4$，设 $p=9p_2$， $q=4q_2$，令 $\gcd(2(3p_2+q_2),\lambda)=\gamma$，那么

$$m=(9p_2+4q_2)(3p_2+q_2)s/\gamma,\quad n=3(4p_2+q_2)(3p_2+q_2)s/\gamma,$$

$$r=(9p_2+4q_2)(4p_2+q_2)s\lambda/\gamma,\quad a=3p_2(3p_2+q_2)s/\gamma,\quad b=q_2(3p_2+q_2)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

14) 假设 $\gcd(p,9)=9$， $\gcd(q,16)=8$，设 $p=9p_2$， $q=8q_3$，令 $\gcd(3p_2+2q_3,\lambda)=\gamma$，那么

$$m=(9p_2+8q_3)(3p_2+2q_3)s/\gamma,\quad n=6(2p_2+q_3)(3p_2+2q_3)s/\gamma,$$

$$r=2(9p_2+8q_3)(2p_2+q_3)s\lambda/\gamma，\ a=3p_2(3p_2+2q_3)s/\gamma，\ b=2q_3(3p_2+2q_3)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

15) 假设 $\gcd(p,9)=9$，$\gcd(q,16)=16$，设 $p=9p_2$，$q=16q_4$，令 $\gcd(3p_2+4q_4,\lambda)=\gamma$，那么

$$m=(9p_2+16q_4)(3p_2+4q_4)s/\gamma，\ n=12(p_2+q_4)(3p_2+4q_4)s/\gamma，$$

$$r=4(9p_2+16q_4)(p_2+q_4)s\lambda/\gamma，\ a=3p_2(3p_2+4q_4)s/\gamma，\ b=4q_4(3p_2+4q_4)s/\gamma$$

这里 s 为正整数。

证明 (1)根据题意有 $\gcd(p,9)=\gcd(q,16)=\gcd(p,q)=1$，所以 $\gcd(16p+9q,2)=\gcd(4p+3q,2)=1$ 且 $\gcd(16p,9q)=\gcd(4p,3q)=1$。这样

$$n=(16p+9q)(4p+3q)z/(4\lambda pq)。$$

根据引理 2.2，得 $\gcd(pq,16p+9q)=\gcd(pq,4p+3q)=1$。于是 $z/(4pq)$ 是正整数。设 $z'=z/(4pq)$。令 $\gcd(4p(4p+3q),\lambda)=\gamma_1$，$\gcd(q(4p+3q),\lambda)=\gamma_2$。由 $a=4p(4p+3q)z'/\lambda$，$b=3q(4p+3q)z'/\lambda$。可得 $z'\gamma_1/\lambda$ 和 $z'\gamma_2/\lambda$ 是正整数。由于 $\gcd(4p,3q)=1$，因此 $z'\gamma/\lambda$ 是正整数，其中 $\gcd(4p+3q,\lambda)=\gamma$。记 $s=z'\gamma/\lambda$，于是可得 1)中的结论。

2)~15)中各式的结论同理可证。

引理 2.8 设 η，p 和 q 是正整数，如果 $m=3(p+4q)(p+3q)$，$n=(4p+9q_2)(p+3q)$，那么当 $(p+3q)/\eta$ 是正整数时，$\eta K^*_{m,n}$ 存在 $\bar{P}_7$-因子分解。

证明 设 $r=(p+4q)(4p+9q)$，$a=p(p+3q)$，$b=3q(p+3q)$，$r_1=p+4q$ 和 $r_2=4p+9q$。并设 X 和 Y 是多重二部图 $\eta K^*_{m,n}$ 的两个部分点集

$$X=\{x_{ij}\mid 1\le i\le r_1, 1\le j\le 3(p+3q)/\eta\}，$$

$$Y=\{y_{ij}\mid 1\le i\le r_2, 1\le j\le (p+3q)/\eta\}。$$

以下通过直接构造，证明 $\eta K_{m,n}$ 存在 $\bar{P}_7$-因子分解。约定 x_{ij} 的第一个下标 i 和第二个下标 j 分别在 $\{1,2,\cdots,r_1\}$ 和 $\{1,2,\cdots,3(p+3q)/\eta\}$ 中进行模 r_1 和模 $3(p+3q)/\eta$ 的运算；y_{ij} 的第一个下标 i 和第二个下标 j 分别在 $\{1,2,\cdots,r_2\}$ 和 $\{1,2,\cdots,(p+3q)/\eta\}$ 中进行模 r_2 和模 $(p+3q)/\eta$ 的运算。

对于正整数 i，$1\le i\le p$，构造如下有向弧集

$$\begin{aligned}E_i=&\left\{x_{i,j+(u-1)(p+3q)/\eta}y_{4(i-1)+u,j+i}:1\le j\le (p+3q)/\eta, 1\le u\le 3\right\}\\&\cup\left\{y_{4(i-1)+u+1,j+i+1}x_{i,j+(u-1)(p+3q)/\eta}:1\le j\le (p+3q)/\eta, 1\le u\le 3\right\}\end{aligned}。$$

对于正整数 i，$1\le i\le q$，构造如下有向弧集

$$\begin{aligned}E_{p+i}=&\left\{x_{p+4(i-1)+u,j+(v-1)(p+3q)/\eta}y_{4p+9(i-1)+3(v-1)+u,p+3(i-1)+u+j}:1\le j\le (p+3q)/\eta, 1\le u,v\le 3\right\}\\&\cup\left\{y_{4p+9(i-1)+3(v-1)+u,p+3(i-1)+u+j}x_{p+4(i-1)+u+1,j+(v-1)(p+3q)/\eta}:1\le j\le (p+3q)/\eta, 1\le u,v\le 3\right\}\end{aligned}。$$

记 $F=\cup_{1\le i\le p+q}E_i$，那么 F 是 $\eta K^*_{m,n}$ 的一个 $\bar{P}_7$-因子。定义一个双射

$$\sigma:\sigma(x_{i,j})=x_{i+1,j},\sigma(y_{i,j})=y_{i+1,j}。$$

对于每一个 i 和每一个 j(其中 $i\in\{1,2,\cdots,r_1\}$，$j\in\{1,2,\cdots,r_2\}$)，令

$$F_{i,j}=\{\sigma^i(x_j)\sigma^i(y_j)\mid x\in X, y\in Y, xy\in F\}。$$

通过验证可知每一个 $F_{i,j}\left(1\le i\le r_1,1\le j\le r_2\right)$ 都是 $\eta K_{m,n}^*$ 的 $\vec{P}_7$ -因子。并且它们有限弧集的并构成 $\eta K_{m,n}^*$，于是 $\left\{F_{i,j}\left(1\le i\le r_1,1\le j\le r_2\right)\right\}$ 就是 $\eta K_{m,n}^*$ 的一个 $\vec{P}_7$ -因子分解。

下列引理 2.9 和引理 2.10 的证明过程同引理 2.8 类似，我们在证明中只写出二部图的两个部分点集 X、Y 的表达式和有向弧集 E_i、E_{p+i} 的表达式。

引理 2.9 设 η，p 和 q 是正整数，如果 $m=12(3p+q)(4p+q)$，$n=3(16p+3q)(4p+q)$，那么当 $3(4p+q)/\eta$ 是正整数时，$\eta K_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_7$ -因子分解。

证明 设 $r=4(3p+q)(16p+q)$，$a=12p(4p+q)$，$b=3q(4p+q)$，$r_1=4(3p+q)$ 和 $r_2=16p+q$。并设

$$X=\left\{x_{ij}\mid 1\le i\le r_1,1\le j\le 3(4p+q)/\eta\right\},$$

$$Y=\left\{y_{ij}\mid 1\le i\le r_2,1\le j\le 3(4p+q)/\eta\right\}。$$

对于正整数 i ($1\le i\le 4p$)，构造有向弧集

$$\begin{aligned}E_i=&\left\{x_{3(i-1)+u,j}y_{4(i-1)+u,j+3(i-1)+u}:1\le j\le 3(4p+q)/\eta,1\le u\le 3\right\}\\&\cup\left\{y_{4(i-1)+u+1,j+3(i-1)+u+1}x_{3(i-1)+u,j}:1\le j\le 3(4p+q)/\eta,1\le u\le 3\right\}\end{aligned}$$

对于正整数 i ($1\le i\le q$)，构造有向弧集

$$\begin{aligned}E_{p+i}=&\left\{x_{12p+4(i-1)+u,j}y_{16p+3(i-1)+u,12p+3(i-1)+u+j}:1\le j\le 3(4p+q)/\eta,1\le u\le 3\right\}\\&\cup\left\{y_{16p+3(i-1)+u,12p+3(i-1)+u+j}x_{12p+4(i-1)+u+1,j}:1\le j\le 3(4p+q)/\eta,1\le u\le 3\right\}\end{aligned}。$$

引理 2.10 设 η，p 和 q 是正整数，如果 $m=6(3p+2q)(2p+q)$，$n=3(8p+3q)(2p+q)$，那么当 $3(2p+q)/\eta$ 是正整数时，$\eta K_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_7$ -因子分解。

证明 设 $r=2(3p+2q)(8p+3q)$，$a=6p(2p+q)$，$b=3q(2p+q)$，$r_1=2(3p+2q)$ 和 $r_2=8p+3q$。并设

$$X=\left\{x_{ij}\mid 1\le i\le r_1,1\le j\le 3(2p+q)/\eta\right\},$$

$$Y=\left\{y_{ij}\mid 1\le i\le r_2,1\le j\le 3(2p+q)/\eta\right\}。$$

对于正整数 i ($1\le i\le 2p$)，构造有向弧集

$$\begin{aligned}E_i=&\left\{x_{3(i-1)+u,j}y_{4(i-1)+u,j+3(i-1)+u}:1\le j\le 3(2p+q)/\eta,1\le u\le 3\right\}\\&\cup\left\{y_{4(i-1)+u+1,j+3(i-1)+u+1}x_{3(i-1)+u,j}:1\le j\le 3(2p+q)/\eta,1\le u\le 3\right\}\end{aligned}。$$

对于正整数 i ($1\le i\le q$)，构造有向弧集

$$\begin{aligned}E_{p+i}=&\left\{x_{6p+4(i-1)+u,j}y_{8p+3(i-1)+u,6p+3(i-1)+u+j}:1\le j\le 3(2p+q)/\eta,1\le u\le 3\right\}\\&\cup\left\{y_{8p+3(i-1)+u,6p+3(i-1)+u+j}x_{6p+4(i-1)+u+1,j}:1\le j\le 3(2p+q)/\eta,1\le u\le 3\right\}\end{aligned}。$$

引理 2.8~2.10 构造了引理 2.7 中情形 3、情形 6 和情形 7 的 $\vec{P}_7$ -因子分解。分别令引理 2.8 中 p 的为 $2p'$、$3p'$、$4p'$、$2q'$、$4q'$，可得到引理 2.7 中的情形 2、情形 8、情形 1、情形 4 和情形 5，再将情形 1~7 中的 p 和 q 互换，则得情形 9~15。于是结合引理 2.3~2.10，我们可得 $\lambda K_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_7$ -因子分解的充分条件。

定理 2.11 如果正整数 λ，m 和 n 满足 1) $3m\le 4n$，2) $3n\le 4m$，3) $m+n\equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$，4) $7\lambda mn/\left[3(m+n)\right]$ 是整数，则对称的完全二部多重有向图 $\lambda K_{m,n}^*$ 存在 $\vec{P}_7$ -因子分解。

结合定理 2.1 和定理 2.11，即可完成定理 1.1 的证明。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11571251)。

参考文献

[1] Ushio, K. (1993) *G*-Designs and Related Designs. *Discrete Mathematics*, **116**, 299-311. https://doi.org/10.1016/0012-365X(93)90408-L

[2] Harary, F. (1972) Graph Theory. Addison-Wesley, Massachusetts.

[3] Chartrand, G. and Lesniak, L. (1986) Graphs and Digraphs. 2nd Edition, Wadsworth, California.

[4] Wang, H. (1993) P_{2k}-Factorization of Complete Bipartite Graph. *Discrete Mathematics*, **120**, 307-308. https://doi.org/10.1016/0012-365X(93)90593-I

[5] Du, B.L. (2000) P_{2k}-Factorization of Complete Bipartite Multigraphs. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **21**, 275-278.

[6] Ushio, K. (1988) P_3-Factorization of Complete Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, **72**, 361-366. https://doi.org/10.1016/S0167-5060(08)70804-5

[7] Du, B.L. (2003) $\bar{P}_3$ -Factorization of Complete Bipartite Symmetric Digraphs. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **19**, 275-278.

[8] Wang, J. and Du, B.L. (2003) $\hat{P}_3$ -Factorization of Complete Bipartite Multigraphs and Symmetric Complete Bipartite Multi-Digraphs. *Utilitas Mathematic*, **63**, 213-228.

[9] Wang, J. and Du, B.L. (2005) $\bar{P}_5$ -Factorization of Symmetric Complete Bipartite Multi-Digraphs. *Utilitas Mathematic*, **79**, 129-137.