Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(1), 342-348
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.111042

Hans汉斯

广义E-凸区间值优化问题的最优性条件

王辉辉，王海军，杜佳楠

太原师范学院数学系，山西 晋中

收稿日期：2021年12月24日；录用日期：2022年1月14日；发布日期：2022年1月27日

摘 要

本文研究带不等式和等式约束的广义E-凸区间值优化问题(IOP_E)，引入E-∂_C凸，E-∂_C伪凸，严格E-∂_C伪凸，E-∂_C拟凸等广义E-凸性条件，给出(IOP_E)的必要性和充分性最优性条件。

关键词

E-凸区间值优化问题，广义E-凸性，E-KKT最优性条件

Optimality Conditions for Generalized *E*-Convex Interval-Valued Optimization Problems

Huihui Wang, Haijun Wang, Jia'nan Du

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: Dec. 24th, 2021; accepted: Jan. 14th, 2022; published: Jan. 27th, 2022

Abstract

In this paper, we studied the generalized *E*-convex interval-valued optimization problems with inequality and equality constraints (IOP_E). We gave the necessary and sufficient optimality conditions for (IOP_E) by the generalized *E*-convex conditions, such as E-∂_C convexity, E-∂_C pseudoconvexity, strict E-∂_C pseudoconvexity, E-∂_C quasiconvexity.

Keywords

***E*-Convex Interval-Valued Optimization Problems, Generalized *E*-Convexity, *E-KKT* Optimality**

文章引用: 王辉辉, 王海军, 杜佳楠. 广义 E-凸区间值优化问题的最优性条件[J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 342-348.
DOI: 10.12677/aam.2022.111042

Conditions

1. 引言

近年来许多学者讨论了参数不确定的数学规划问题，区间值优化问题就是其中一种。Wu [1]研究了一类区间值优化问题，提出了一种新的凸性概念(*LU*-凸)，并给出一些区间值优化问题的最优性条件。Sun 和 Wang [2]研究了带有不等式约束的不可微区间值规划问题，给出了该问题的 *FJ* 和 *KKT* 型必要和充分最优性条件。Tung [3]研究了带有不等式约束的凸半无限区间值规划问题，在凸性假设下给出了 *KKT* 型必要和充分最优性条件。Ahmad [4]等研究了带有消失约束的连续可微区间值优化问题(*IVVC*)，并在一定的约束条件下给出了 *IVVC* 的充分和必要最优性条件。

凸性是最优化问题中的重要性质，许多学者引入了较弱的凸性的条件。Youness [5]首先提出了 *E*-凸集、*E*-凸函数等定义，并给出这些定义在 *E*-凸规划问题中的一些应用。蔡章华和范晓冬[6]给出了 *E*-凸区间值函数及其在优化问题中的应用。Luu 和 Mai [7]在广义凸性假设下，研究了一类带有不等式约束和等式约束的不可微区间值优化问题，给出了该问题的 *FJ* 和 *KKT* 型必要最优性条件。Abdulaleem [8]研究了 *E*-可微的多目标规划问题，在广义 *E*-凸性假设下，给出该问题的 *E-KKT* 必要和充分最优性条件。Antczak 和 Abdulaleem [9]研究了 *E*-可微的多目标区间值优化问题，在广义 *E*-凸性假设下，给出该问题的 *E-KKT* 必要和充分最优性条件。邓春艳等[10]研究了 *E*-可微的 *LU-E*-不变凸区间值优化问题和 *LU-E*-预不变凸区间值优化问题。

受上述文献的启发，本文引入广义 E-∂_C 凸性概念，讨论了广义 *E*-凸区间值优化问题(IOP_E)的必要和充分最优性条件。

2. 预备知识

设 R^n 是一个 n 维欧氏空间，$\langle \cdot,\cdot \rangle$ 表示 R^n 上的内积。任给 $\bar{x} \in R^n$，$U(\bar{x})$ 表示在点 $\bar{x}$ 处的邻域。设 $C \subseteq R^n$，clC，$convC$ 分别表示 C 的闭包和凸包，C 在点 $\bar{x} \in clC$ 处的切锥定义为：

$$T(C,\bar{x}) := \left\{ v \in R^n \mid \exists t_n \to 0, \exists v_n \to v, \forall n \in N, \bar{x} + t_n v_n \in C \right\},$$

C 的严格负极锥表示为：

$$C^s := \left\{ x^* \in R^n \mid \left\langle x^*, x \right\rangle < 0, \forall x \in C \setminus \{0\} \right\}.$$

设 f 是 $R^n \to R$ 上的局部 Lipschitz 函数，则 f 在点 $\bar{x}$ 处关于方向 v 的 Clarke 方向导数为

$$f_c'(\bar{x}, v) := \limsup_{x \to \bar{x}, t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

f 在点 $\bar{x}$ 处的 Clarke 次微分定义为

$$\partial_C f(\bar{x}) := \left\{ \xi \in R^n : \langle \xi, v \rangle \le f_c'(\bar{x}, v), \forall v \in R^n \right\}.$$

众所周知，$\partial_C f(\bar{x})$ 在 R^n 上是一个非空凸紧集，集值映射 $\bar{x} \to \partial_C f(\bar{x})$ 是上半连续的。

性质 2.1 [11]设 $f:R^n\to R$ 在点 $\bar{x}$ 处是局部 Lipschitz 的，则

$$f_c'(\bar{x},v)=\max\{\langle\xi,v\rangle:\xi\in\partial_C f(\bar{x})\},\forall v\in R^n.$$

设 D 是 R 上所有闭区间的集合。对任意的 $A=[a_1,a_2](a_1\le a_2)$，$B=[b_1,b_2]\in D$，规定 $-A=[-a_2,-a_1]$，$A+B=[a_1+b_1,a_2+b_2]$，$A-B=[a_1-b_2,a_2-b_1]$，以及下面的 LU 序关系(见文献[12])。

$$A\le_{LU} B\Leftrightarrow a_1\le b_1,a_2\le b_2,$$
$$A<_{LU} B\Leftrightarrow A\le_{LU} B,A\ne B,$$
$$A<_{LU}^{s} B\Leftrightarrow a_1<b_1,a_2<b_2.$$

定义 2.1 [9]称集合 $M\subseteq R^n$ 是 E-凸的，如果存在映射 $E:R^n\to R^n$ 使得对每个 $x,y\in M$，$0\le\lambda\le 1$ 满足 $(1-\lambda)E(x)+\lambda E(y)\in M$。

定义 2.2 [9]称函数 $f:M\to R$ 在 $M\subseteq R^n$ 上是 E-凸的，当且仅当存在映射 $E:R^n\to R^n$ 使得 M 是非空 E-凸集且

$$f(\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y))\le\lambda f(E(x))+(1-\lambda)f(E(y)).$$

下面我们给出广义 E-∂_C 凸性定义。

定义 2.3 设 $M\subseteq R^n$，函数 $f:M\to R$ 在点 $\bar{x}\in M$ 处是局部 Lipschitz 的，且存在映射 $E:R^n\to R^n$ 使得 M 是非空 E-凸集，称 f 在点 $\bar{x}$ 处是 E-∂_C 凸的，如果对 $\forall x\in M$，有

$$f(E(x))-f(E(\bar{x}))\ge\langle\xi,x-\bar{x}\rangle,\ \forall\xi\in\partial_C f(E(\bar{x})).$$

定义 2.4 设 $M\subseteq R^n$，函数 $f:M\to R$ 在点 $\bar{x}\in M$ 处是局部 Lipschitz 的，且存在映射 $E:R^n\to R^n$ 使得 M 是非空 E-凸集，

1) 称 f 在点 $\bar{x}$ 处是 E-∂_C 伪凸的，如果对 $\forall x\in M$，有

$$f(E(x))-f(E(\bar{x}))<0\Rightarrow\langle\xi,x-\bar{x}\rangle<0,\ \forall\xi\in\partial_C f(E(\bar{x})).$$

2) 称 f 在点 $\bar{x}$ 处是严格 E-∂_C 伪凸的，如果对 $\forall x\in M$，$x\ne\bar{x}$，有

$$f(E(x))-f(E(\bar{x}))\le 0\Rightarrow\langle\xi,x-\bar{x}\rangle<0,\ \forall\xi\in\partial_C f(E(\bar{x})).$$

3) 称 f 在点 $\bar{x}$ 处是 E-∂_C 拟凸的，如果对 $\forall x\in M$，有

$$f(E(x))-f(E(\bar{x}))\le 0\Rightarrow\langle\xi,x-\bar{x}\rangle\le 0,\ \forall\xi\in\partial_C f(E(\bar{x})).$$

注 2.1 可以看出，当函数 f 是 E-∂_C 凸时，它也是 E-∂_C 伪凸或 E-∂_C 拟凸的；当 f 是 E-可微时，定义 2.4 即为[9]中定义 2.8~2.11；当 $E(x)=x$，$M=R^n$ 时，定义 2.3，2.4 又为[11]中定义的广义凸性概念。

3. 广义 E-凸区间值优化问题

我们讨论如下的区间值优化问题(见文献[9])。

$$(IOP_E):\min F(E(x))=[F^L(E(x)),F^U(E(x))]$$

$$\text{s.t.}\quad g_j(E(x))\le 0,\ j\in J=\{1,\cdots,m\},$$
$$h_i(E(x))=0,i\in I=\{1,\cdots,n\}.$$

其中 $F:M\to D$，$g_j:M\to R,j\in J$，$h_i:M\to R,i\in I$ 在 $M\subseteq R^n$ 上是局部 Lipschitz 的，$E:R^n\to R^n$ 是一对一映射使得 M 是非空 E-凸集。

设 $A_E := \left\{x \in M : g_j\left(E(x)\right) \le 0, j \in J, h_i\left(E(x)\right) = 0, i \in I\right\}$ 为(IOP_E)的可行集，$J\left(E(x)\right) = \left\{j \in J : g_j\left(E(x)\right) = 0\right\}$ 是可行点 x 处的积极指标集。

定义 3.1 [9]称可行点 $\bar{x}$ 是(IOP_E)的局部 LU 最优解，如果不存在 $x \in A_E \cap U(\bar{x})$ 使得 $F\left(E(x)\right) <_{LU} F\left(E(\bar{x})\right)$ 成立。

定义 3.2 [9]称可行点 $\bar{x}$ 是(IOP_E)的局部弱 LU 最优解，如果不存在 $x \in A_E \cap U(\bar{x})$ 使得 $F\left(E(x)\right) <_{LU}^{s} F\left(E(\bar{x})\right)$ 成立。

定义 3.3 [8]称(IOP_E)在点 $\bar{x}$ 处满足 E-Abadie 约束条件(ACQ_E)，如果

$$T\left(A_E, \bar{x}\right) = L_E\left(\bar{x}\right).$$

其中

$$L_E\left(\bar{x}\right) = \left\{v \in R^n \mid \left\langle \xi_j^g, v\right\rangle \le 0, \forall \xi_j^g \in \partial_C g_j\left(E(\bar{x})\right), j \in J\left(E(\bar{x})\right), \left\langle \xi_i^h, v\right\rangle = 0, \forall \xi_i^h \in \partial_C h_i\left(E(\bar{x})\right), i \in I\right\}$$

表示(IOP_E)在点 $\bar{x}$ 处的 E-线性锥。

定理 3.1 [13] (Motzkin 择一定理)设 D_1, D_2, D_3 为给定的矩阵，D_1 是非空的。则下面两个结论有且仅有一个成立。

1) 方程 $D_1 x < 0$，$D_2 x \le 0$，$D_3 x = 0$ 有解 x。

2) 方程 $D_1^{\mathrm{T}} y_1 + D_2^{\mathrm{T}} y_2 + D_3^{\mathrm{T}} y_3 = 0$，$y_1 \ge 0$，$y_2 \ge 0$ 有解 y_1，y_2，y_3。

定理 3.2 (E-KKT 必要最优性条件)设 $\bar{x}$ 是(IOP_E)的局部弱 LU 最优解。如果(ACQ_E)在点 $\bar{x}$ 处成立，则存在拉格朗日乘子 $\alpha^L, \alpha^U \in R_+$ ($\alpha^L + \alpha^U = 1$)，$\lambda \in R^m$ ($\lambda_j \ge 0, j \in J\left(E(\bar{x})\right)$)，$\mu \in R^n$ 使得

$$0 \in \alpha^L \partial_C F^L\left(E(\bar{x})\right) + \alpha^U \partial_C F^U\left(E(\bar{x})\right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \partial_C g_j\left(E(\bar{x})\right) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \partial_C h_i\left(E(\bar{x})\right), \tag{3.1}$$

$$\lambda_j g_j\left(E(\bar{x})\right) = 0,\ \lambda \ge 0 \tag{3.2}$$

证明：首先证

$$\left(\partial_C F^L\left(E(\bar{x})\right) \cup \partial_C F^U\left(E(\bar{x})\right)\right)^s \cap T\left(A_E, \bar{x}\right) = \phi. \tag{3.3}$$

假设存在 $v \in \left(\partial_C F^L\left(E(\bar{x})\right) \cup \partial_C F^U\left(E(\bar{x})\right)\right)^s \cap T\left(A_E, \bar{x}\right)$，可得

$$\left\langle \xi^L, v\right\rangle < 0, \forall \xi^L \in \partial_C F^L\left(E(\bar{x})\right),$$

且

$$\left\langle \xi^U, v\right\rangle < 0, \forall \xi^U \in \partial_C F^U\left(E(\bar{x})\right).$$

因为 F^L，F^U 在点 $\bar{x}$ 处是局部 Lipschitz 的，由性质 2.1 可知，存在

$$x^* \in \partial_C F^L\left(E(\bar{x})\right)$$

使得

$$\left(F^L\right)_c'\left(E(\bar{x}), v\right) = \max_{\xi^L \in \partial_C F^L\left(E(\bar{x})\right)} \left\langle \xi^L, v\right\rangle = \left\langle x^*, v\right\rangle < 0,$$

同理有

$$\left(F^U\right)_c'\left(E(\bar{x}), v\right) < 0.$$

又由 $v \in T\left(A_E, \bar{x}\right)$ 可得

$$\left(F^L\right)_c'\left(E\left(\bar{x}\right), v\right) = \limsup_{v_n \to v, t_n \downarrow 0} \frac{F^L\left(E\left(\bar{x}\right) + t_n v_n\right) - F^L\left(E\left(\bar{x}\right)\right)}{t_n} \geq 0,$$

或

$$\left(F^U\right)_c'\left(E\left(\bar{x}\right), v\right) = \limsup_{v_n \to v, t_n \downarrow 0} \frac{F^U\left(E\left(\bar{x}\right) + t_n v_n\right) - F^U\left(E\left(\bar{x}\right)\right)}{t_n} \geq 0.$$

产生矛盾，所以(3.3)成立。又因为(ACQ_E)在点 $\bar{x}$ 处成立，故

$$\left(\partial_C F^L\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \cup \partial_C F^U\left(E\left(\bar{x}\right)\right)\right)^s \cap L_E\left(\bar{x}\right) = \phi,$$

即下式

$$\begin{cases} \left\langle \xi^L, x - \bar{x} \right\rangle < 0, & \forall \xi^L \in \partial_C F^L\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \\ \left\langle \xi^U, x - \bar{x} \right\rangle < 0, & \forall \xi^U \in \partial_C F^U\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \\ \left\langle \xi_j^g, x - \bar{x} \right\rangle \leq 0, & \forall \xi_j^g \in \partial_C g_j\left(E\left(\bar{x}\right)\right), j \in J\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \\ \left\langle \xi_i^h, x - \bar{x} \right\rangle = 0, & \forall \xi_i^h \in \partial_C h_i\left(E\left(\bar{x}\right)\right), i \in I \end{cases}$$

不成立。再由定理 3.1 可知存在 $\alpha^L, \alpha^U \in R_+$， $\eta \in R^{J(E(\bar{x}))}$， $\eta \geq 0$， $\mu \in R^n$ 使得

$$0 \in \alpha^L \partial_C F^L\left(E\left(\bar{x}\right)\right) + \alpha^U \partial_C F^U\left(E\left(\bar{x}\right)\right) + \sum_{j \in J(E(\bar{x}))} \eta_j \partial_C g_j\left(E\left(\bar{x}\right)\right) + \sum_{i=1}^n \mu_i \partial_C h_i\left(E\left(\bar{x}\right)\right)$$

成立。再取 $\begin{cases} \lambda_j = \eta_j, j \in J\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \\ \lambda_j = 0, j \notin J\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \end{cases}$，即得(3.1)和(3.2)式。证毕。

注 3.1 满足定理 3.2 中(3.1)和(3.2)式的点 $\left(\bar{x}, \alpha^L, \alpha^U, \lambda, \mu\right)$，称为($IOP_E$)的 *KKT* 点。

定理 3.3 设 $\left(\bar{x}, \alpha^L, \alpha^U, \lambda, \mu\right)$ 是(IOP_E)的一个 *KKT* 点， $I^+\left(E\left(\bar{x}\right)\right) = \left\{i \in I : \mu_i > 0\right\}$， $I^-\left(E\left(\bar{x}\right)\right) = \left\{i \in I : \mu_i < 0\right\}$。如果下面的条件成立：

1) 函数 F^L， F^U 在点 $\bar{x}$ 处是 E-∂_C 凸的，

2) 函数 g_j， $j \in J\left(E\left(\bar{x}\right)\right)$ 在点 $\bar{x}$ 处是 E-∂_C 凸的，

3) 函数 $h_i\left(i \in I^+\left(E\left(\bar{x}\right)\right)\right)$， $-h_i\left(i \in I^-\left(E\left(\bar{x}\right)\right)\right)$ 在点 $\bar{x}$ 处是 E-∂_C 凸的。

则 $\bar{x}$ 是(IOP_E)的局部弱 *LU* 最优解。

证明：反证法。假设 $\bar{x}$ 不是(IOP_E)的局部弱 *LU* 最优解，则存在 $x \in A_E \cap U\left(\bar{x}\right)$，满足 $F\left(E\left(x\right)\right) <_{LU}^s F\left(E\left(\bar{x}\right)\right)$。由条件 1)~3)，可得

$$F^L\left(E\left(x\right)\right) - F^L\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \geq \left\langle \xi^L, x - \bar{x} \right\rangle, \quad \forall \xi^L \in \partial_C F^L\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \tag{3.4}$$

$$F^U\left(E\left(x\right)\right) - F^U\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \geq \left\langle \xi^U, x - \bar{x} \right\rangle, \quad \forall \xi^U \in \partial_C F^U\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \tag{3.5}$$

$$g_j\left(E\left(x\right)\right) - g_j\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \geq \left\langle \xi_j^g, x - \bar{x} \right\rangle, \quad \forall \xi_j^g \in \partial_C g_j\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \tag{3.6}$$

$$h_i\left(E\left(x\right)\right) - h_i\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \geq \left\langle \xi_i^h, x - \bar{x} \right\rangle, \quad \forall \xi_i^h \in \partial_C h_i\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \tag{3.7}$$

$$-h_i\left(E\left(x\right)\right) + h_i\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \geq -\left\langle \xi_i^h, x - \bar{x} \right\rangle, \quad \forall \xi_i^h \in \partial_C h_i\left(E\left(\bar{x}\right)\right) \tag{3.8}$$

结合(3.4)~(3.8)和它们相应的乘子，可得

$$0>\alpha^L\left(F^L\left(E\left(x\right)\right)-F^L\left(E\left(\overline{x}\right)\right)\right)\geq\alpha^L\left\langle\xi^L,x-\overline{x}\right\rangle,\quad\forall\xi^L\in\partial_C F^L\left(E\left(\overline{x}\right)\right),\alpha^L\in R_+ \tag{3.9}$$

$$0>\alpha^U\left(F^U\left(E\left(x\right)\right)-F^U\left(E\left(\overline{x}\right)\right)\right)\geq\alpha^U\left\langle\xi^U,x-\overline{x}\right\rangle,\quad\forall\xi^U\in\partial_C F^U\left(E\left(\overline{x}\right)\right),\alpha^U\in R_+ \tag{3.10}$$

$$0\geq\lambda_j\left(g_j\left(E\left(x\right)\right)-g_j\left(E\left(\overline{x}\right)\right)\right)\geq\lambda_j\left\langle\xi_j^g,x-\overline{x}\right\rangle,\quad\forall\xi_j^g\in\partial_C g_j\left(E\left(\overline{x}\right)\right),j\in J\left(E\left(\overline{x}\right)\right) \tag{3.11}$$

$$0=\mu_i\left(h_i\left(E\left(x\right)\right)-h_i\left(E\left(\overline{x}\right)\right)\right)\geq\mu_i\left\langle\xi_i^h,x-\overline{x}\right\rangle,\quad\forall\xi_i^h\in\partial_C h_i\left(E\left(\overline{x}\right)\right),i\in I^+\left(E\left(\overline{x}\right)\right) \tag{3.12}$$

$$0=\mu_i\left(h_i\left(E\left(x\right)\right)-h_i\left(E\left(\overline{x}\right)\right)\right)\geq\mu_i\left\langle\xi_i^h,x-\overline{x}\right\rangle,\quad\forall\xi_i^h\in\partial_C h_i\left(E\left(\overline{x}\right)\right),i\in I^-\left(E\left(\overline{x}\right)\right) \tag{3.13}$$

结合(3.9)~(3.13)可得

$$\left\langle\alpha^L\xi^L+\alpha^U\xi^U+\sum_{j=1}^m\lambda_j\xi_j^g+\sum_{i=1}^n\mu_i\xi_i^h,x-\overline{x}\right\rangle<0. \tag{3.14}$$

与(3.1)矛盾，假设不成立。故$\overline{x}$是(IOP_E)的局部弱 LU 最优解。证毕。

注 3.2 设定理 3.3 中函数F^L,F^U在点$\overline{x}$处是 E-∂_C 伪凸的，其结论依然成立。

定理 3.4 设$\left(\overline{x},\alpha^L,\alpha^U,\lambda,\mu\right)$是($IOP_E$)的一个 KKT 点，$I^+\left(E\left(\overline{x}\right)\right)=\left\{i\in I:\mu_i>0\right\}$，$I^-\left(E\left(\overline{x}\right)\right)=\left\{i\in I:\mu_i<0\right\}$。如果下面的条件成立：

1) 函数F^L，F^U在点$\overline{x}$处是 E-∂_C 伪凸的，

2) 函数g_j，$j\in J\left(E\left(\overline{x}\right)\right)$在点$\overline{x}$处是 E-∂_C 拟凸的，

3) 函数$h_i\left(i\in I^+\left(E\left(\overline{x}\right)\right)\right)$，$-h_i\left(i\in I^-\left(E\left(\overline{x}\right)\right)\right)$在点$\overline{x}$处是 E-∂_C 拟凸的。

则$\overline{x}$是(IOP_E)的局部弱 LU 最优解。

证明：反证法。假设$\overline{x}$不是(IOP_E)的局部弱 LU 最优解，则存在$x\in A_E\cap U\left(\overline{x}\right)$，满足$F\left(E\left(x\right)\right)<_{LU}^s F\left(E\left(\overline{x}\right)\right)$。因为

$$g_j\left(E\left(x\right)\right)-g_j\left(E\left(\overline{x}\right)\right)\leq 0,\quad j\in J\left(E\left(\overline{x}\right)\right)$$

$$-h_i\left(E\left(x\right)\right)-\left(-h_i\left(E\left(\overline{x}\right)\right)\right)=0,\quad i\in I^-\left(E\left(\overline{x}\right)\right)$$

$$h_i\left(E\left(x\right)\right)-h_i\left(E\left(\overline{x}\right)\right)=0,\quad i\in I^+\left(E\left(\overline{x}\right)\right)$$

所以由条件 1)~3)，可得

$$\left\langle\xi^L,x-\overline{x}\right\rangle<0,\quad\forall\xi^L\in\partial_C F^L\left(E\left(\overline{x}\right)\right) \tag{3.15}$$

$$\left\langle\xi^U,x-\overline{x}\right\rangle<0,\quad\forall\xi^U\in\partial_C F^U\left(E\left(\overline{x}\right)\right) \tag{3.16}$$

$$\left\langle\xi_j^g,x-\overline{x}\right\rangle\leq 0,\quad\forall\xi_j^g\in\partial_C g_j\left(E\left(\overline{x}\right)\right) \tag{3.17}$$

$$\left\langle\xi_i^h,x-\overline{x}\right\rangle\leq 0,\quad\forall\xi_i^h\in\partial_C h_i\left(E\left(\overline{x}\right)\right),i\in I^+\left(E\left(\overline{x}\right)\right) \tag{3.18}$$

$$\left\langle\xi_i^h,x-\overline{x}\right\rangle\leq 0,\quad\forall\xi_i^h\in-\partial_C h_i\left(E\left(\overline{x}\right)\right),i\in I^-\left(E\left(\overline{x}\right)\right) \tag{3.19}$$

由(3.15)~(3.19)和它们相应的乘子可得(3.14)成立，与(3.1)矛盾，假设不成立，证毕。

定理 3.5 设$\left(\overline{x},\alpha^L,\alpha^U,\lambda,\mu\right)$是($IOP_E$)的一个 KKT 点，$I^+\left(E\left(\overline{x}\right)\right)=\left\{i\in I:\mu_i>0\right\}$，$I^-\left(E\left(\overline{x}\right)\right)=\left\{i\in I:\mu_i<0\right\}$。如果下面的条件成立：

1) 函数F^L，F^U在点$\overline{x}$处是严格 E-∂_C 伪凸的，

2) 函数g_j，$j\in J\left(E\left(\overline{x}\right)\right)$在点$\overline{x}$处是 E-∂_C 拟凸的，

3) 函数 $h_i\left(i\in I^{+}\left(E\left(\bar{x}\right)\right)\right)$，$-h_i\left(i\in I^{-}\left(E\left(\bar{x}\right)\right)\right)$ 在点 $\bar{x}$ 处是 E-∂_C 拟凸的。

则 $\bar{x}$ 是(IOP_E)的局部 LU 最优解。

证明：定理 3.5 的证明过程与 3.4 类似，故省略。

4. 总结

本文研究了广义 E-凸区间值优化问题(IOP_E)，引入 E-∂_C 凸，E-∂_C 伪凸，严格 E-∂_C 伪凸，E-∂_C 拟凸等广义 E-凸性条件，在目标函数和约束函数均 E-不可微的条件下，给出(IOP_E)的局部(弱) LU 最优解存在的必要性和充分性条件。

致　谢

作者对审稿人表示衷心的感谢！

基金项目

山西省高等学校科技创新项目(NO. 2019L0784)；山西省基础研究计划(自由探索类)青年项目(20210302124688)；太原师范学院研究生教育改革项目(SYYJSJG-2122)；太原师范学院大学生创新创业训练项目(CXCY2018)。

参考文献

[1] Wu, H.C. (2007) The Karush-Kuhn-Tucker Optimality Conditions in an Optimization Problem with Interval-Valued Objective Function. *European Journal of Operational Research*, **176**, 46-59. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.09.007

[2] Sun, Y. and Wang, L. (2013) Optimality Conditions and Duality in Nondifferentiable Interval-Valued Programming. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **9**, 131-142. https://doi.org/10.3934/jimo.2013.9.131

[3] Tung, L.T. (2020) Karush-Kuhn-Tucker Optimality Conditions and Duality for Convex Semi-Infinite Programming with Multiple Interval-Valued Objective Functions. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **62**, 67-91. https://doi.org/10.1007/s12190-019-01274-x

[4] Ahmad, I., Kummari, K. and Al-Homidan, S. (2020) Sufficiency and Duality for Interval-Valued Optimization Problems with Vanishing Constraints Using Weak Constraint Qualifications. *International Journal of Analysis and Applications*, **18**, 784-798.

[5] Youness, E.A. (1999) E-Convex Sets, E-Convex Functions, and E-Convex Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **102**, 439-450. https://doi.org/10.1023/A:1021792726715

[6] 蔡章华，范晓冬. E-凸区间值函数及其在优化问题中的应用[J]. 渤海大学学报(自然科学版)，2010，31(3): 245-249.

[7] Luu, D.V. and Mai, T.T. (2016) Optimality and Duality in constrained Interval-Valued Optimization. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **50**, 59-71. https://doi.org/10.1007/s12190-014-0858-2

[8] Abdulaleem, N. (2019) E-Optimality Conditions for E-Differentiable E-Invex Multiobjective Programming Problems. *WSEAS Transactions on Mathematics*, **18**, 14-27.

[9] Antczak, T. and Abdulaleem, N. (2020) Optimality Conditions for E-Differentiable Vector Optimization Problems with the Multiple Interval-Valued Objective Function. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **16**, 2971-2989. https://doi.org/10.3934/jimo.2019089

[10] 邓春艳，彭再云，陈雪静，彭志莹. E-预不变凸区间值函数及其在数学规划中的应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2021, 38(1): 30-38.

[11] Guu, S.M., Singh, Y. and Mishra, S.K. (2017) On Strong KKT Type Sufficient Optimality Conditions for Multiobjective Semi-Infinite Programming Problems with Vanishing Constraints. *Journal of Inequalities and Applications*, **282**, 1-9. https://doi.org/10.1186/s13660-017-1558-x

[12] Moore, R.E. (1979) Methods and Applications of Interval Analysis. SIAM, Philadelphia. https://doi.org/10.1137/1.9781611970906

[13] Mangasarian, O.L. (1994) Nonlinear Programming. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. https://doi.org/10.1137/1.9781611971255