

带有输出时滞的线性系统的观测器设计

支 霞¹, 贾彦娜²

¹山西警察学院网络安全保卫系, 山西 太原

²太原师范学院数学系, 山西 太原

收稿日期: 2021年12月26日; 录用日期: 2022年1月16日; 发布日期: 2022年1月28日

摘 要

本文研究输出带有时滞的线性系统的观测器设计问题。通过将输出时滞写成传播方程的形式, 带有输出时滞的观测器设计问题就变成了ODE和传播方程组成的级联系统的观测问题。通过引入新的变换, 输出时滞得以有效地补偿。本文给出了观测器的设计过程, 并且在观测器的适定性证明中摆脱了Lyapunov函数的构造。最后给出数值仿真说明了观测器的有效性。

关键词

输出时滞, 观测器, 传播方程

Observer Design for a Linear System with Output Delay

Xia Zhi¹, Yanna Jia²

¹Department of Network Security, Shanxi Police College, Taiyuan Shanxi

²Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Taiyuan Shanxi

Received: Dec. 26th, 2021; accepted: Jan. 16th, 2022; published: Jan. 28th, 2022

Abstract

In this paper, we study the observer design for a linear system with output delay. By writing the time delay as a transport equation, the observer design with output delay can be regarded as the observation problem of a cascade system that consists of an ODE and a transport equation. The output delay can be compensated by introducing a new transformation. The whole process of the observer design is proposed in this paper. Moreover, the construction of Lyapunov function can be avoided in the proof of the well-posedness. Finally, some numerical simulations are given to validate the effectiveness of the observer.

Keywords

Output delay, Observer, Transport Equation

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

由于传感器不可避免地有滞后效应, 输出时滞问题在实际控制问题中几乎无处不在。目前有很多方法处理输出时滞补偿问题。例如: [1] [2] [3]和[4]等。时滞本质上是一个由一阶传播方程决定的无穷维动态系统。文献[5]将时滞转化为一阶双曲系统, 使得偏微分方程的数学工具在时滞处理中有了用武之地。时滞的无穷维动态表示可以将带有输出时滞的观测器设计问题变成 ODE 和传播方程组成的级联系统的观测问题。

令 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$ 且 $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 。考虑如下系统的观测问题:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cz(t - \tau), \tau > 0, \quad (1)$$

其中 u 是控制, y 是输出, τ 是时滞。文献[4]曾经给出了系统(1)的观测器, 并且证明了其适定性。然而[4]并没有给出观测器的设计过程, 并且在观测器适定性证明中采用了 Lyapunov 函数的方法。本文将引入新的变换, 给出系统(1)的观测器设计步骤, 使得观测器变得简单易懂。此外, 本文在观测器的适定性证明中摆脱了 Lyapunov 函数的构造, 使得证明过程更加简单, 更易于推广到其他 ODE-PDE 级联系统的观测问题。如果令

$$\psi(x, t) = Cz(t - x), \quad x \in [0, \tau], \quad t \geq \tau, \quad (2)$$

则系统(1)可以写成

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \\ \psi_t(x, t) + \psi_x(x, t) = 0, \quad x \in [0, \tau], \\ \psi(0, t) = Cz(t), \\ y(t) = \psi(\tau, t). \end{cases} \quad (3)$$

我们在状态空间 $Z_\tau = \mathbb{R}^n \times L^2(0, \tau)$ 中考虑系统(3), 其内积定义为:

$$\langle (v_1, f_1), (v_2, f_2) \rangle_{Z_\tau} = \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \int_0^\tau f_1(x) \overline{f_2(x)} dx, \quad (v_i, f_i) \in Z_\tau, i = 1, 2. \quad (4)$$

2. 观测器设计及其适定性

首先考虑如下 Luenberger 型观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) = A\hat{z}(t) - F_1[y(t) - \hat{\psi}(\tau, t)] + Bu(t), \\ \hat{\psi}_t(x, t) + \hat{\psi}_x(x, t) = F_2(x)[y(t) - \hat{\psi}(\tau, t)], \\ \hat{\psi}(0, t) = C\hat{z}(t), \end{cases} \quad (5)$$

其中 $F_1 \in \mathbb{R}^n$, $F_2 \in L^2[0, \tau]$ 是待定的观测器增益。定义观测误差

$$\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t), \quad \tilde{\psi}(\cdot, t) = \psi(\cdot, t) - \hat{\psi}(\cdot, t). \quad (6)$$

直接计算可得:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}(t) = A\tilde{z}(t) - F_1\tilde{\psi}(\tau, t), \\ \tilde{\psi}_t(x, t) + \tilde{\psi}_x(x, t) = -F_2(x)\tilde{\psi}(\tau, t), \\ \tilde{\psi}(0, t) = C\tilde{z}(t) \end{cases} \quad (7)$$

只需选择 F_1 和 F_2 使得系统(7)稳定即可。为此我们引入如下变换

$$\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{\psi}(x, t) + \langle \tilde{z}(t), G(x) \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

其中 $G = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)) : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是待定的向量值函数, $g_i \in L^2[0, \tau]$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。简单计算可得,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_t(x, t) &= -\tilde{\psi}_x(x, t) - F_2(x)\tilde{\psi}(\tau, t) + \langle A\tilde{z}(t) + F_1\tilde{\psi}(\tau, t), G(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= -\tilde{\psi}_x(x, t) - F_2(x)\tilde{\psi}(\tau, t) + \langle A\tilde{z}(t), G(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \tilde{\psi}(\tau, t) \langle F_1, G(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= -\tilde{\psi}_x(x, t) + \langle \tilde{z}(t), A^T G(x) + G'(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} + [\langle F_1, G(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} - F_2(x)] \tilde{\psi}(\tau, t) \end{aligned} \quad (9)$$

且

$$\tilde{\psi}(0, t) = \tilde{\psi}(0, t) + \langle \tilde{z}(t), G(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} = C\tilde{z}(t) + \langle \tilde{z}(t), G(0) \rangle_{\mathbb{R}^n}. \quad (10)$$

如果选择 G 和 F_2 使得

$$\begin{cases} G'(x) = -A^T G(x), \text{ 且 } F_2(x) = \langle F_1, G(x) \rangle_{\mathbb{R}^n}, \\ G(0) = -C^T, \end{cases} \quad (11)$$

则(9)和(10)简化为

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_t(x, t) + \tilde{\psi}_x(x, t) = 0, \\ \tilde{\psi}(0, t) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

解(11)中的向量值函数可得

$$G(x) = -e^{-A^T x} C^T \text{ 从而 } F_2(x) = -F_1^T e^{-A^T x} C^T = -C e^{-Ax} F_1, \quad (13)$$

综合(7), (8)和(13)可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}(t) &= A\tilde{z}(t) - F_1 \langle \tilde{z}(t), G(\tau) \rangle_{\mathbb{R}^n} + F_1\tilde{\psi}(\tau, t) \\ &= [A - F_1 G(\tau)^T] \tilde{z}(t) + F_1\tilde{\psi}(\tau, t) \\ &= (A + F_1 C e^{-A\tau}) \tilde{z}(t) + F_1\tilde{\psi}(\tau, t) \end{aligned} \quad (14)$$

于是综合(12)和(14)可得

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}(t) = (A + F_1 C e^{-A\tau}) \tilde{z}(t) + F_1\tilde{\psi}(\tau, t), \\ \tilde{\psi}_t(x, t) + \tilde{\psi}_x(x, t) = 0, \\ \tilde{\psi}(0, t) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

如果选择 F_1 使得 $A + F_1 C e^{-A\tau}$ 是 Hurwitz 阵, 则系统(15)是由两个指数稳定系统构成的串联系统, 从而也是稳定的。

定理 2.1. 令 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$ 且 $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. 若系统 (A, C) 可观, 则存在 $F_1 \in \mathbb{R}^n$ 和 $F_2 \in L^2[0, \tau]$ 使得系统(3)的观测器(5)是适定的, 即: 对任意的 $(z(0), \psi(\cdot, 0)) \in Z_\tau$, $(\hat{z}(0), \hat{\psi}(\cdot, 0)) \in Z_\tau$ 和 $u \in L^2_{loc}[0, \infty)$, 观测器(5)存在唯一解 $(\hat{z}(\cdot, t), \hat{\psi}(\cdot, t)) \in C([0, \infty); Z_\tau)$ 满足

$$e^{\omega t} \left\| (z(t) - \hat{z}(t), \psi(\cdot, t) - \hat{\psi}(\cdot, t)) \right\|_{Z_\tau} \rightarrow 0 \text{ 当 } t \rightarrow \infty \quad (16)$$

其中 $\omega > 0$ 是与时间 t 无关的常数。此外, 调节参数 F_1 和 F_2 可以按照如下规则选取:

- 选择 $F_1 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $A + F_1 C e^{-A\tau}$ 是 Hurwitz 阵;
- 令 $F_2(x) = -C e^{-Ax} F_1$.

证明. 由于系统 (A, C) 可观且 $e^{-A\tau}$ 可逆, 因此系统 $(A, C e^{-A\tau})$ 也是可观的。于是存在 $F_1 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $A + F_1 C e^{-A\tau}$ 是 Hurwitz 阵。令 $F_2(x) = -C e^{-Ax} F_1$, 则观测器(5)变为:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) = A\hat{z}(t) - F_1[y(t) - \hat{\psi}(\tau, t)] + Bu(t), \\ \hat{\psi}_t(x, t) + \hat{\psi}_x(x, t) = -C e^{-Ax} F_1[y(t) - \hat{\psi}(\tau, t)], \\ \hat{\psi}(0, t) = C\hat{z}(t) \end{cases} \quad (17)$$

考虑误差系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}(t) = A\tilde{z}(t) + F_1\tilde{\psi}(\tau, t), \\ \tilde{\psi}_t(x, t) + \tilde{\psi}_x(x, t) = C e^{-Ax} F_1\tilde{\psi}(\tau, t), \\ \tilde{\psi}(0, t) = C\tilde{z}(t). \end{cases} \quad (18)$$

注意到(8)和(13), 变换

$$\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{\psi}(x, t) - C e^{-Ax} \tilde{z}(t), \quad t \geq 0 \quad (19)$$

可以将误差系统(18)化为(15)。对任意的 $(\tilde{z}(0), \tilde{\psi}(\cdot, 0)) \in Z_\tau$, 系统(15)存在唯一解 $(\tilde{z}(t), \tilde{\psi}(\cdot, t)) \in C([0, \infty); Z_\tau)$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{z}(t) = e^{(A+F_1 C e^{-A\tau})t} \tilde{z}(0) + \int_0^t e^{(A+F_1 C e^{-A\tau})(t-s)} F_1 \tilde{\psi}(s) ds, \\ \tilde{\psi}(t) = \begin{cases} 0, & t \geq x, \\ \tilde{\psi}(x-t, 0), & t < x \end{cases} \end{cases} \quad (20)$$

由于 $A + F_1 C e^{-A\tau}$ 是 Hurwitz 阵, 存在 $\alpha > 0$ 使得系统(15)的解(20)满足

$$e^{\alpha t} \left\| (\tilde{z}(t), \tilde{\psi}(\cdot, t)) \right\|_{Z_\tau} \rightarrow 0 \text{ 当 } t \rightarrow \infty \quad (21)$$

注意到变换(19)可逆,

$$\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{\psi}(x, t) + C e^{-Ax} \tilde{z}(t), \quad t \geq 0, \quad (22)$$

综合可逆变换(19), (21)以及系统(18)和系统(15)之间的等价性可知:对任意的 $(\tilde{z}(0), \tilde{\psi}(\cdot, 0)) \in Z_\tau$, 系统(18)存在唯一解 $(\tilde{z}(t), \tilde{\psi}(\cdot, t)) \in C([0, \infty); Z_\tau)$ 使得

$$e^{\omega t} \left\| (\tilde{z}(t), \tilde{\psi}(\cdot, t)) \right\|_{Z_\tau} \rightarrow 0 \text{ 当 } t \rightarrow \infty, \quad (23)$$

其中 $\omega > 0$ 是与时间无关的常数。

对任意的 $(z(0), \psi(\cdot, 0)) \in Z_\tau$ 和 $(\hat{z}(0), \hat{\psi}(\cdot, 0)) \in Z_\tau$, 设 $(\tilde{z}(t), \tilde{\psi}(\cdot, t))$ 是系统(18)关于初值

$$(\tilde{z}(0), \tilde{\psi}(\cdot, 0)) = (z(0) - \hat{z}(0), \psi(\cdot, 0) - \hat{\psi}(\cdot, 0)) \quad (24)$$

的解。另一方面, 对任意的 $(z(0), \psi(\cdot, 0)) \in Z_\tau$ 和 $u \in L^2_{loc}[0, \infty)$, 系统(3)存在唯一解 $(z(t), \psi(\cdot, t)) \in C([0, \infty); Z_\tau)$ 。若令

$$\hat{z}(t) = z(t) - \tilde{z}(t), \quad \hat{\psi}(\cdot, t) = \psi(\cdot, t) - \tilde{\psi}(\cdot, t), \quad (25)$$

则直接计算可得(25)定义的 $(\hat{z}(\cdot, t), \hat{\psi}(\cdot, t)) \in C([0, \infty); Z_\tau)$ 是观测器(5)的解且满足(16)。由于观测器以及系统(3)的线性性质, 观测器(5)的解是唯一的。

注记 2.1. 设 $F \in \mathbb{R}^n$ 使得 $A + FC$ 是 Hurwitz 阵, 若令 $F_1 = e^{A\tau} F$, 则

$$A + F_1 C e^{-A\tau} = A + e^{A\tau} F C e^{-A\tau} = e^{A\tau} (A + FC) e^{-A\tau}$$

也是 Hurwitz 阵。令 $F_2(x) = -C e^{-Ax} F_1 = -C e^{A(\tau-x)} F$ 。此时, 观测器(5)变为

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) = A\hat{z}(t) - e^{A\tau} F [y(t) - \hat{\psi}(\tau, t)] + Bu(t), \\ \hat{\psi}_t(x, t) + \hat{\psi}_x(x, t) = -C e^{A(\tau-x)} F [y(t) - \hat{\psi}(\tau, t)], \\ \hat{\psi}(0, t) = C\hat{z}(t) \end{cases} \quad (26)$$

其中 $F \in \mathbb{R}^n$ 使得 $A + FC$ 是 Hurwitz 阵。观测器(26)和文献[4]中的观测器类似。

3. 数值模拟

为了更直观的说明理论结果, 我们对系统(3)的观测器(17)进行了数值模拟。我们采用有限差分的方法离散系统。时间、空间离散步长分别为 0.001 和 0.01。观测系统(3)对应的矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0].$$

观测器增益为 $F_1 = e^{A\tau} F$, 其中 $F = [-20 \quad -102]^T$, 简单计算可知 $\sigma(A + F_1 C) = \{-10\}$ 。时滞参数选为 $\tau = 0.5$ 。系统(3)的初值选为 $\psi(x, 0) = 0$ 和 $z(0) = (0, 2)^T$ 。观测器(17)的初值选为 $\hat{\psi}(x, 0) = 0$ 和 $\hat{z}(0) = (0, 0)^T$ 。观测误差的仿真结果见图 1 和图 2。从仿真结果可以看出时滞动态 $\psi(x, t)$ 和系统状态 $z(t) = (z_1(t), z_2(t))^T$ 都得到了有效的估计, 这说明我们的观测器是有效的。

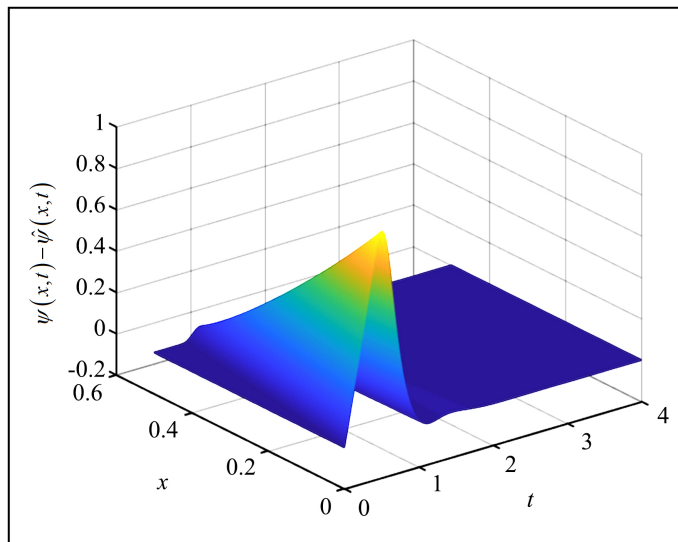


Figure 1. Time delay dynamic error

图 1. 时滞动态误差

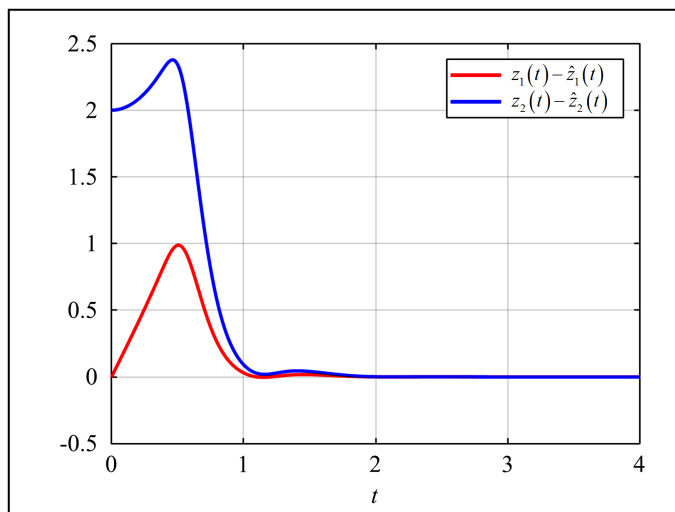


Figure 2. State error
图 2. 状态误差

4. 总结

本文考虑带有输出时滞的线性系统的观测问题, 给出了完整的观测器设计过程, 得到了新的观测器。通过引入新的变换, 观测器的设计过程变得自然易行, 并且使得观测器的适定性证明摆脱了 Lyapunov 函数的构造。本文证明了观测器的适定性, 并通过数值模拟验证了所得的理论结果。

基金项目

山西省基础研究计划(自由探索类)青年项目(20210302124688); 山西省高等学校科技创新项目(2021L416)。

参考文献

- [1] Guo, B.Z. and Mei, Z.D. (2020) Output Feedback Stabilization for a Class of First-Order Equation Setting of Collocated Well-Posed Linear Systems with Time Delay in Observation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **65**, 2612-2618. <https://doi.org/10.1109/TAC.2019.2941431>
- [2] Guo, B.Z., Xu, C.Z. and Hammouri, H. (2012) Output Feedback Stabilization of a One-Dimensional Wave Equation with an Arbitrary Time Delay in Boundary Observation. *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, **18**, 22-35. <https://doi.org/10.1051/cocv/2010044>
- [3] Krstic, M. (2009) Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems. Birkhauser, Boston, MA. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4877-0>
- [4] Krstic, M. and Smyshlyaev, A. (2008) Backstepping Boundary Control for First Order Hyperbolic PDEs and Application To Systems with Actuator And Sensor Delays. *Systems & Control Letters*, **57**, 750-758. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2008.02.005>
- [5] Xu, G.Q., Yung, S.P. and Li, L.K. (2006) Stabilization of Wave Systems with Input Delay in the Boundary Control, *ESAIM. Control, Optimization and Calculus of Variations*, **12**, 770-785. <https://doi.org/10.1051/cocv:2006021>