

曲面上的分支组合Calabi流

高开城, 林爱津*

国防科技大学理学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2022年9月26日; 录用日期: 2022年10月19日; 发布日期: 2022年10月27日

摘要

受蓝师义和戴道清关于分支组合Ricci流的研究启发, 我们将组合Calabi流与分支结构结合, 引入三角剖分曲面上的分支组合Calabi流。进一步地, 我们利用分支组合Ricci势, 组合Calabi能量等工具, 在二维欧氏空间 \mathbb{E}^2 和二维双曲空间 \mathbb{H}^2 中, 证明分支组合Calabi流的解长时间存在并且指数收敛到一个分支圆包装度量。我们的工作将葛化彬等人关于组合Calabi流的结果推广到了分支组合Calabi流情形。

关键词

分支结构, 组合Calabi流, 组合Ricci势

Branched Combinatorial Calabi Flows on Surfaces

Kaicheng Gao, Aijin Lin*

College of Science, National University of Defense Technology, Changsha Hunan

Received: Sep. 26th, 2022; accepted: Oct. 19th, 2022; published: Oct. 27th, 2022

Abstract

Inspired by the study of the branched combinatorial Ricci flows by Shiyi Lan and Daoqing Dai, we introduce the branched combinatorial Calabi flows on a fixed triangulated surface by combining the branch structure with the combinatorial Calabi flows. Furthermore, in 2 dimensional Euclidean space \mathbb{E}^2 and 2 dimensional hyperbolic space \mathbb{H}^2 , using the branched combinatorial Ricci potential and combinatorial Calabi energy etc., we prove that the solutions to the branched combinatorial Calabi flows exist for the long time and converge exponentially to branched circle packing metrics. Our work extends results on the combinatorial Calabi flows by Huabin Ge *et al.* to the branched combinatorial Calabi flows.

*通讯作者。

Keywords

Branch Structure, Combinatorial Calabi Flows, Combinatorial Ricci Potential

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

圆包装(circle packing)理论是近几十年来在复分析和离散几何交叉学科中一个快速发展的研究领域。Thurston [1]在 1985 年首次提出利用圆包装来逼近 Riemann 映射的猜想。Rodin 和 Sullivan [2]证明了六边形情形下的 Thurston 猜想。此后, Beardon 和 Stephenson [3]提出圆包装可用于构造离散解析函数以及将复分析的经典结果离散化的想法。分支圆包装(branched circle packing)的概念由 Bowers 和 Stephenson [4]提出, 他们将 Andreev-Thurston 定理推广到了分支圆包装情形。Dubejko [5]对分支圆包装进行了更加系统的研究, 得到了曲面上分支圆包装存在的充要条件。

受 Hamilton 引入的 Ricci 流启发, Chow 和罗锋[6]首次引进了组合 Ricci 流的概念, 并且用其给出了 Andreev-Thurston 定理的新证明。此后, 各种组合曲率流(包括组合 Calabi 流, 组合 Yamabe 流等)相继被引入[7]-[13], 特别地, 葛化彬在博士论文[8]中引入了组合 Calabi 流, 并且证明了在二维欧氏空间 \mathbb{E}^2 (2 dimensional Euclidean space)和二维双曲空间 \mathbb{H}^2 (2 dimensional hyperbolic space)中组合 Calabi 流解的长时间存在性及指数收敛性[8] [9] [10] [11]。圆包装、组合曲率流可以与计算机编程结合起来, 具有广泛的应用价值, 例如德国的 Bobenko 团队[14]利用圆包装构造 3 维空间中的离散极小曲面, 顾险峰团队[15]成功地把组合曲率流应用到计算机图形学、医学成像等领域。

基于 Chow 和罗锋的组合 Ricci 流, 蓝师义和戴道清[16]引入了分支结构(branch structure), 提出了分支组合 Ricci 流, 并且将 Chow 和罗锋的经典结果推广到了分支组合 Ricci 流情形。受蓝师义和戴道清[16]工作的启发, 本文将引入分支组合 Calabi 流, 并且尝试将葛化彬[8] [9], 葛化彬和华波波[10]以及葛化彬和徐旭[11]等关于组合 Calabi 流的经典研究结果推广到分支组合 Calabi 流情形。

本文结构如下: 第二章是预备知识。第三章讨论离散拉普拉斯算子的性质。第四章给出分支组合 Calabi 流解的长时间存在性证明。第五章证明分支组合 Calabi 流解的收敛性。

2. 预备知识

2.1. 分支圆包装

设 X 是一个带边或无边的紧致曲面, T 是曲面 X 的一个三角剖分。设 $V = V(T)$, $bd(T)$, $int(T)$, $E = \{e_{ij}\}$ 和 $F = \{\Delta_{ijk}\}$ 分别表示 T 的顶点集, 边界点集, 内点集, 边集以及面集。三角剖分的权重是一个作用于边集 E 上的函数 $\Phi: E \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 。我们称 (T, Φ) 是曲面 X 的一个加权三角剖分, 记加权三角剖分曲面为 (X, T, Φ) 。

设 P 是常曲率曲面上圆的一个集合, 若 P 满足下述条件, 则称之为实现加权三角剖分 (T, Φ) 的圆包装。

V 中的点 v 与 P 中的圆 $C_p(v)$ 存在一一映射并且圆 $C_p(u)$ 和 $C_p(v)$ 的交角为 $\Phi = (e_{uv})$;

P 保持定向, 即若 v_1, v_2, v_3 为 T 中的面 Δ_{ijk} 按照 T 的定向排列的三个顶点, 则 $C_p(v_1), C_p(v_2), C_p(v_3)$ 在曲面上形成一个正向的三圆组。

下面图 1 和图 2 是两个圆包装示例(详细信息请参见[4])。图 1 和图 2 中均有一个固定的点 v 被固定在北极点(阴影圆的圆心), 就是面向读者的那个点。图 1 是一个外切圆包装, 其中所有权重 Φ 均为 0。图 2 和图 1 具有相同的加权三角剖分, 但很明显相较于图 1, 图 2 更加复杂: 图 2 依旧是外切圆包装, 但是它具有两个分支点, 分别在北极点和南极点(在球的背面与北极点相对)。沿着阴影圆的外切圆可以发现阴影圆的外切圆共环绕了阴影圆两周, 这个圆包装诱导了球面的一个二重覆盖。

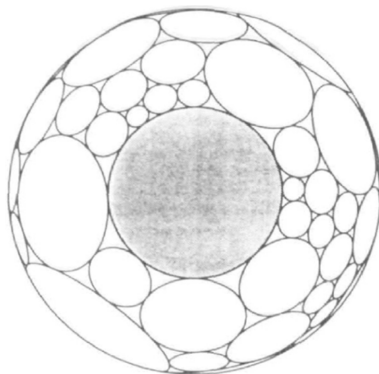


Figure 1. Circle packing with weight = 0
图 1. 权重均为 0 的圆包装

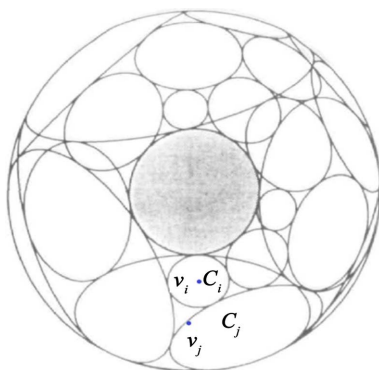


Figure 2. Branched circle packing with weight = 0
图 2. 权重均为 0 的分支圆包装

为了更好理解分支圆包装, 我们引入圆包装的半径函数概念。若 P 是实现加权三角剖分 (T, Φ) 的一个圆包装, 则称给 P 中的每一个圆 $C_p(v)$ 的圆心 v 赋值的半径函数 $r: V \rightarrow (0, +\infty)$ 为 P 的圆包装度量。显然, 圆包装度量 $r = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ 可看作一个 N 维的向量, 其中 $N = |V|$ 是顶点的个数。每一个内点 $v \in \text{int}(T)$ 的内角和 $\theta_v(r)$ 由圆包装度量决定, 说明如下。记点 v 处的内角和 $\theta_v(r) = \sum \alpha_v(r, \Delta)$, 其中求和包括所有含有点 v 的面且 $\alpha_v(r, \Delta) = \alpha_v(r, \Delta_{v u_1 u_2})$ 指点 v, u_1 和 u_2 构成的三角形 $\Delta_{v u_1 u_2}$ 中点 v 处的内角。

显然, 由圆包装度量的定义可得, 任取内点 $v \in \text{int}(T)$, 它在圆包装 P 中的内角和一定为 2π 的整数倍。若在圆包装 P 中某个内点 u 处的内角和等于 $2n\pi, n \geq 2$, 那么我们称 u 为 P 中分支度为 $n-1$ 的分支点。若一个圆包装中存在至少一个分支点, 则我们称该圆包装为分支圆包装。显然, 图 2 中的南北极点都是 P 中分支度为 1 的分支点。

取一固定的加权三角剖分曲面 (X, T, Φ) , 考虑作用于边集 E 上的边长函数为 $l: E \rightarrow (0, +\infty)$ 。若对于任意三角形 $\Delta_{ijk} \in F$, 三条边长 l_{ij}, l_{jk}, l_{ik} 都满足三角不等式, 则称 l 为一个分片线性度量。Thurston (见引理 13.7.2 [1])指出, 任意一个圆包装度量 r 都可以如下方式决定分片线性度量 l 。在 \mathbb{E}^2 中, 令

$$l_{ij} = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j \cos(\Phi(e_{ij}))},$$

在 \mathbb{H}^2 中, 令

$$l_{ij} = \cosh^{-1}(\cosh r_i \cosh r_j + \sinh r_i \sinh r_j \cos(\Phi(e_{ij}))).$$

记点 v_i 处的内角和为 $\theta(v_i)$, 则 v_i 处的组合高斯曲率定义为

$$K_i = 2\pi - \theta(v_i), \tag{1}$$

令 $K = (K_1, K_2, \dots, K_N)$ 。

定义 2.1 取一固定的加权三角剖分曲面 (X, T, Φ) , 若点 $\{b_j | j=1, \dots, m\}$ 满足 $\theta(b_j) = (1 + \beta_j)2\pi$, 且任取 $v \in \text{int}(T) \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, 均有 $\theta(v) = 2\pi$, 则称 b_j 是一个分支度为 β_j 的分支点。记所有分支点为 $\{b_j | j=1, \dots, m\}$, 且其对应的分支度分别为 β_1, \dots, β_m , 则记 P 的分支集为

$$br(P) = \{(b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \dots, (b_m, \beta_m)\},$$

称 P 为实现三角剖分 (T, Φ) 且具有分支集 $br(P)$ 的分支圆包装。设圆包装 P 实现三角剖分 (T, Φ) , 若存在一圆包装度量 $r: V \rightarrow (0, +\infty)$ 满足在任一点 v_i 处组合高斯曲率(1)均满足下述等式

$$K_i(r) + 2\beta_i\pi = 0, \tag{2}$$

则称该圆包装度量为分支圆包装度量, 且记为 r_b 。

为简化计算, 若内点 v_i 不是分支点, 可认为它是一个分支度为 0 的分支点。

定义 2.2 分支集 $br(P) = \{(b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \dots, (b_m, \beta_m)\} \subset V \times N$ 若满足下述条件, 则称 $br(P)$ 是一个分支结构(branch structure): 存在一个包含至少一个内点的简单闭路径 $\Gamma = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 满足不等式

$$\sum_{j=1}^n [\pi - \Phi(e_j)] > 2(l(\Gamma) + 1)\pi,$$

这里 $l(\Gamma) = \sum_{i=1}^m \delta_i(\Gamma)\beta_i$ 且若 Γ 包含点 b_i , 则 $\delta_i = 1$, 否则 $\delta_i = 0$ 。

Dubejko [5]证明了当且仅当 $br(P)$ 是加权三角剖分 (T, Φ) 的一个分支结构时, 实现加权三角剖分 (T, Φ) 的分支圆包装存在。

2.2. 分支组合 Calabi 流

在 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中, Chow-罗锋[6]首次提出的组合 Ricci 流方程分别如下:

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i r_i, \tag{3}$$

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i \sinh(r_i). \tag{4}$$

Chow-罗锋证明了组合 Ricci 流的解长时间存在并以指数速度收敛。在 Chow-罗锋研究的基础上, 蓝师义和戴道清引入分支结构, 提出了分支组合 Ricci 流, 并将 Chow-罗锋的结果成功推广至分支情形。在 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中的分支组合 Ricci 流方程分别如下:

$$\frac{dr_i}{dt} = -(K_i + 2\beta_i\pi)r_i, \tag{5}$$

$$\frac{dr_i}{dt} = -(K_i + 2\beta_i\pi)\sinh r_i. \tag{6}$$

葛化彬[8] [9]提出了组合 Calabi 流的概念, 给出 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中的组合 Calabi 流方程分别如下:

$$\frac{dr_i}{dt} = \Delta K_i r_i, \tag{7}$$

$$\frac{dr_i}{dt} = \Delta K_i \sinh r_i, \tag{8}$$

这里 Δ 是离散拉普拉斯算子。

受蓝师义和戴道清的分支组合 Ricci 流启发, 可定义分支组合 Calabi 流。

定义 2.3 取一固定的加权三角剖分曲面 (X, T, Φ) , 其分支结构为 $br(P) = \{(b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \dots, (b_m, \beta_m)\} \subset V \times N$, 则 \mathbb{E}^2 中分支组合 Calabi 流定义为

$$\frac{dr_i}{dt} = \Delta(K_i + 2\beta_i\pi)r_i, \tag{9}$$

\mathbb{H}^2 中的分支组合 Calabi 流为

$$\frac{dr_i}{dt} = \Delta(K_i + 2\beta_i\pi)\sinh r_i. \tag{10}$$

当不含分支点即任意 $\beta_i = 0$ 时, 则方程(9)和(10)为葛化彬提出的组合 Calabi 流(7)和(8)。

2.3. 主要结果

下面是本文的主要结果, 在 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中, 我们成功将葛化彬等人的结果[8] [11]推广至分支情形下, 得到了分支组合 Calabi 流解的长时间存在性与收敛性。

定理 2.4. 在 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中给定一个固定的加权三角剖分曲面 (X, T, Φ) , 其分支结构为 $br(P) = \{(b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \dots, (b_m, \beta_m)\} \subset V \times N$, 任取初值 $r(0) = (r_1(0), \dots, r_N(0)) \in \mathbb{R}_{>0}^N$ 满足 $\prod_{i=1}^N r_i(0) = 1$, 分支组合 Calabi 流(9)和(10)的解 $\{r(t)\}$ 长时间存在, 且当且仅当分支圆包装度量 r_b 存在时, 解 $\{r(t)\}$ 收敛。若解收敛, 则必指数收敛。

3. 离散拉普拉斯算子

在 \mathbb{E}^2 中, 令 $u_i = \ln r_i$, 在 \mathbb{H}^2 中, 令 $u_i = \ln \tanh r_i/2$, 则分支组合 Calabi 流方程(9), (10)可统一写为

$$\frac{du_i}{dt} = \Delta(K_i + 2\beta_i\pi). \tag{11}$$

若点 v_i 与 v_j 相邻, 则记作 $i \sim j$, 因此任意边 e_{ij} 均可表示为 $i \sim j$ 。在 \mathbb{E}^2 中, 对任意边 $i \sim j$, 设

$$B_{ij} = \sum_{\Delta_{ijk} \in F} \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_j} r_j, \tag{12}$$

在 \mathbb{H}^2 中, 对任意边 $i \sim j$, 设

$$B_{ij} = \sum_{\Delta_{ijk} \in F} \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_j} \sinh r_j, \tag{13}$$

$$A_i = \sinh r_i \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\sum_{\Delta_{ijk} \in F} Area(\Delta_{ijk}) \right), \tag{14}$$

这里 θ_i^{jk} 是三角形 Δ_{ijk} 中点 v_i 处的内角, $Area(\Delta_{ijk})$ 为三角形 Δ_{ijk} 的面积, v_k 和 v_l 是两个顶点且三角形 Δ_{ijk} 和 Δ_{ijl} 具有公共边 e_{ij} 。

事实上, 在 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中, 均有 $B_{ij} = B_{ji}$ 成立, 因为 $\frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_j} r_j = \frac{\partial \theta_j^{ik}}{\partial r_i} r_i$ 以及 $\frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_j} \sinh r_j = \frac{\partial \theta_j^{ik}}{\partial r_i} \sinh r_i$ (见[6]

中引理 2.3)。设 $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$, 定义 $L_B = ((L_B)_{ij})_{N \times N}$ 如下:

$$(L_B)_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \sim i} B_{ik}, & i = j \\ -B_{ij}, & i \sim j \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (15)$$

记 $K(r) + 2\beta\pi$ 的雅可比矩阵为 L , 由于 $L = (L_{ij}) = \left(\frac{\partial (K_i + 2\beta_i \pi)}{\partial u_j} \right) = \left(\frac{\partial K_i}{\partial u_j} \right)$, 由[9]中引理 3.3 可得下述引理。

引理 3.1 在 \mathbb{E}^2 中, L 正定; 在 \mathbb{H}^2 中, L 是一个 $N \times N$ 维的半正定矩阵, 它的秩为 $N - 1$ 。此外, L 的零空间为 $\text{Ker}(L) = \{t(1, \dots, 1)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$ 。

葛化彬在[11]中指出在 \mathbb{E}^2 中, $L = L_B$, 在 \mathbb{H}^2 中, $L = L_B + A$, 此外, L_B 半正定, A 是正定的。

设 f 是作用在顶点集 V 上的任意函数, 它可看作一个 N 维向量, 则离散拉普拉斯算子 Δ 定义为

$$\Delta f_i = (\Delta f)_i = - (L^T f)_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial (K_i + 2\beta_i \pi)}{\partial u_j} f_j. \quad (16)$$

葛化彬在[9]中指出, 在 \mathbb{E}^2 中,

$$\Delta f_i = \sum_{j \sim i} B_{ij} (f_j - f_i), \quad (17)$$

此外, 葛化彬和徐旭在[11]中指出, 在 \mathbb{H}^2 中,

$$\Delta f_i = \sum_{j \sim i} B_{ij} (f_j - f_i) - A_i f_i. \quad (18)$$

3.1. 对离散拉普拉斯算子的估计

这里对 B_{ij} 和 A_i 进行估计, 我们得到下述引理。

引理 3.2 参考引理 3.1 [11]和引理 3.1 [9]在 \mathbb{E}^2 中, 任取 e_{ij} , 其中 $1 \leq i, j \leq N$, 可得

$$0 < B_{ij} < 2\sqrt{3}, \quad (19)$$

在 \mathbb{H}^2 中, 可得

$$0 < B_{ij} < 1,$$

$$0 < A_i < d_i \cosh 1 \leq d \cosh 1,$$

这里 $d = \max_{1 \leq i \leq N} \{d_i\}$, d_i 是点 v_i 的度, 即与 v_i 相邻的点的个数。

此外, 葛化彬在[10]中给出的引理 2.2 和 2.3 是证明方程解的长时间存在性和收敛性的关键步骤, 我们可推广他的结果, 得到下述两个引理。

引理 3.3 在 \mathbb{H}^2 中, 给定一个固定的加权三角剖分曲面 (X, T, Φ) 。任选双曲三角形 Δ_{ijk} , 其三个顶点处圆的半径分别为 r_i, r_j, r_k , 对于任意常数 $c_1 \geq 1$, 均存在一个充分大的常数 $C = C(c_1) > 0$ 使得当 $r_i \geq C$ 时, 有

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \left[(1+c_1) \text{Area}(\Delta_{ijk}) + c_1 \theta_i^{jk} \right] \geq 0.$$

基于引理 3.3, 我们可以得到下述引理。

引理 3.4 对于任意常数 $c_1 \geq 1$, 均存在一个充分大的常数 $C = C(c_1) > 0$ 使得当 $r_i \geq C$ 时, 有

$$A_i \geq c_1 \sum_{j-i} B_{ij}.$$

令 $c_1 = 1$, 则引理 3.3 和 3.4 即为葛化彬[10]中的引理 2.2 和 2.3。因此, 我们的结果将[10]中引理 2.2 和 2.3 从 $c_1 = 1$ 推广至任意常数 $c_1 \geq 1$ 。

下面我们将给出上述两个引理的证明。

证明[引理 3.3]: 取一点 \bar{v}_i , 使得 \bar{r}_i 与 r_i 充分接近, $\bar{r}_i > r_i$ 且点 \bar{v}_i 与点 v_i 位于边 e_{ij} 的同侧。在[11]中, 葛化彬指出当圆包装度量 r_i 增加时, 对应点 v_i 的内角 θ_i 会增加, 显然 $\theta_j^{\bar{k}} > \theta_j^{ik}$, 所以点 v_i 处于双曲三角形 $\Delta_{\bar{ijk}}$ 的内部, 过点 v_i 作 $v_i S \perp e_{\bar{ij}}$, 垂足为点 S , 详情可参考图 3。

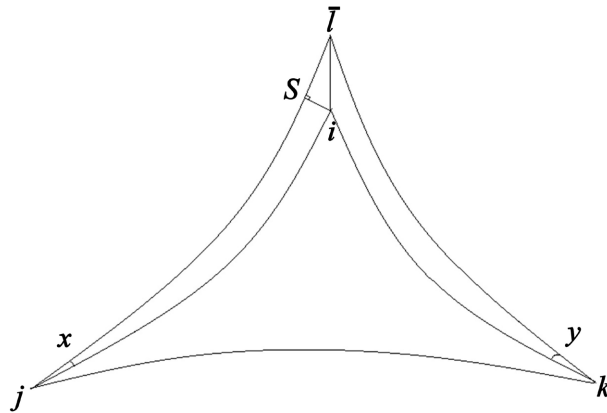


Figure 3. A hyperbolic triangle for lemma 3.3

图 3. 引理 3.3 的一个双曲三角形

证明该引理等价于证明对于任意 $\bar{r}_i > r_i$, 下述不等式成立。

$$(1+c_1) \text{Area}(\Delta_{\bar{ijk}}) + c_1 \theta_i^{jk} - (1+c_1) \text{Area}(\Delta_{ijk}) - c_1 \theta_i^{jk} \geq 0.$$

由 \mathbb{H}^2 中的 Gauss-Bonnet 公式得, 在双曲三角形 Δ_{ijk} 中有 $\theta_i^{jk} + \theta_j^{ik} + \theta_k^{ij} = \pi - \text{Area}(\Delta_{ijk})$ 。

设 $x = \theta_j^{\bar{k}} - \theta_j^{ik}$, $y = \theta_k^{\bar{ij}} - \theta_k^{ij}$, 可得

$$\begin{aligned} & (1+c_1) \text{Area}(\Delta_{\bar{ijk}}) + c_1 \theta_i^{jk} - (1+c_1) \text{Area}(\Delta_{ijk}) - c_1 \theta_i^{jk} \\ &= \text{Area}(\Delta_{\bar{ijk}}) - \text{Area}(\Delta_{ijk}) - c_1 x - c_1 y \\ &= \text{Area}(\Delta_{\bar{ijj}}) + \text{Area}(\Delta_{\bar{ikk}}) - c_1 x - c_1 y \\ &= \text{Area}(\Delta_{\bar{ijj}}) - c_1 x + \text{Area}(\Delta_{\bar{ikk}}) - c_1 y. \end{aligned} \tag{20}$$

所以我们仅需证明 $\text{Area}(\Delta_{\bar{ijj}}) - c_1 x \geq 0$ 即可。由于 $\bar{r}_i > r_i$, 可得 $l_{\bar{ij}} > l_{ij}$, $\theta_i^{\bar{ij}} > \theta_i^{ij}$ 。考虑到

$\theta_i^{\bar{ij}} + \theta_i^{ij} + x = \pi - \text{Area}(\Delta_{\bar{ijj}}) < \pi$, 因此 $\theta_i^{\bar{ij}} < \frac{\pi}{2}$ 。由于 \bar{r}_i 充分接近于 r_i , 所以 $l_{\bar{ij}} \leq 1$ 。由双曲余弦定理得 $\cos x$ 的极限存在, 即

$$\cos x = \frac{\cosh l_{ij} \cosh l_{\bar{i}\bar{j}} - \cosh l_{\bar{i}}}{\sinh l_{ij} \sinh l_{\bar{j}}} \rightarrow 1, r_i \rightarrow +\infty.$$

因此可以找到一个正常数 C_1 使得当 $r_i \geq C_1$ 时, 有 $x \leq \frac{\pi}{4(1+c_1)}$ 成立。

设 $\gamma = \theta_{v_i}^{Sv_j}$, 当 $\gamma < \frac{\pi}{4}$ 时, 显然有 $\gamma + (1+c_1)x < \frac{\pi}{2}$, 然而由 \mathbb{H}^2 中的 Gauss-Bonnet 公式得

$$\gamma + x + \frac{\pi}{2} + \text{Area}(\Delta_{Sv_i v_j}) = \pi,$$

因此 $\text{Area}(\Delta_{\bar{i}\bar{j}}) > \text{Area}(\Delta_{Sv_i v_j}) > c_1 x$ 。

当 $\gamma \geq \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{\sinh l_{Sv_j}}{\sinh l_{ij}} = \sin \gamma \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。由于 $\cos \gamma = \sin x \cosh l_{Sv_j}$, $\cos x = \frac{\tanh l_{Sv_j}}{\tanh l_{ij}}$ 并且

$\sin \sin \gamma = \frac{\sinh l_{Sv_j}}{\sinh l_{ij}}$, 然后由[10]得

$$\sin(\text{Area}(\Delta_{Sv_i v_j})) \geq \sin x \frac{\cosh r_i - 1}{\sqrt{2}}. \tag{21}$$

考虑到当 $x > 0$ 时, $\cosh x$ 递增且无上界, 因此这里我们可以选取一个常数 C_2 使得当 $r_i \geq C_2$ 时有 $\frac{\cosh r_i - 1}{\sqrt{2}} \geq c_1$ 。因此可得

$$\sin(\text{Area}(\Delta_{Sv_i v_j})) \geq c_1 \sin x \geq \sin c_1 x,$$

因为 x 和 $c_1 x$ 都属于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 且 $c_1 \geq 1$, 所以右侧不等式成立。注意到 $\text{Area}(\Delta_{Sv_i v_j}) \in (0, \frac{\pi}{2})$, 因此可得

$$\text{Area}(\Delta_{\bar{i}\bar{j}}) > \text{Area}(\Delta_{Sv_i v_j}) > c_1 x,$$

记 $C = \max\{C_1, C_2\}$, 则引理 3.3 证毕。

下面我们将证明引理 3.4。

证明[引理 3.4]:

$$\begin{aligned} A_i - c_1 \sum_{j-i} B_{ij} &= \sum_{\Delta_{ijk} \in F} \frac{\partial \text{Area}(\Delta_{ijk})}{\partial r_i} \sinh r_i - c_1 \sum_{j-i} \left(\frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_j} \sinh r_j + \frac{\partial \theta_i^{jl}}{\partial r_j} \sinh r_j \right) \\ &= \sum_{\Delta_{ijk} \in F} \frac{\partial \text{Area}(\Delta_{ijk})}{\partial r_i} \sinh r_i - c_1 \sum_{\Delta_{ijk} \in F} \left(\frac{\partial \theta_j^{ik}}{\partial r_i} \sinh r_i + \frac{\partial \theta_k^{ij}}{\partial r_i} \sinh r_i \right) \\ &= \sum_{\Delta_{ijk} \in F} \frac{\partial (\text{Area}(\Delta_{ijk}) - c_1 \theta_j^{ik} - c_1 \theta_k^{ij})}{\partial r_i} \sinh r_i \\ &= \sum_{\Delta_{ijk} \in F} \frac{\partial [(1+c_1) \text{Area}(\Delta_{ijk}) + c_1 \theta_i^{jk}]}{\partial r_i} \sinh r_i \geq 0. \end{aligned} \tag{22}$$

证毕。

定义 3.5 在 \mathbb{B}^2 和 \mathbb{H}^2 中, 给定一个固定的加权三角剖分曲面 (X, T, Φ) , 其分支结构为 $br(P) = \{(b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \dots, (b_m, \beta_m)\} \subset V \times N$, 定义分支组合 Calabi 能量 E 为

$$E(r) = \sum_{i=1}^N (K_i(r) + 2\beta_i\pi). \quad (23)$$

3.2. 分支组合 Ricci 势

在 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中, 因为 $\frac{\partial(K_i + 2\beta_i\pi)}{\partial u_j} = \frac{\partial(K_j + 2\beta_j\pi)}{\partial u_i}$ (参考引理 2.3 [6]), 所以光滑 1-形式 $\sum_{i=1}^N (K_i(u) + 2\beta_i\pi) du_i$ 是闭的。蓝师义 - 戴道清[16]定义分支组合 Ricci 势如下。

定义 3.6 给定一个固定的加权三角剖分曲面 (X, T, Φ) , 其分支结构为 $br(P) = \{(b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \dots, (b_m, \beta_m)\} \subset V \times N$ 。在 \mathbb{E}^2 中, 定义分支组合 Ricci 势为:

$$F(u) = \int_a^u \sum_{i=1}^N (K_i(u) + 2\beta_i\pi) du_i, \quad u \in \mathbb{R}^N, \quad (24)$$

在 \mathbb{H}^2 中, 定义分支组合 Ricci 势为

$$F(u) = \int_a^u \sum_{i=1}^N (K_i(u) + 2\beta_i\pi) du_i, \quad u \in \mathbb{R}_{<0}^N, \quad (25)$$

这里 $a \in \mathbb{R}^N$ 是任意常数。

引理 3.7 在 \mathbb{E}^2 中, 若分支组合 Calabi 流方程的解 $\{r(t)\}$ 存在, 则 $\prod_{i=1}^N r_i(t) = \prod_{i=1}^N r_i(0)$ 以及 $\sum_{i=1}^N u_i(t) = \sum_{i=1}^N u_i(0)$ 均是常数。

由[16]中定理 1, 可得分支组合 Ricci 势的凸性:

引理 3.8 在 \mathbb{H}^2 中, 分支组合 Ricci 势 F 在 $(-\infty, 0)^N$ 上严格凸。在 \mathbb{E}^2 中, F 在 \mathbb{R}^N 上凸且在超平面 $\mathcal{U} = \{(u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))^T \mid \sum_{i=1}^N u_i(t) = 0\}$ (或超曲面 $\mathcal{P} = \{(r_1(t), r_2(t), \dots, r_N(t))^T \mid \prod_{i=1}^N r_i(t) = 1\}$) 上严格凸。

由引理 3.8 可得下述刚性定理, 参考文献[4] [5] [16]。

引理 3.9 在 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中, 记圆包装度量 $(r_1(t), r_2(t), \dots, r_N(t))^T$ 到组合高斯曲率 $(K_1(t), K_2(t), \dots, K_N(t))^T$ 的映射为 $\Pi: \mathbb{R}_{>0}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ 。则

在 \mathbb{H}^2 中, Π 是单射, 所以组合高斯曲率唯一决定圆包装度量。

在 \mathbb{E}^2 中, 在超平面 $\mathcal{U} = \{(u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))^T \mid \sum_{i=1}^N u_i(t) = 0\}$ 上, Π 是单射, 所以在不考虑刚性运动下组合高斯曲率唯一决定圆包装度量, 即 K 与 aK 决定同一圆包装度量, 这里 a 是任意非零常数。

葛化彬(参考定理 B.2 [9])和葛化彬 - 徐旭(参考引理 B.1 [11])证明了组合 Ricci 势在 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中的真性, 这里我们可将他们的结果推广到分支情形。

引理 3.10 在 \mathbb{H}^2 中, 分支组合 Ricci 势 $F(25)$ 满足

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} F(u) = +\infty, \quad (26)$$

在 \mathbb{E}^2 中, 分支组合 Ricci 势 $F(24)$ 满足

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} F(u)|_{u \in \mathcal{U}} = +\infty. \quad (27)$$

由于引理 B.1 [11]得 $F^*(u) = \int_a^u \sum_{i=1}^N K_i(u) du_i$ 满足真性, 显然有引理 3.10 成立。

4. 分支组合 Calabi 流解的长时间存在性

在这章中, 我们将证明在 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中, 分支组合 Calabi 流的解 $\{r(t)\}$ 长时间存在。

定理 4.1 在 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中, 给定一个固定的加权三角剖分曲面 (X, T, Φ) , 其分支结构为 $br(P) = \{(b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \dots, (b_m, \beta_m)\} \subset V \times N$. 任给初值圆包装度量 $r(0)$, 分支组合 Calabi 流的解 $\{r(t)\}$ 长时间存在。

为了证明该定理, 我们需要下面的引理(参考引理 3.5 [6])。

引理 4.2 对于任意的 $\epsilon > 0$, 均存在一个充分大的常数 l , 使得当 $r_i > l$ 时, 双曲三角形 Δ_{ijk} 中点 v_i 处的内角 θ_i^{jk} 有

$$\theta_i^{jk} < \epsilon.$$

现在我们开始证明定理 4.1。

证明: 设 d_i 为点 v_i 处的度, 即与 v_i 相邻的点的个数。记 $d = \max\{d_1, \dots, d_N\}$, 则 $(2-d)\pi < K_i < 2\pi$ 。在 \mathbb{E}^2 中,

$$\begin{aligned} \Delta(K_i + 2\beta_i\pi) &= -\left[L^T(K + 2\beta\pi)\right]_i \\ &= -\sum_{j=1}^N L_{ij}(K_j + 2\beta_j\pi) \\ &= -\sum_{j=i}(-B_{ij})(K_j + 2\beta_j\pi) - L_{ii}(K_i + 2\beta_i\pi) \\ &= \sum_{j=i} B_{ij}(K_j - K_i + 2\beta_j\pi - 2\beta_i\pi). \end{aligned} \tag{28}$$

由引理 3.2 得 $0 < B_{ij} < 2\sqrt{3}$, 可得 $|\Delta(K_i + 2\beta_i\pi)|$ 上有界, 即

$$|\Delta(K_i + 2\beta_i\pi)| < 2\sqrt{3}N(d + 2\beta_{\max})\pi \triangleq c,$$

这里 $\beta_{\max} = \max\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}$ 。

因此 $\left|\frac{du_i}{dt}\right| < c$, 进而我们得到解 $\{r(t)\}$ 满足

$$c_2 e^{-ct} \leq r_i \leq c_3 e^{ct},$$

这里 $c_2 = \min\{r_1(0), r_2(0), \dots, r_N(0)\}$, $c_3 = \max\{r_1(0), r_2(0), \dots, r_N(0)\}$, 因此在 \mathbb{E}^2 中分支组合 Calabi 流(9)的解 $\{r(t)\}$ 长时间存在。

在 \mathbb{H}^2 中, 根据引理 4.2, 可得对于任意点 v_i , 存在一个充分大的 $l > 0$, 使得当 $r_i > l$ 时, 三角形 Δ_{ijk} 中点 v_i 处的内角 θ_i^{jk} 小于 $\frac{\pi}{d}$, 因此 $K_i > \pi$ 。令(18)中 $f = K + 2\beta\pi$, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sinh r_i} \frac{dr_i}{dt} &= \sum_{j=i} B_{ij}(K_j - K_i + 2\beta_j\pi - 2\beta_i\pi) - A_i(K_i + 2\beta_i\pi) \\ &< \sum_{j=i} B_{ij}(2\pi - K_i + 2\beta_{\max}\pi - 2\beta_i\pi) - A_i(K_i + 2\beta_i\pi) \\ &= (2\pi + 2\beta_{\max}\pi) \sum_{j=i} B_{ij} - \left(\sum_{j=i} B_{ij} + A_i\right)(K_i + 2\beta_i\pi) \\ &\leq (2\pi + 4\beta_{\max}\pi) \sum_{j=i} B_{ij} - (\pi + 2\beta_{\min}\pi) \left(\sum_{j=i} B_{ij} + A_i\right) \\ &= (\pi + 2\beta_{\min}\pi) \left[\frac{1 + 4\beta_{\max} - 2\beta_{\min}}{1 + 2\beta_{\min}} \sum_{j=i} B_{ij} - A_i\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

令引理 3.4 中 $c_1 = \frac{1+4\beta_{\max} - 2\beta_{\min}}{1+2\beta_{\min}} \geq 1$, $Q = \max\{l, C, r_i(0)+1\}$, 则当 $r_i > Q$ 时, 有 $\frac{1}{\sinh r_i} \frac{dr_i}{dt} < 0$, 所以解 $\{r(t)\}$ 有上界。

下面我们将证明解 $\{r(t)\}$ 有下界。这里我们需要考虑分支组合 Ricci 势 $F(u)$, 对 $F(u)$ 求导得 $\frac{dF(u)}{dt} = (K + 2\beta\pi)(-L^T)(K + 2\beta\pi) \leq 0$, 因此 $F(u)$ 沿着分支组合 Calabi 流是单调不增的。又因为引理 3.10 指出 $\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} F(u) = +\infty$, 所以存在一个仅依赖于三角剖分, 分支结构与初值 $r(0)$ 的正常数 δ , 使得对于任意点 v_i 和时间 t , 均有 $u_i(t) \geq -\delta$, 因此解 $r_i(t)$ 有下界, 即

$$r_i \geq \ln \frac{1+e^{-\delta}}{1-e^{-\delta}}.$$

综上, 在 \mathbb{H}^2 中分支组合 Calabi 流的解 $\{r(t)\}$ 长时间存在, 证毕。

5. 分支组合 Calabi 流解的收敛性

在这一章中, 我们将证明在 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中分支组合 Calabi 流(9)和(10)解 $\{r(t) | t \in [0, +\infty)\}$ 的收敛性。

定理 5.1 在 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中, 给定一个固定的加权三角剖分曲面 (X, T, Φ) , 其分支结构为 $br(P) = \{(b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \dots, (b_m, \beta_m)\} \subset V \times N$. 任取一初值圆包装度量 $r(0) = (r_1(0), \dots, r_N(0)) \in \mathbb{R}_{>0}^N$ 满足 $\prod_{i=1}^N r_i(t) = 1$, 设 $\{r(t) | t \in [0, +\infty)\}$ 是分支组合 Calabi 流长时间存在的解, 则当且仅当存在一个分支圆包装度量 r_b 时, 解 $\{r(t)\}$ 收敛。若解收敛, 则必指数收敛。

为了证明定理 5.1, 我们需要下面的引理。

引理 5.2 在 \mathbb{E}^2 和 \mathbb{H}^2 中, 给定一个固定的加权三角剖分曲面 (X, T, Φ) , 其分支结构为 $br(P) = \{(b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \dots, (b_m, \beta_m)\} \subset V \times N$. 设存在一个分支圆包装度量 r_b , 分支组合 Calabi 流的解 $\{r(t)\} \subset M$, 这里 M 是 $\mathbb{R}_{>0}^N$ 中的一紧集, 则解 $\{r(t)\}$ 指数收敛到分支圆包装度量 r_b 。

下面我们将给出引理 5.2 的证明。

证明: 对 $K_i + 2\beta_i\pi$ 求导, 得到

$$\frac{d(K + 2\beta\pi)}{dt} = \frac{d(K + 2\beta\pi)}{du} \frac{du}{dt} = -L^2(K + 2\beta\pi).$$

因为 L 在 \mathbb{H}^2 中是正定的, 在 \mathbb{E}^2 中半正定, 所以我们可取 L 的最小正特征值为 λ_1 , 然后对分支组合 Calabi 能量进行求导得到

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2(K + 2\beta\pi)^T (K + 2\beta\pi)' \\ &= -2(K + 2\beta\pi)^T L^2 (K + 2\beta\pi) \\ &\leq -2\lambda_1^2 (K + 2\beta\pi)^T (K + 2\beta\pi) \\ &= -2\lambda_1^2 E(t). \end{aligned}$$

因此我们得到 $E(t) \leq E_0 e^{-2\lambda_1^2 t}$ 且 $|K_i(t) + 2\beta_i\pi| \leq |K(t) + 2\beta\pi| = \sqrt{E(t)} \leq \sqrt{E_0} e^{-\lambda_1^2 t}$. 又因为 $\{r(t)\} \subset M$, M 是 $\mathbb{R}_{>0}^N$ 中一紧集, 所以沿着分支组合 Calabi 流, L_{ij} , r_i 和 $\sinh r_i$ 是有界的。因此在 \mathbb{E}^2 中, 我们有

$$\left| \frac{dr_i}{dt} \right| = |r_i \Delta (K_i + 2\beta_i\pi)| = \left| r_i \sum_{j=1}^N L_{ij} (K_j + 2\beta_j\pi) \right| \leq m e^{-\lambda_1^2 t},$$

在 \mathbb{H}^2 中, 可得

$$\left| \frac{dr_i}{dt} \right| = \left| \sinh r_i \sum_{j=1}^N L_{ij} (K_j + 2\beta_j \pi) \right| \leq n e^{-2t},$$

这里 m, n 是两个充分大的正常数。这说明, 无论是在 \mathbb{B}^2 还是 \mathbb{H}^2 中, 分支组合 Calabi 流的解 $\{r(t)\}$ 指数收敛。记 $r(t) \rightarrow r^*, t \rightarrow +\infty$ 以及 $K(t) \rightarrow K^*, t \rightarrow +\infty$, 显然 $K^* + 2\beta\pi = 0$, 所以由引理 3.9 得 r^* 实际上是一个分支圆包装度量 r_b , 证毕。

下面我们将给出定理 5.1 的证明。

证明: 在 \mathbb{B}^2 中, 根据引理 5.2 的证明, 容易得到, 若分支组合 Calabi 流的解 $\{r(t) | t \in [0, +\infty)\}$ 收敛, 则分支圆包装度量 r_b 存在。

另一方面, 假设分支圆包装度量 r_b 存在, 设 $\{r(t) | t \in [0, +\infty)\}$ 是分支组合 Calabi 流的解, 令 $u_i(t) = \ln r_i(t)$, 由 $\prod_{i=1}^N r_i(0) = 1$ 得初值圆包装度量 u_0 在超平面 $\mathcal{U} = \left\{ (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))^T \mid \sum_{i=1}^N u_i(t) = 0 \right\}$ 上, 由引理 3.7 可得解 $\{u(t) | t \in [0, +\infty)\} \subset \mathcal{U}$ 。令分支组合 Ricci 势定义中的 $a = u_b$, 由引理 3.9 得分支组合 Ricci 势的梯度映射 $\nabla F : \mathcal{U} \rightarrow K + 2\beta\pi$ 是单射, 并且 $u = u_b$ 是 F 唯一的临界点。由引理 3.1 得 F 的海塞矩阵 L 是半正定的, 所以有 $F(u) \geq F(u_b) = 0$ 。进一步地, 我们还可以得到

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^N (K_i + 2\beta_i \pi) \frac{du_i}{dt} = -(K + 2\beta\pi)^T L^T (K + \beta\pi) \leq 0.$$

所以 F 沿着分支组合 Calabi 流是单调递减的, 即 $0 = F(u_b) \leq F(u) \leq F(u(0))$, 由引理 3.10, 可得 $\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} F(u)|_{u \in \mathcal{U}} = +\infty$, 因此 $\{u(t)\} \subset (F|_{u \in \mathcal{U}})^{-1} [0, F(u(0))]$ 且 $(F|_{u \in \mathcal{U}})^{-1} [0, F(u(0))]$ 是一个紧集, 因此 $\{r(t)\} \subset M$, 这里 M 是 $\mathbb{R}_{>0}^N$ 中的一紧集, 所以由引理 5.2, 可得分支组合 Calabi 流方程解 $\{r(t)\}$ 指数收敛到分支圆包装度量 r_b 。

在 \mathbb{H}^2 中, 证明与在 \mathbb{B}^2 中完全类似, 此处省略。证毕。

6. 结论

分支组合 Calabi 流是四阶曲率流, 无法建立类似 Chow 和罗锋[6]在组合 Ricci 流证明中的极大原理, 这是研究的一大难点。我们推广了葛化彬等人[8] [9] [10] [11]在组合 Calabi 流中使用的几何方法, 克服了难点, 证明了分支组合 Calabi 流解的长时间存在性与收敛性。

引理 3.3 和引理 3.4 中的一致估计是分支组合 Calabi 流解的长时间存在性与收敛性证明的关键步骤, 为此我们将葛化彬和华波波[10]中的类似估计从 $c_1 = 1$ 成功推广到了任意常数 $c_1 \geq 1$ 。

综上所述, 本文对于组合曲率流的理论研究具有一定的借鉴价值, 同时还有潜在的应用价值。

基金项目

国家自然科学基金面上项目(12171480), 湖南省杰出青年基金项目(2022JJ10059), 湖南省自然科学基金面上项目(2020JJ4658)资助。

参考文献

- [1] Thurston, W. (1976) *Geometry and Topology of 3-Manifolds*. Princeton Lecture Notes.
- [2] Rodin, B. and Sullivan, D. (1987) The Convergence of Circle Packings to the Riemann Mapping. *Journal of Differential Geometry*, **26**, 349-360. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214441375>
- [3] Beardon, A.F. and Stephenson, K. (1990) The Uniformization Theorem for Circle Packings. *Indiana University Mathematics Journal*, **39**, 1383-1425. <https://doi.org/10.1512/iumj.1990.39.39062>

-
- [4] Bowers, P. and Stephenson, K. (1996) A Branched Andreev-Thurston Theorem for Circle Packings of the Spheres. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **73**, 185-215. <https://doi.org/10.1112/plms/s3-73.1.185>
- [5] Dubejko, T. (1995) Branched Circle Packings and Discrete Blaschke Products. *Transactions of the AMS*, **347**, 4073-4103. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1995-1308008-1>
- [6] Chow, B. and Luo, F. (2003) Combinatorial Ricci Flows on Surfaces. *Journal of Differential Geometry*, **63**, 97-129. <https://doi.org/10.4310/jdg/1080835659>
- [7] Feng, K., Lin, A.J. and Zhang, X.X. (2020) Combinatorial p-th Calabi Flows for Discrete Conformal Factors on Surfaces. *Journal of Geometric Analysis*, **30**, 3979-3994. <https://doi.org/10.1007/s12220-019-00224-0>
- [8] 葛化彬. 组合方法与几何方程[D]: [博士学位论文]. 北京: 北京大学, 2012.
- [9] Ge, H.B. (2018) Combinatorial Calabi Flows on Surfaces. *Transactions of the AMS*, **370**, 1377-1391. <https://doi.org/10.1090/tran/7196>
- [10] Ge, H.B. and Hua, B.B. (2018) On Combinatorial Calabi Flow with Hyperbolic Circle Patterns. *Advances in Mathematics*, **333**, 523-538. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.05.039>
- [11] Ge, H.B. and Xu, X. (2016) 2-Dimensional Combinatorial Calabi Flow in Hyperbolic Background Geometry. *Differential Geometry and Its Applications*, **47**, 86-98. <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2016.03.011>
- [12] Lin, A.J. and Zhang, X.X. (2019) Combinatorial p-th Calabi Flows on Surfaces. *Advances in Mathematics*, **346**, 1067-1090. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.02.011>
- [13] Luo, F. (2004) Combinatorial Yamabe Flow on Surfaces. *Communications in Contemporary Mathematics*, **6**, 765-780. <https://doi.org/10.1142/S0219199704001501>
- [14] Bobenko, A., Hoffmann, T. and Springborn, B. (2006) Minimal Surfaces from Circle Patterns: Geometry from Combinatorics. *Annals of Mathematics*, **164**, 231-264. <https://doi.org/10.4007/annals.2006.164.231>
- [15] Gu, X.D. and Yau, X.T. (2008) Computational Conformal Geometry. Advanced Lectures in Mathematics, Vol. 3, Higher Education Press of China, Beijing.
- [16] Lan, S.Y. and Dai, D.Q. (2007) Variational Principles for Branched Circle Patterns. *Nonlinear Analysis*, **67**, 498-511. <https://doi.org/10.1016/j.na.2006.06.008>