Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(11), 7636-7646**
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1111808

Hans汉斯

一类三阶变参数中立型奇性微分方程周期正解的存在性

李盼盼

河南理工大学数学与信息科学学院，河南 焦作

收稿日期：2022年10月3日；录用日期：2022年10月27日；发布日期：2022年11月7日

摘 要

本文利用Leray-Schauder型不动点定理和中立型算子的性质，我们证明了三阶变参数中立型奇性微分方程T-周期正解的存在性，其非线性项可以满足次线性、半线性和超线性条件。

关键词

中立型算子，周期正解，Leray-Schauder型不动点定理，奇性，变参数

Existence of Positive Periodic Solutions for a Third-Order Neutral Singular Differential Equation with Time-Dependent Parameter

Panpan Li

School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo Henan

Received: Oct. 3rd, 2022; accepted: Oct. 27th, 2022; published: Nov. 7th, 2022

Abstract

By using the fixed point theorem of Leray-Schauder type and the properties of neutral operators, we prove that the existence of positive T-periodic solutions for a third-order neutral singular differential equation with time-dependent parameter, the nonlinear term may satisfy sub-linearity, semi-linearity and super-linearity conditions.

文章引用：李盼盼. 一类三阶变参数中立型奇性微分方程周期正解的存在性[J]. 应用数学进展，2022，11(11): 7636-7646. DOI: 10.12677/aam.2022.1111808

Keywords

Neutral Operators, Positive Periodic Solutions, Fixed Point Theorem of Leray-Schauder Type, Singularity, Time-Dependent Parameter

1. 引言

在本文中，我们考虑了三阶变参数中立型奇性微分方程

$$\left(u(t)-c(t)u(t-\sigma(t))\right)'''+a(t)u(t)=f\left(t,u\left(t-\delta(t)\right)\right) \tag{1.1}$$

至少存在一个 T-周期正解，其中 $a\in C(\mathbb{R},(0,+\infty))$，$\sigma\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$\delta\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$a,\sigma$ 和 δ 是 T-周期函数且 T 是正常数，$c\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是 T-周期函数，非线性项 $f(t,u)\in Car(\mathbb{R}\times(0,+\infty),\mathbb{R})$ 是一个 L^2-Carathéodory 函数且关于 t 是 T-周期的，$f(t,u)$ 在原点具有排斥型奇性，即

$$\lim_{u\to 0^+} f(t,u)=+\infty\text{，关于 } t \text{ 一致。}$$

中立型微分方程大多来源于自然科学和工程领域，可用于描述许多自然现象，并已广泛应用于物理学、生物学、生态学等诸多领域。例如，造血模型[1]，Nicholson 绿头苍蝇模型[2]等都是中立型微分方程。由于中立项的出现，与传统的常微分方程相比，研究中立型微分方程更具有难度，并且中立型微分方程能更加精确地描述客观事物的发展规律。近年来，中立型奇性微分方程的研究引起了许多学者的广泛关注。在 2006 年，李志祥和王晓[3]证明了下列一阶中立型微分方程

$$\left(u(t)-cu(t-\delta(t))\right)'+a(t)u(t)=f\left(t,u\left(t-\delta(t)\right)\right) \tag{1.2}$$

T-周期正解的存在性，其中 c 为常数且 $c\in(0,1)$，$f(t,u)\in C(\mathbb{R}\times(0,+\infty),(0,+\infty))$。利用 Krasnoselskii 不动点定理，他们得到了方程(1.2) T-周期正解的存在性，其非线性项 $f(t,u)$ 满足次线性和超线性条件。在 2009 年，张荣森、任景莉和韩卫卫[4]研究了下列二阶中立型微分方程

$$\left(u(t)-cu(t-\delta(t))\right)''+a(t)u(t)=f\left(t,u\left(t-\delta(t)\right)\right) \tag{1.3}$$

T-周期正解的存在性，其中 $c\in(-1,1)$。利用 Krasnoselskii 不动点定理和限制非线性项 $F(t,u):=f\left(t,u\left(t-\delta(t)\right)\right)-ca(t)u\left(t-\delta(t)\right)$，他们得到了方程(1.3) T-周期正解的存在性，其非线性项 $f(t,u)$ 满足次线性条件。在 2019 年，吕丽莎和程志波[5]研究了下列二阶变参数中立型微分方程

$$\left(u(t)-c(t)u(t-\sigma(t))\right)''+a(t)u(t)=f\left(t,u\left(t-\delta(t)\right)\right) \tag{1.4}$$

T-周期正解的存在性，其中 $c(t)\in\left(-\frac{m}{M+m},\frac{m}{M+m}\right)$，此处 $M:=\max_{t\in[0,T]}a(t)$，$m:=\min_{t\in[0,T]}a(t)$。利用 Leray-Schauder 型不动点定理，结合中立型算子 $(Au)(t):=u(t)-c(t)u(t-\sigma(t))$ 的性质，他们得到了在超

线性条件下方程(1.4)T-周期正解的存在性，其非线性项 $f(t,u)$ 满足次线性、半线性和超线性条件。

关于一阶和二阶中立型微分方程 T-周期正解的存在性已经有了大量工作(见[3]-[11])，但对三阶中立型微分方程的研究相对较少。同时，由于中立项的存在，许多理论难以应用，对中立型微分方程 T-周期正解存在性的研究具有一定的难度，并且方程(1.1)在零点处具有排斥型奇性。本文利用 Leray-Schauder 型不动点定理，我们证明了当 $c(t)\in\left(0,\dfrac{m}{M+m}\right)$ 时方程(1.1) T-周期正解的存在性，其非线性项 $f(t,u)$ 满足次线性、半线性和超线性条件。

2. 预备知识

本文中，我们定义

$$C_T := \left\{u\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) : u(t+T)=u(t),\ 对任意 t\in\mathbb{R}\right\},$$

其范数记为 $\|u\| := \max\limits_{t\in\mathbb{R}}|u(t)|$。显然，$(C_T,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间。定义

$$c_\infty := \max_{t\in[0,T]}|c(t)|,\ c_0 := \min_{t\in[0,T]}|c(t)|,$$

和

$$c'_\infty := \max_{t\in[0,T]}|c'(t)|,\ c''_\infty := \max_{t\in[0,T]}|c''(t)|.$$

首先，我们给出 Leray-Schauder 型不动点定理，这将用于我们下面的证明中。

引理 2.1 (见[12]，定理 5)令 $X=(X,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间，假设 $B(0,r)$ 是 X 上以 0 为球心，r 为半径的开球(或闭球)。若算子 $\mathrm{A},\mathrm{B}: X\to X$ 满足以下条件：

(a) A 一个压缩算子；

(b) B 是一个全连续算子。

那么

(i) 存在 $u\in B[0,r]$ 使得 $u=\mathrm{A}u+\mathrm{B}u$ 成立；或者

(ii) 存在 $u\in\partial B[0,r]$ 和 $\lambda\in(0,1)$ 使得 $u=\lambda\mathrm{A}\left(\dfrac{u}{\lambda}\right)+\lambda\mathrm{B}u$ 成立。

接下来，我们考虑非齐次线性微分方程

$$\begin{cases} u'''(t)+a(t)u(t)=h(t), \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(T), \quad i=0,1,2, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $h\in C_T^+ := \left\{h\in C(\mathbb{R},(0,+\infty)) : h(t+T)=h(t),\ 对任意 t\in\mathbb{R}\right\}$。方程(2.1)可转化为

$$u'''(t)+Mu(t)=(M-a(t))u(t)+h(t), \tag{2.2}$$

则方程(2.2)存在唯一一个 T-周期解

$$u(t)=\int_0^T G(t,s)\big((M-a(s))u(s)+h(s)\big)\mathrm{d}s,$$

其中 $G(t,s)$ 是方程(2.2) 的格林函数。

下面我们考虑格林函数 $G(t,s)$ 的符号和中立型算子 $(Au)(t)=u(t)-c(t)u(t-\sigma(t))$ 的性质。

引理 2.2 (见[13]，引理 2.1)方程(2.1)存在唯一一个 T-周期解

$$u(t)=\int_0^T G(t,s)\big((M-a(s))u(s)+h(s)\big)\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{2\exp\left(\frac{1}{2}M^{\frac{1}{3}}(t-s)\right)\left[\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}M^{\frac{1}{3}}(t-s)-\frac{\pi}{6}\right)-\exp\left(\frac{1}{2}M^{\frac{1}{3}}T\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}M^{\frac{1}{3}}(t-s-T)-\frac{\pi}{6}\right)\right]}{3M^{\frac{2}{3}}\left(1+\exp\left(M^{\frac{1}{3}}T\right)-2\exp\left(\frac{1}{2}M^{\frac{1}{3}}T\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}M^{\frac{1}{3}}T\right)\right)} \\ \quad+\dfrac{\exp\left(M^{\frac{1}{3}}(s-t)\right)}{3M^{\frac{2}{3}}\left(1-\exp\left(-M^{\frac{1}{3}}T\right)\right)}, \qquad 0\le s<t\le T, \\ \dfrac{2\exp\left(\frac{1}{2}M^{\frac{1}{3}}(t+T-s)\right)\left[\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}M^{\frac{1}{3}}(t+T-s)-\frac{\pi}{6}\right)-\exp\left(\frac{1}{2}M^{\frac{1}{3}}T\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}M^{\frac{1}{3}}(t-s)-\frac{\pi}{6}\right)\right]}{3M^{\frac{2}{3}}\left(1+\exp\left(M^{\frac{1}{3}}T\right)-2\exp\left(\frac{1}{2}M^{\frac{1}{3}}T\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}M^{\frac{1}{3}}T\right)\right)} \\ \quad+\dfrac{\exp\left(M^{\frac{1}{3}}(s-t-T)\right)}{3M^{\frac{2}{3}}\left(1-\exp\left(-M^{\frac{1}{3}}T\right)\right)}, \qquad 0\le t\le s\le T.\end{cases}$$

根据引理 2.2，我们定义

$$l:=\min_{0\le s,t\le T}G(t,s)=\frac{1}{3M^{\frac{2}{3}}\left(\exp\left(M^{\frac{1}{3}}T\right)-1\right)},\quad L:=\max_{0\le s,t\le T}G(t,s)=\frac{3+2\exp\left(-\frac{M^{\frac{1}{3}}T}{2}\right)}{3M^{\frac{2}{3}}\left(1-\exp\left(-\frac{M^{\frac{1}{3}}T}{2}\right)\right)^2},\quad \mu:=\frac{l}{L}.$$

显然，$0<\mu\le 1$。

引理 2.3 (见[13]，引理 4.2) 若 $M<\dfrac{64\pi^3}{81\sqrt{3}T^3}$，则对任意 $(t,s)\in[0,T]\times[0,T]$，有 $0<A\le G(t,s)\le B$。进一步，我们得到 $\int_0^T G(t,s)\mathrm{d}s=\dfrac{1}{M}$。

引理 2.4 (见[14]，引理 2.1)若对任意 $t\in\mathbb{R}$，有 $|c(t)|\ne 1$，则算子 A 在 C_T 上存在一个逆算子 A^{-1} 满足

1) $\left|\left(A^{-1}u\right)(t)\right|\le\dfrac{\|u\|}{1-c_\infty}$，对任意 $u\in C_T$ 且 $|c(t)|<1$；

2) $\left|\left(A^{-1}u\right)(t)\right|\le\dfrac{\|u\|}{c_0-1}$，对任意 $u\in C_T$ 且 $|c(t)|>1$。

3. 主要结论

在本节，我们证明对任意 $t\in\mathbb{R}$，当 $c(t)\in\left(0,\dfrac{m}{M+m}\right)$ 时方程(1.1)存在 T-周期正解。

定理 3.1 假设对任意 $t\in\mathbb{R}$，有 $c(t)\in\left(0,\dfrac{m}{M+m}\right)$ 且 $M<\dfrac{64\pi^3}{81\sqrt{3}T^3}$ 成立。进一步，存在常数 $r_1>0$ 使得下列条件成立：

(H_1) 存在连续函数 $\phi_1(t)>0$ 使得对任意 $t\in[0,T]$ 和 $u\in(0,r_1]$，有 $f(t,u)\ge\phi_1(t)$；

(H_2) 存在连续正函数 $q(u)$，非负函数 $h(u)$ 和 $k(t)$ 使得对任意 $t\in[0,T]$ 和 $u\in(0,r_1]$，有

$$0\le f(t,u)\le k(t)\big(q(u)+h(u)\big),$$

其中 $q(u)$ 非增，$\dfrac{h(u)}{q(u)}$ 在 $(0,r_1]$ 上非减；

(H_3) 下列不等式成立

$$K^*<\frac{r_1\left[m-(M+m)c_\infty\right]}{Mq(\beta_1 r_1)\left(1+\dfrac{h(r_1)}{q(r_1)}\right)},$$

其中 $\beta_1:=\mu\left(\dfrac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2(1-c_\infty)$，$K(t):=\int_0^T G(t,s)k(s)\mathrm{d}s$ 且 $K^*:=\max\limits_{t\in[0,T]}K(t)$。

则方程(1.1)至少存在一个 T-周期正解 u 且 $u\in(0,r_1)$。

证明：首先，令 $v(t)=(Au)(t)$，根据引理 2.4，便有 $u(t)=\left(A^{-1}v\right)(t)$。由此方程(1.1)可转化为

$$v'''(t)+a(t)v(t)-a(t)H\big(v(t)\big)=f\Big(t,u\big(t-\delta(t)\big)\Big), \tag{3.1}$$

其中 $H\big(v(t)\big)=-c(t)\left(A^{-1}v\right)\big(t-\sigma(t)\big)=-c(t)u\big(t-\sigma(t)\big)$。因此方程(3.1) 可写为

$$v'''(t)+Mv(t)=f\Big(t,u\big(t-\delta(t)\big)\Big)+\big(M-a(t)\big)v(t)+a(t)H\big(v(t)\big). \tag{3.2}$$

定义算子 T 和 $\mathrm{N}:C_T\to C_T$ 为

$$(\mathrm{T}f)(t)=\int_0^T G(t,s)f\Big(s,u\big(s-\delta(s)\big)\Big)\mathrm{d}s \text{ 和 } (\mathrm{N}v)(t)=a(t)H\big(v(t)\big)+\big(M-a(t)\big)v(t).$$

因此，方程(3.2)的解可写成

$$v(t)=(\mathrm{T}f)(t)+(\mathrm{TN}v)(t).$$

由于对任意 $t\in\mathbb{R}$，有 $c(t)\in\left(0,\dfrac{m}{m+M}\right)$ 且 $\|\mathrm{T}\|<\dfrac{1}{M}$ (见[4]，引理 3.2)，利用引理 2.4，得

$$\|\mathrm{TN}\|\le\|\mathrm{T}\|\|\mathrm{N}\|\le\frac{1}{M}\left(M-m+\frac{Mc_\infty}{1-c_\infty}\right)\le\frac{M-m(1-c_\infty)}{M(1-c_\infty)}<1. \tag{3.3}$$

从而有

$$v(t)=(I-\mathrm{TN})^{-1}(\mathrm{T}f)(t).$$

定义算子 $\mathrm{P}:C_T\to C_T$ 为

$$(\mathrm{P}f)(t)=(I-\mathrm{TN})^{-1}(\mathrm{T}f)(t). \tag{3.4}$$

不难看出，若 $M<\dfrac{64\pi^3}{81\sqrt{3}T^3}$ 成立，则 $v(t)=(\mathrm{P}f)(t)$ 是方程(3.2)唯一的 T-周期正解。更进一步，根据([9]，

引理 3.2)和 $\|\mathrm{T}\| < \frac{1}{M}$，有

$$\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}(\mathrm{T}f)(t) \le (\mathrm{P}f)(t) \le \frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}\|\mathrm{T}f\|. \tag{3.5}$$

再定义算子 A 和 $\mathrm{B}: C_T \to C_T$ 为

$$(\mathrm{A}u)(t) = c(t)u(t-\sigma(t)) \text{ 和 } (\mathrm{B}u)(t) = \mathrm{P}\left(f\left(t,u\left(t-\delta(t)\right)\right)\right).$$

从上面的论述可知，方程(1.1)的 T-周期正解的存在性等价于下列算子方程

$$u = \mathrm{B}u + \mathrm{A}u \tag{3.6}$$

在 C_T 上周期正解的存在性。

接下来，因为(H_2)成立，我们选择 $n_0 \in \{1,2,\cdots\}$ 使得 $\frac{1}{n_0} < \beta_1 r_1$，而且

$$\frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}K^* q(\beta_1 r_1)\left(1+\frac{h(r_1)}{q(r_1)}\right)+c_\infty r_1+\frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}\frac{1}{n_0} < r_1,$$

其中 β_1 和 r_1 在定理 3.1 中已定义。令 $N_0 = \{n_0, n_0+1, n_0+2,\cdots\}$，固定 $n \in N_0$，考虑下列方程簇

$$v'''(t)+Mv(t) = \lambda\left(f_n\left(t,u\left(t-\delta(t)\right)\right)+\left(M-a(t)\right)v(t)+a(t)H\left(v(t)\right)\right)+(I-\mathrm{TN})^{-1}\frac{a(t)}{n}, \tag{3.7}$$

其中 $\lambda \in (0,1)$，且

$$f_n(t,u) = \begin{cases} f(t,u) & \text{若 } u \ge \frac{1}{n}, \\ f\left(t,\frac{1}{n}\right) & \text{若 } u \le \frac{1}{n}. \end{cases}$$

下面我们证明方程(3.7)对每一个 $n \in N_0$ 存在一个 T-周期正解。

定义 $B[0,r] := \{u \in X : |u| \le r\}$，由于当 $u \to 0^+$ 时，非线性项 $f(t,u) \to +\infty$，则当 $u=0$ 时 u 是奇点，于是对任意 $t \in \mathbb{R}$，我们得到 $u>0$ 或者 $u<0$。不失一般性，考虑 $u>0$ 且符合方程(1.1)中 u 的定义，所以我们有 $u>0$。

令

$$B_1[0,r_1] := \{u \in C_T : 0 \le u \le r_1, \text{对任意} t \in \mathbb{R}\}.$$

显然，$B_1[0,r_1]$ 在 C_T 中是有界闭凸子集。对任意 $t \in \mathbb{R}$ 和 $u \in B_1[0,r_1]$，有

$$(\mathrm{A}u)(t+T) = c(t+T)u\left(t+T-\sigma(t+T)\right) = c(t)u\left(t-\sigma(t)\right) = (\mathrm{A}u)(t)$$

和

$$(\mathrm{B}u)(t+T) = \mathrm{P}\left(f_n\left(t+T,u\left(t+T-\delta(t+T)\right)\right)\right) = \mathrm{P}\left(f_n\left(t,u\left(t-\delta(t)\right)\right)\right) = (\mathrm{B}u)(t),$$

这表示 $(\mathrm{A}u)(t)$ 和 $(\mathrm{B}u)(t)$ 是 T-周期的。对任意的 $u_1,u_2 \in B_1[0,r_1]$，有

$$\begin{aligned}\left|(\mathrm{A}u_1)(t)-(\mathrm{A}u_2)(t)\right| &= \left|c(t)u_1\left(t-\sigma(t)\right)-c(t)u_2\left(t-\sigma(t)\right)\right| \\ &= |c(t)|\left|u_1\left(t-\sigma(t)\right)-u_2\left(t-\sigma(t)\right)\right| \\ &\le c_\infty |u_1-u_2|.\end{aligned}$$

根据对任意 $t\in\mathbb{R}$，由 $c(t)\in\left(0,\dfrac{m}{M+m}\right)$，可知 A 是压缩算子。显然，B 是全连续算子(见[8]，定理 3.1)。

另一方面，我们证明对任意 $\lambda\in(0,1)$，方程(3.6)中的任何解 u 必须满足 $|u|\neq r_1$。利用反证法，假设对任意的 $\lambda\in(0,1)$，存在方程(3.6)中的任何解 u 满足 $|u|=r_1$。由(3.5)可得

$$
\begin{aligned}
&u(t)-\lambda \mathrm{A}\left(\frac{u}{\lambda}\right)(t)-(I-TN)^{-1}\frac{1}{n}\\
&=\lambda \mathrm{B}u(t)=\lambda \mathrm{P}\left(f_n\left(t,u\left(t-\delta(t)\right)\right)\right)\\
&\geq \frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\lambda(\mathrm{T}f_n)(t)\\
&\geq \frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\lambda\int_0^T G(t,s)f_n\left(s,u\left(s-\delta(s)\right)\right)\mathrm{d}s\\
&\geq \frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\lambda l\int_0^T f_n\left(s,u\left(s-\delta(s)\right)\right)\mathrm{d}s\\
&= \frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\lambda\mu L\int_0^T f_n\left(s,u\left(s-\delta(s)\right)\right)\mathrm{d}s\\
&\geq \frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\mu\lambda\max_{t\in\mathbb{R}}\int_0^T G(t,s)f_n\left(s,u\left(s-\delta(s)\right)\right)\mathrm{d}s\\
&=\mu\lambda\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}\|\mathrm{T}f_n\|\\
&\geq \mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2\lambda\|\mathrm{P}f_n\|\\
&=\mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2\left\|u-\lambda \mathrm{A}\left(\frac{u}{\lambda}\right)-(I-TN)^{-1}\frac{1}{n}\right\|.
\end{aligned}
$$

根据 $\dfrac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}<1$ 可得

$$
\begin{aligned}
u(t)&\geq \mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2\left\|u-\lambda \mathrm{A}\left(\frac{u}{\lambda}\right)-(I-TN)^{-1}\frac{1}{n}\right\|+\lambda \mathrm{A}\left(\frac{u}{\lambda}\right)(t)+(I-TN)^{-1}\frac{1}{n}\\
&\geq \mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2\|u\|-\mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2\left\|\lambda \mathrm{A}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\right\|+\lambda \mathrm{A}\left(\frac{u}{\lambda}\right)(t)\\
&\quad-\mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2\left\|(I-TN)^{-1}\frac{1}{n}\right\|+(I-TN)^{-1}\frac{1}{n}\\
&\geq \mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2\|u\|-\mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2\left\|\lambda \mathrm{A}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\right\|+\lambda \mathrm{A}\left(\frac{u}{\lambda}\right)(t)\\
&\quad-\mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2\left\|\frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}\right\|\left\|\frac{1}{n}\right\|+\frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

$$\geq \mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2\|u\|-\mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2\left\|\lambda \mathrm{A}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\right\|+\lambda \mathrm{A}\left(\frac{u}{\lambda}\right)(t)$$
$$\geq \mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2\|u\|-\mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2 c_\infty\|u\|$$
$$\geq \mu\left(\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\right)^2(1-c_\infty)r_1 := \beta_1 r_1,$$

由于$\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}\leq\beta_1 r_1$，则

$$u(t)\geq\beta_1 r_1>\frac{1}{n}.$$

结合(3.3)，(3.5)，条件(H_2)和(H_3)，有

$$u(t)=\lambda \mathrm{B}u(t)+\lambda \mathrm{A}\left(\frac{u}{\lambda}\right)(t)+(I-TN)^{-1}\frac{1}{n}$$
$$=\lambda \mathrm{P}\left(f_n\left(t,u\left(t-\delta(t)\right)\right)\right)+c(t)u\left(t-\sigma(t)\right)+(I-TN)^{-1}\frac{1}{n}$$
$$\leq\frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}\|\mathrm{T}f_n\|+c_\infty r_1+\frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}\frac{1}{n}$$
$$\leq\frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}\int_0^T G(t,s)f_n\left(s,u\left(s-\delta(s)\right)\right)\mathrm{d}s+c_\infty r_1+\frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}\frac{1}{n}$$
$$\leq\frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}\int_0^T G(t,s)k(s)q\left(u\left(s-\delta(s)\right)\right)\left(1+\frac{h\left(u\left(s-\delta(s)\right)\right)}{q\left(u\left(s-\delta(s)\right)\right)}\right)\mathrm{d}s+c_\infty r_1+\frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}\frac{1}{n}$$
$$\leq\frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}K^*q(\beta_1 r_1)\left(1+\frac{h(r_1)}{q(r_1)}\right)+c_\infty r_1+\frac{M(1-c_\infty)}{m-(M+m)c_\infty}\frac{1}{n_0}<r_1.$$

所以，$r_1=\|u\|<r_1$是矛盾的。因此，利用引理2.1可得到$u=\mathrm{A}u+\mathrm{B}u$在$\mathrm{B}_1[0,r_1]$中存在一个不动点，记为$u_n$，则我们有

$$v'''(t)+a(t)v(t)-a(t)H(v(t))=f_n\left(t,u\left(t-\delta(t)\right)\right)+(I-TN)^{-1}\frac{a(t)}{n}\tag{3.8}$$

存在一个T-周期正解u_n且$0<u_n\leq r_1$。

最后，我们考虑$u_n(t)$有一个一致正下界，即存在常数$\eta_1>0$，与$n\in N_0$无关，使得

$$\min_{t\in[0,T]}\{u_n(t)\}\geq\eta_1.$$

根据条件(H_1)可知存在连续函数$\phi_1(t)>0$使得对任意$t\in[0,T]$和$u_n\in(0,r_1]$，有$f_n(t,u_n)\geq\phi_1(t)$。由此有

$$u_n(t)=\mathrm{B}u_n(t)+\mathrm{A}u_n(t)+(I-TN)^{-1}\frac{1}{n}$$
$$=\mathrm{P}\left(f_n\left(t,u_n\left(t-\delta(t)\right)\right)\right)+c(t)u_n\left(t-\sigma(t)\right)+(I-TN)^{-1}\frac{1}{n}$$
$$\geq\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}(\mathrm{T}f_n)(t)+c(t)u_n\left(t-\sigma(t)\right)+(I-TN)^{-1}\frac{1}{n}$$
$$\geq\frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}(\mathrm{T}f_n)(t)$$

$$\geq \frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\int_0^T G(t,s) f_n\big(s,u(s-\delta(s))\big)\mathrm{d}s$$
$$\geq \frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\int_0^T G(t,s)\phi_1(s)\mathrm{d}s$$
$$\geq \frac{m-(M+m)c_\infty}{M(1-c_\infty)}\Phi_* := \eta_1 < r_1,$$

其中 $\Phi(t) := \int_0^T G(t,s)\phi_1(s)\mathrm{d}s$，$\Phi_* := \min_{t\in[0,T]}\Phi(t)$，于是得到 $u_n(t)\geq \eta_1$。

接下来，我们证明 $\{u_n\}_{n\in N_0}$ 是有界序列。因为 u_n 是方程(3.8)的 T-周期正解，所以

$$(Au_n)'''(t)+a(t)u_n(t) = f_n\big(t,u_n(t-\delta(t))\big)+\frac{a(t)}{n}. \tag{3.10}$$

根据方程(3.10)和 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}\left\|(Au_n)''\right\| &= \max_{s\in R}\left|\int_{t_0}^t (Au_n)'''(s)\mathrm{d}s\right| + (Au_n)''(t_0)\\ &\leq \int_0^T |a(t)||u_n(t)|\mathrm{d}t + \int_0^T \left|f_n\big(t,u_n(t-\delta(t))\big)\right|\mathrm{d}t + \int_0^T \frac{|a(t)|}{n}\mathrm{d}t + (Au_n)''(t_0)\\ &\leq \int_0^T |a(t)||u_n(t)|\mathrm{d}t + T^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \left|f_n\big(t,u_n(t-\delta(t))\big)\right|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^T \frac{|a(t)|}{n}\mathrm{d}t + (Au_n)''(t_0)\\ &\leq Mr_1T + T^{\frac{1}{2}}|fr_1|_2 + \frac{MT}{n_0} + (Au_n)''(t_0) := M_1'',\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 $|fr_1|_2 := \max_{\eta_1\leq u_n\leq r_1}\left(\int_0^T \left|f_n\big(t,u_n(t-\delta(t))\big)\right|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$。

因为 $(Au_n)(0) = (Au_n)(T)$，所以存在一点 $t_1\in[0,T]$，使得 $(Au_n)'(t_1)=0$，则

$$\left\|(Au_n)'\right\| = \max_{s\in\mathbb{R}}\left|\int_{t_1}^t (Au_n)''(s)\mathrm{d}s\right| \leq \int_0^T \left|(Au_n)''(s)\right|\mathrm{d}s \leq M_1''T := M_1'. \tag{3.12}$$

通过简单的计算，有

$$(Au_n)'(t) = \big(u(t)-c(t)u(t-\sigma(t))\big)' = u'(t)-c'(t)u(t-\sigma(t))-c(t)u'(t-\sigma(t))(1-\sigma'(t)).$$

结合(3.12)，$M < \frac{64\pi^3}{81\sqrt{3}T^3}$ 和上述等式，可得

$$\|u_n'\| \leq \frac{\left\|(Au_n)'\right\| + c_\infty' r_1}{1-c_\infty+c_0\sigma_0'} \leq \frac{M_1'+c_\infty' r_1}{1-c_\infty+c_0\sigma_0'} := M_1, \tag{3.13}$$

其中 $\sigma_0' := \min_{t\in[0,T]}\sigma'(t)$。

由 $\eta_1 < \|u_n\| \leq r_1$ 和(3.13)，可得 $\{u_n\}_{n\in N_0}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是一致有界和等度连续的。从而，应用 Arzela-Ascoli 定理，得到 $\{u_n\}_{n\in N_0}$ 存在子序列 $\{u_{n_k}\}_{k\in N}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到函数 $u\in \mathrm{B}_1[0,r_1]$。根据 $\|u_n\|\leq r_1$ 和 $\eta_1 \leq u_n(t)\leq r_1$，$u_{n_k}$ 满足下列算子方程

$$u_{n_k}(t)=\mathrm{B}u_{n_k}+\mathrm{A}u_{n_k}+(I-\mathrm{TN})^{-1}\frac{1}{n_k}.$$

令 $k\to+\infty$，得

$$u(t)=\mathrm{B}u+\mathrm{A}u.$$

因此，u 是方程(1.1)的 T-周期正解且满足 $0<\|u\|<r_1$。

推论 3.1 假设对任意 $t\in\mathbb{R}$，有 $c(t)\in\left(0,\frac{m}{M+m}\right)$ 且 $M<\frac{64\pi^3}{81\sqrt{3}T^3}$ 成立。若非线性项 $f(t,u)$ 满足以下条件：

(F_1) 对任意的 $t\in[0,T]$，存在连续函数 $\hat{d}(t),d(t)>0$ 和 $\alpha>0$，$\beta\ge 0$，$\rho>0$ 使得

$$0<\frac{\hat{d}(t)}{u^{\alpha}}\le f(t,u)\le\frac{d(t)}{u^{\alpha}}+d(t)\rho u^{\beta}\text{，对任意 } x>0 \text{ 且 } t\in\mathbb{R}\text{。}$$

(i) 若 $\beta<1$，则方程(1.1)至少存在一个 T-周期正解。

(ii) 若 $\beta\ge 1$，则对任意 $0<\rho<\rho_1:=\sup\limits_{r_1>0}\frac{\left[m-(m+M)c_\infty\right]\beta_1^{\alpha}r_1^{\alpha+1}-D^*m}{D^*mr_1^{\alpha+\beta}}$，方程(1.1)至少存在一个 T-周期正解，其中 $D(t):=\int_0^T G(t,s)d(s)\mathrm{d}s$ 和 $D^*:=\max\limits_{t\in[0,T]}D(t)$。

证明： 应用定理 3.1。取

$$\phi_1(t)=\frac{\hat{d}(t)}{u^{\alpha}},\ \ k(t)=d(t),\ \ q(u)=\frac{1}{u^{\alpha}},\ \ h(u)=\rho u^{\beta},$$

则条件(H_1)和(H_2)成立。当 $r_1>0$ 时，有

$$\rho<\frac{\left[m-(m+M)c_\infty\right]\beta_1^{\alpha}r_1^{\alpha+1}-D^*m}{D^*mr_1^{\alpha+\beta}},$$

则条件(H_3)成立。从而，对任意

$$0<\rho<\rho_1=\sup_{r_1>0}\frac{\left[m-(m+M)c_\infty\right]\beta_1^{\alpha}r_1^{\alpha+1}-D^*m}{D^*mr_1^{\alpha+\beta}},$$

方程(1.1)至少存在一个 T-周期正解。注意到若 $\beta<1$，有 $\rho_1=\infty$；若 $\beta\ge 1$，有 $\rho_1<\infty$。因此得到(i)和(ii)。

例 3.1 考虑下列方程

$$\left(u(t)-\left(\frac{1}{20}\cos 4t+\frac{1}{10}\right)u\left(t-\frac{1}{2}\cos 4t\right)\right)'''+(\sin 4t+2)u(t)=\frac{\cos 4t+6}{u^{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{2}\cos 4t\right)}+5(\cos 4t+6)u^{\frac{1}{3}}\left(t-\frac{1}{2}\cos 4t\right).\quad(3.14)$$

对比方程(3.14)和方程(1.1)，我们有 $T=\frac{\pi}{2}$，$\sigma(t)=\mathrm{e}^{\sin 4t}$，$\delta(t)=\frac{1}{2}\cos 4t$，$c(t)=\frac{1}{20}\cos 4t+\frac{1}{10}$，$a(t)=\sin 4t+2$，$m=1$，$M=3<\frac{64\pi^3}{81\sqrt{3}T^3}$，$c(t)\in\left[\frac{1}{20},\frac{3}{20}\right]\subset\left(0,\frac{m}{M+m}\right)=\left(0,\frac{1}{4}\right)$，$f\left(t,u\left(t-\sigma(t)\right)\right)=\frac{\cos 4t+6}{u^{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{2}\cos 4t\right)}+5(\cos 4t+6)u^{\frac{1}{3}}\left(t-\frac{1}{2}\cos 4t\right)$。显然，$c(t)\in\left(0,\frac{m}{M+m}\right)$ 和 $M<\frac{64\pi^3}{81\sqrt{3}T^3}$

成立。另外，$\hat{d}(t)=\cos 4t+3$，$d(t)=\cos 4t+7$，$\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\beta=\dfrac{1}{3}$，$\rho=5$，不难看出条件(F_1)成立。根据推论 3.1，方程(3.14)至少存在一个$\dfrac{\pi}{2}$-周期正解。

注 3.1 本文利用 Leray-Schauder 型不动点定理和中立型算子的性质，我们证明了对任意$t\in\mathbb{R}$，当$c(t)\in\left(0,\dfrac{m}{M+m}\right)$时方程(1.1) T-周期正解的存在性。本文中$c(t)$的范围仅仅是$c(t)\in\left(0,\dfrac{m}{M+m}\right)$，当$c(t)\in(-1,1)$或$c(t)\in(1,+\infty)$时，我们还未得出方程(1.1)存在 T-周期正解的相应结论。

参考文献

[1] Wu, J. and Wang, Z. (2007) Two Periodic Solutions of Second-Order Neutral Functional Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **329**, 677-689. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.06.084

[2] Lv, L. and Cheng, Z. (2019) Positive Periodic Solution to Superlinear Neutral Differential Equation with Time-Dependentparameter. *Applied Mathematics Letters*, **98**, 271-277. https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.06.024

[3] Li, Z. and Wang, X. (2006) Existence of Positive Periodic Solutions for Neutral Functional Differential Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, **34**, 1-8.

[4] Cheung, W., Ren, J. and Han, W. (2009) Positive Periodic Solution of Second-Order Neutral Functional Differential Equations. *Nonlinear Analysis*, **71**, 3948-3955. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.02.064

[5] Sun, J. and Liu, Y. (2005) Multiple Positive Solutions of Singular Third-Order Periodic Boundary Value Problem. *Acta Mathematica Scientia*, **25**, 81-88. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(17)30263-1

[6] Candan, T. (2016) Existence of Positive Periodic Solutions of First Order Neutral Differential Equations with Variable Coefficients. *Applied Mathematics Letters*, **52**, 142-148. https://doi.org/10.1016/j.aml.2015.08.014

[7] Candan, T. (2018) Existence of Positive Periodic Solution of Second-Order Neutral Differential Equations. *Turkish Journal of Mathematics*, **42**, 797-806. https://doi.org/10.3906/mat-1704-41

[8] Cheng, Z. and Li, F. (2018) Positive Periodic Solutions for a Kind of Second-Order Neutral Differential Equations with Variable Coefficient and Delay. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **15**, 19. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1184-y

[9] Cheng, Z., Li, F. and Yao, S. (2019) Positive Solutions for Second-Order Neutral Differential Equations with Time-Dependent Deviating Arguments. *Filomat*, **33**, 3627-3638. https://doi.org/10.2298/FIL1912627C

[10] Han, W. and Ren, J. (2009) Some Results on Second-Order Neutral Functional Differential Equations with Infinite Distributed Delay. *Nonlinear Analysis*, **70**, 1393-1406. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.02.018

[11] Xin, Y., Han, X. and Cheng, Z. (2017) Multiplicity Results of Fourth-Order Singular Nonlinear Differential Equation with Aparameter. *Journal of Applied Analysis & Computation*, **7**, 455-477. https://doi.org/10.11948/2017029

[12] Dhage, B.C. and O'Regan, D. (2000) A Fixed Point Theorem in Banach Algebras with Applications to Functional Integral Equations. *Functional Differential Equation*, **7**, 259-267.

[13] Wang, H. (2010) Positive Periodic Solutions of Singular Systems with a Parameter. *Journal of Differential Equations*, **249**, 2986-3002. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.08.027

[14] Du, B., Guo, L., Ge, W. and Lu, S. (2009) Periodic Solutions for Generalized Liénard Neutral Equation with Variable Parameter. *Nonlinear Analysis*, **70**, 2387-2394. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.03.021