Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(12), 8485-8503**
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1112897

Hans汉斯

一类拟线性薛定谔方程规范化解的存在性和多重性

景　丽，滕凯民[*]

太原理工大学数学学院，山西 晋中

收稿日期：2022年11月5日；录用日期：2022年11月29日；发布日期：2022年12月7日

摘　要

本文利用扰动型方法证明了一类拟线性薛定谔方程基态规范化解的存在性和无穷多个规范化解的存在性。此外，分析了扰动泛函临界点的收敛性。

关键词

拟线性Schrödinger方程，基态解，规范化解，扰动型方法

The Existence and Multiplicity of Normalized Solutions of a Class of Quasilinear Schrödinger Equations

Li Jing, Kaimin Teng[*]

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: Nov. 5th, 2022; accepted: Nov. 29th, 2022; published: Dec. 7th, 2022

Abstract

In this paper, we proved the existence of ground state normalized solutions and the existence of infinitely many normalized solutions of a class of quasilinear Schrödinger equations by applying the perturbation type method. Moreover, we study the convergence of the critical points of the perturbated functions.

[*]通讯作者。

文章引用：景丽，滕凯民. 一类拟线性薛定谔方程规范化解的存在性和多重性[J]. 应用数学进展，2022，11(12): 8485-8503. DOI: 10.12677/aam.2022.1112897

Keywords

Quasilinear Schrödinger Equations, Ground State Solutions, Normalized Solutions, Perturbation Method

1. 引言

本文研究如下拟线性 Schrödinger 方程

$$-\Delta u-\kappa\alpha\left(\Delta\left(|u|^{2\alpha}\right)\right)|u|^{2\alpha-2}u+\lambda u=|u|^{p-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N \tag{1.1}$$

规范化解的存在性和多重性，其中 $N\le 3$，$4\alpha+\frac{4}{N}<p<2^*$，$\frac{1}{2}\le\alpha\le 1$，$\lambda\in\mathbb{R}$ 和 κ 为非负参数，当 $N\ge 3$ 时，$2^*=\frac{2N}{N-2}$，当 $N=2$ 时，$2^*=+\infty$。方程(1.1)的解与下列拟线性 Schrödinger 方程驻波解的存在性有关

$$\begin{cases} i\partial_t\phi+\Delta\phi+\kappa\Delta h\left(|\phi|^2\right)h'\left(|\phi|^2\right)\phi+|\phi|^{p-2}\phi=0, & x\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N, \\ \phi(0,x)=\phi_0(x), & x\in\mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 h 为实函数。方程(1.2)广泛出现在各种物理领域。例如：当 $h(s)=(1+s)^{\frac{1}{2}}$ 时，(1.2)被用于高功率超短激光在物质中的自通道模型[1]；当 $h(s)=s$ 时，(1.2)出现在等离子体物理中的超流膜模型中[2]。此外，它也出现在海森堡铁磁和磁子理论[3]，耗散量子力学[4]和凝聚态理论[5]中。

关于(1.1)解存在性，多重性和集中性的研究，一直是学者关注的焦点之一。对于 $h(s)=s^\alpha\ (\alpha\in\mathrm{R})$，$h(s)=s$，$h(s)=(1+s)^{\frac{1}{2}}$ 等情形下解的相关性质已得到广泛的研究，可参看[6] [7] [8]。另一方面，从物理学的角度来看，研究指定 L^2 质量解具有重要意义。近年来，一些学者研究下列具有规定 L^2 范数拟线性 Schrödinger 方程解的存在性：

$$\begin{cases} -\Delta u-\kappa\alpha\left(\Delta\left(|u|^{2\alpha}\right)\right)|u|^{2\alpha-2}u+\lambda u=|u|^{p-2}u, & x\in\mathbb{R}^N \\ \int_{\mathbb{R}^N}|u|^2=a \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 λ 为拉格朗日乘子。

当 $\kappa=0$ 时，问题(1.1)可退化为经典的 Schrödinger 方程

$$-\Delta u+\lambda u=g(u),\quad x\in\mathbb{R}^N。 \tag{1.4}$$

近年来，许多学者对方程(1.4)规范化解进行了大量的研究，获得了基态规范化解，规范化解等的存在性和多重性。例如：在[9]中，Jeanjean 利用辅助泛函和极小极大原理获得(1.4)的规范化解；Bertsch 和 Valeriola 在[10]利用辅助泛函的一种新的连接几何证明了(1.4)的无穷多个规范化解的存在性。随后，Ikoma 和 Tanaka 在[11]中构造了一个适用于辅助泛函的变形定理，然后通过 Krasnoselskii 指标得到当 $g(u)$ 在较弱条件下无穷多个规范化解。后来，在[12]中，Jeanjean 和 Lu 在 $g(u)$ 完全不同的假设下，得到了(1.4)的无穷多个规范化解，其中允许 $g(u)$ 是连续的。对于最小能量的规范化解，N. Soave 在[13]中通过限制小流形上的能量

泛函，得到了当 $g(u)=\mu|u|^{q-2}u+|u|^{p-2}u$，$\mu\in\mathbb{R}$ 且 $2<q\le 2+\frac{4}{N}\le p<2^*$，$N\ge 1$时基态规范化解的存在性。对于 $g(u)=\mu|u|^{q-2}u+|u|^{2^*-2}u$ 这种带有临界指数的非线性 Schrödinger 方程，Soave 在[14]中考虑了 $2<q<2^*$，$N\ge 3$时的基态规范化解的存在性；在[15]中，Jeanjean 和 Li 研究了当$2<q<2+\frac{4}{N}$，$N\ge 3$时规范化解的多重性；作为补充，Alves，Ji 和 Miyagaki 在[1]中研究 $N\ge 2$，但$2+\frac{4}{N}<q<2^*$时的规范化解的存在性。

当 $\kappa=1$ 且 $h(s)=s$ 和非线性项 $g(u)=|u|^{p-2}u$ 时，考虑问题

$$-\Delta u-u\Delta u^2+\lambda u=|u|^{p-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N \tag{1.5}$$

在[16]，Jeanjean，Luo 和 Wang 利用扰动法证明了次临界情况($2+\frac{4}{N}<p<4+\frac{4}{N}$)下两个规范化解的存在性。在[17]中，Li 和 Zou 利用扰动法证明了超临界情况($p>4+\frac{4}{N}$)下基态规范化解和无数多个规范化解的存在性，并得到了临界情况($p=4+\frac{4}{N}$)下一些新的存在性结论。

当 $h(s)=(1+s)^{\frac{1}{2}}$ 时，Yang，Tang 和 Cheng 在[18]研究下列方程径向规范化解和非径向规范化解的存在性和多重性：

$$\begin{cases}-\Delta u+\mu u-\left[\Delta\left(1+u^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\dfrac{u}{2\left(1+u^2\right)^{\frac{1}{2}}}=g(u),\quad x\in\mathbb{R}^N,\\ \int_{\mathbb{R}^N}|u|^2=m,\\ u\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right),\end{cases}$$

其中 $m>0$ 为给定常数，$\mu\in\mathbb{R}$ 为拉格朗日乘子且 g 满足著名的 Berestycki-Lions 条件。

对于 $h(s)=s^{\alpha}\ (\alpha\in\mathbb{R})$，据我们所知，其规范化解的存在性和多重性研究的结果不多。受上述文献的启发，现在我们来考虑拟线性 Schrödinger 方程(1.1)。当 $\lambda\in\mathbb{R}$ 固定时，问题(1.1)对应的能量泛函 $E_\lambda(u):\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$E_\lambda(u):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2+\lambda|u|^2\right)+\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p, \tag{1.6}$$

其中

$$\mathcal{H}=\left\{u\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right):\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2<+\infty\right\}。$$

因此，对任意的 $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$，$u$ 是(1.1)的弱解当且仅当

$$E_\lambda'(u)\phi=\lim_{t\to 0^+}\frac{E_\lambda(u+t\phi)-E_\lambda(u)}{t}=0。$$

与(1.4)相比，寻找(1.1)的解困难在于：与项$\left(\Delta\left(|u|^{2\alpha}\right)\right)|u|^{2\alpha-2}u$ 相关的泛函

$$V(u)=\int_{R^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2,$$

注意到当 $N\ge 2$ 时 V 在 $\mathcal{H}$ 中不可微。为了克服这类困难，数学家们采取多种方法。例如，通过变量变换[19]，将拟线性问题转化为半线性问题和扰动法[20]等。由于参数 λ 是未知的和 L^2 范数 $\|u\|_2^2=a$，则

变量变换方法可能不再适用于求(1.3)的规范化解。为寻找问题(1.3)的规范化解，考虑泛函

$$I(u):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p \tag{1.7}$$

限制在 L^2

$$\tilde{S}(a):=\left\{u\in\mathcal{H}:\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2=a\right\} \tag{1.8}$$

上。对任意的 $a>0$，寻找极小化问题

$$\tilde{m}(a)=\inf_{u\in\tilde{S}(a)}I(u)$$

的极小元。注意到，当 $2<p\le 4\alpha+\frac{4}{N}$ 时，$\tilde{m}(a)>-\infty$；相反，当 $p>4\alpha+\frac{4}{N}$ 时，$\tilde{m}(a)=-\infty$。证明见引理 2.2。假设(1.3)的规范化解是 $u\in\tilde{S}(a)$，则存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\cdot\nabla\phi+\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}\left[2(2\alpha-1)|u|^{4\alpha-4}u\phi|\nabla u|^2+2|u|^{2(2\alpha-1)}\nabla u\cdot\nabla\phi\right]+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}u\phi-\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}u\phi=0 \tag{1.9}$$

为了避免泛函 $I(u)$ 的不可微性，我们应用[20]中的扰动法去获得多个规范化解。当 $N\ge 2$ 时，对于 $\mu\in(0,1]$，我们定义

$$I_\mu(u):=\frac{\mu}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+I(u) \tag{1.10}$$

在空间 $\mathcal{X}:=W^{1,\theta}(\mathbb{R}^N)\cap H^1(\mathbb{R}^N)$ 上。其中，

$\dfrac{4N\alpha+4}{4\alpha+\frac{4}{N}+N}<\theta<\min\left\{\dfrac{4N\alpha+4}{N+2},N\right\}$，当 $N\ge 3$；

$2<\theta<2\alpha+1$，当 $N=2$。

因此 $\mathcal{X}$ 是自反的巴拿赫空间。利用中值定理和勒贝格控制收敛定理，很容易验证可得 $I_\mu(u)\in\mathcal{C}^1(\mathcal{X})$。首先利用 Pohozaev 流形和极小极大去寻找扰动泛函 $I_\mu(u)$ 限定在 $S(a)$ 上的临界点

$$S(a):=\left\{u\in\mathcal{X}:\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2=a\right\}, \tag{1.11}$$

然后考虑当 $\mu\to 0^+$ 时扰动泛函临界点的收敛性，即证明 $I_\mu|_{S(a)}$ 的临界点序列收敛于 $I_\mu|_{\tilde{S}(a)}$ 的临界点，最后得到(1.3)的规范化解。

在本文，我们主要考虑超临界情况，即 $p>4\alpha+\frac{4}{N}$。我们的主要结论陈述如下：

定理 1.1：假设下列条件之一成立：

i) $N=1,2$，$p>4\alpha+\frac{4}{N}$，$a>0$；

ii) $N=3$，$4\alpha+\frac{4}{N}<p<2^*$，$a>0$；

则(1.3)存在径向对称的基态正规化解 $u\in H^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$，即

$$I(u)=\inf\left\{I(v):v\in\tilde{S}(a),I'|_{\tilde{S}(a)}(v)=0,v\ne 0\right\}。$$

定理 1.2：假设下列条件之一成立：

iii) $N=2$， $p>4\alpha+\frac{4}{N}$， $a>0$；

iv) $N=3$， $4\alpha+\frac{4}{N}<p<2^*$， $a>0$；

则(1.3)存在径向对称的基态正规化解$u^j\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\cap L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$且$I\left(u^j\right)\to+\infty$。

论文结构如下。在第 2 节中，我们引入了重要引理。在第 3.1 节中，给出了相关 Pohozaev 流形的一些性质。在第 3.2 节和 3.3 节中，证明了扰动泛函基态临界点和无穷多个临界点的存在性。在第 4 节中研究了扰动泛函当$\mu\to0^+$时临界点的收敛性，并给出了定理 1.1 和定理 1.2 的证明。

2. 准备工作

我们回顾[21]中的下述定义和定理。

定义 A [21]令B是X的一个闭子集。称$\mathcal{F}$为X的一类紧子集构成的同伦稳定族，若边界B满足

a) $\mathcal{F}$的每个集都包含B;

b) 对任意的$A\subset\mathcal{F}$和任意的$\eta\in\mathcal{C}\left([0,1]\times X,X\right)$，$(t,x)\in\left(\{0\}\times X\right)\cup\left([0,1]\times B\right)$满足$\eta(t,x)=x$，我们有$\eta(1,A)\subset\mathcal{F}$。

定理 B [21]令ϕ是在完备连通$\mathcal{C}^1$流形X上的一个$\mathcal{C}^1$泛函，考虑具有闭边界B的一个同伦稳定族$\mathcal{F}$。设$c=c(\phi,\mathcal{F})$和令F是X的一个紧子集满足$A\cap F\setminus B\neq\varnothing$，$\forall A\in\mathcal{F}$和$\sup\phi(B)\le c\le\inf\phi(F)$。则对于任意集合序列$A_n\subset\mathcal{F}$使得$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{A_n}\phi=c$，存在一个序列$x_n\subset X\setminus B$使得

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\phi(x_n)=c$；

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|d\phi(x_n)\right\|=0$；

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{dist}(x_n,F)=0$；

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{dist}(x_n,A_n)=0$。

定义 C [21]记$\tau(u)=-u$，并令$Y\subset\mathcal{X}$。若$\tau(A)=A$，称集合$A\subset Y$为τ-不变的。若对任意的$(t,u)\in[0,1]\times Y$满足$\eta(t,\tau(u))=\tau(\eta(t,u))$，称同伦$\eta:[0,1]\times Y\to Y$为$\tau$-等价的。

令B是Y的一个闭的τ-不变子集。称$\mathcal{G}$为Y的一类紧子集构成的τ-同伦稳定族，当边界B满足

a) $\mathcal{G}$的每个集都是τ-不变的;

b) $\mathcal{G}$的每个集都包含B;

c) 对任意的$A\in\mathcal{G}$，任意的τ-等价同伦$\eta\in\mathcal{C}\left([0,1]\times Y,Y\right)$和任意的$(t,x)\in\left(\{0\}\times Y\right)\cup\left([0,1]\times B\right)$满足$\eta(t,x)=x$，我们有$\eta(1,A)\subset\mathcal{G}$。

定义变换

$$u\in\mathcal{S}(a)\mapsto s\star u(x)=\mathrm{e}^{\frac{N}{2}s}u\left(\mathrm{e}^sx\right)\in\mathcal{S}(a),$$

和

$$\begin{aligned}Q_\mu(u)&:=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}I_\mu(s\star u)\Big|_{s=0}\\&=(1+\gamma_\theta)\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\kappa\alpha^2(2N\alpha-N+2)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2-\gamma_p\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中$\gamma_p=\frac{N(p-2)}{2p}$，$\gamma_\theta=\frac{N(\theta-2)}{2\theta}$。利用中值定理和勒贝格控制收敛定理，很容易得到$Q_\mu(u)\in\mathcal{C}^1(\mathcal{X})$。

定义流形

$$\mathcal{Q}_\mu(a) := \{u \in \mathcal{S}(a) : \mathrm{Q}_\mu(u) = 0\} \tag{2.2}$$

引理 2.1： $I_\mu|_{S(a)}$ 的任何临界点 u 都属于 $\mathcal{Q}_\mu(a)$。

证明：根据[22]中的引理 3，存在 $\lambda \in R$ 使得

$$I'_\mu(u) + \lambda u = 0 \text{ 在 } X^* \tag{2.3}$$

以 $x \cdot \nabla u$ 作为(2.3)的测试函数，参见[23]中的命题 1，计算得

$$\begin{aligned}&\frac{\theta - N}{\theta}\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta + \frac{2-N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + (2-N)\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2 \\ &+\frac{N}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p - \frac{N}{2}\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2 = 0\end{aligned} \tag{2.4}$$

以 u 作为(2.3)的测试函数，推得

$$\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta + \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + 4\kappa\alpha^3\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}|u|^p + \lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2 = 0 \tag{2.5}$$

结合(2.1)，(2.4)和(2.5)，可得 $\mathrm{Q}_\mu(u) = 0$。因此，$u \in \mathcal{Q}_\mu(a)$

引理 2.2： i) 假设 $2 < p < 4\alpha + \frac{4}{N}$，那么对于任意的 $a > 0$，$\tilde{m}(a) > -\infty$ 成立；

ii) 假设 $p = 4\alpha + \frac{4}{N}$，那么当 $a > 0$ 充分小时，$\tilde{m}(a) > -\infty$ 成立；

iii) 假设 $p > 4\alpha + \frac{4}{N}$，那么对于任意的 $a > 0$，$\tilde{m}(a) = -\infty$ 成立。

证明：i) 利用 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式，对于任意的 $u \in \mathcal{X}$，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p &= \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(1-\beta)}|u|^{\frac{4N\alpha}{N-2}\beta} \le \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\right)^{1-\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{4N\alpha}{N-2}}\right)^\beta \\ &\le K\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\right)^{1-\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\right)^{\frac{\beta N}{N-2}}\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中，$\beta = \frac{(p-2)(N-2)}{4N\alpha - 2N + 4}$，$K > 0$ 仅依赖于 N，以及

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{4N\alpha}{N-2}} = \int_{\mathbb{R}^N}\left|u^{2\alpha}\right|^{2^*} \le S\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u^{2\alpha}\right|^2\right)^{\frac{2^*}{2}} = K\left(\int_{\mathbb{R}^N}u^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\right)^{\frac{N}{N-2}}$$

由(2.6)和(1.7)可推导出

$$I(u) \ge \kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p}Ka^{1-\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\right)^{\frac{\beta N}{N-2}}$$

因为 $\frac{\beta N}{N-2} < 1$ 当且仅当 $p < 4\alpha + \frac{4}{N}$，故对任意的 $a > 0$，当 $2 < p < 4\alpha + \frac{4}{N}$ 时，$\tilde{m}(a) > -\infty$。

ii) 当 $p = 4\alpha + \frac{4}{N}$ 时，$\beta < 1$。若 $a > 0$ 充分小且满足 $Ka^{1-\beta} < p$，则结论 $\tilde{m}(a) > -\infty$ 仍然成立。

iii) 当 $p > 4\alpha + \frac{4}{N}$ 时，固定 $a > 0$，取 $u \in \mathcal{X}$ 使得 $\|u\|_2^2 = a$。我们考虑

$$t \mapsto u^t(x) = t^{\frac{5}{2}}u(tx)$$

对任意的 $t>0$，

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|u^t\right|^2=\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2=a\text{；}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u^t\right|^2=t^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\text{；}\int_{\mathbb{R}^N}\left|u^t\right|^p=t^{\frac{Np-2N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\text{；}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|u^t\right|^{2(2\alpha-1)}\left|\nabla u^t\right|^2=t^{2N\alpha-N+2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\text{。}$$

因此，$\left\|u^t\right\|_2^2=a$ 和

$$I\left(u^t\right)=\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\kappa\alpha^2t^{2N\alpha-N+2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2-\frac{1}{p}t^{\frac{Np-2N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\text{。}$$

当 $p>4\alpha+\frac{4}{N}$ 时，$\frac{Np-2N}{2}>\max\{2,2N\alpha-N+2\}$。因此当 $t\to+\infty$ 时，$I\left(u^t\right)\to-\infty$，即 $\tilde{m}(a)=-\infty$ 成立。

引理 2.3：假设 $u\neq0$ 是 $I_\mu\big|_{S(a)}$ 的临界点，则 $0<\mu\le1$，则存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $I_\mu'(u)+\lambda u=0$ 在 X^*。假设下述条件之一成立：

a) 假设 $1\le N\le3$，$\frac{1}{2}\le\alpha\le1$，$4\alpha+\frac{4}{N}<p<2^*$ 且 $a>0$；

b) 假设 $N\ge4$，$\frac{1}{2}<\frac{4-2N+N^2}{2N^2-4N}<\alpha<1$，$p=4\alpha+\frac{4}{N}$ 且 $0<a<\left[\frac{\kappa\alpha^2(2\alpha-1)(N-2)(4\alpha N+4)}{\left(2N^2-4N\right)\alpha-4+2N-N^2}\frac{1}{K}\right]^{\frac{N}{2}}$。

则 Lagrange 乘数 $\lambda>0$。

证明：利用 $Q_\mu(u)=0$ 和(2.5)，可推出

$$\begin{aligned}\lambda\frac{N(p-2)}{2p}a&=\left(1+\gamma_\theta-\gamma_p\right)\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+\left(1-\gamma_p\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\left[\kappa\alpha^2(2N\alpha-N+2)-4\kappa\alpha^3\gamma_p\right]\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\\&=\frac{p\theta-Np+N\theta}{p\theta}\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+\frac{2N-(N-2)p}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\kappa\alpha^2\frac{8\alpha N-2p(N-2)}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\end{aligned}$$

因此，若条件(a)成立，可得 $\lambda>0$。

假设条件(b)成立，由(2.5)得

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2=-\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta-4\kappa\alpha^3\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\text{，}$$

代入 $Q_\mu(u)=0$，结合不等式(2.6)可得

$$\begin{aligned}\lambda a&=\gamma_\theta\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+\left[\kappa\alpha^2(2N\alpha-N+2)-4\kappa\alpha^3\right]\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2-\frac{\left(2N^2-4N\right)\alpha-4+2N-N^2}{4\alpha N+4}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{4\alpha+\frac{4}{N}}\\&>\kappa\alpha^2(2\alpha-1)(N-2)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\\&\quad-\frac{\left(2N^2-4N\right)\alpha-4+2N-N^2}{4\alpha N+4}K\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\right)^{1-\frac{\left(4\alpha+\frac{4}{N}-2\right)(N-2)}{4N\alpha-2N+4}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\right)^{\frac{N}{N-2}\cdot\frac{\left(4\alpha+\frac{4}{N}-2\right)(N-2)}{4N\alpha-2N+4}}\\&=\left[\kappa\alpha^2(2\alpha-1)(N-2)-\frac{\left(2N^2-4N\right)\alpha-2N-N^2}{4\alpha N+4}Ka^{\frac{2}{N}}\right]\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2>0\end{aligned}$$

可推导出 $\lambda>0$。

3. 扰动泛函 $I_\mu(u)$ 的临界点

3.1. $\mathcal{Q}_\mu(a)$ 的性质

引理 3.1：令 $0<\mu\le 1$，则 $\mathcal{Q}_\mu(a)$ 是 $S(a)$ 中余维为 1 的 $\mathcal{C}^1$ 子流形，因此 $\mathcal{Q}_\mu(a)$ 是 $\mathcal{X}$ 中的余维为 2 的 $\mathcal{C}^1$ 子流形。

证明：注意到 $\mathcal{Q}_\mu(a)=\{u\in S(a):\mathrm{Q}_\mu(u)=0\}$ 是 $\mathcal{X}$ 的子集。定义

$$G(u)=a-\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2,$$

显然 $G(u)\in\mathcal{C}^1(\mathcal{X})$。则 $\mathcal{Q}_\mu(a)$ 可以定义为 $G(u)=0$，$\mathrm{Q}_\mu(u)=0$ 两方程成立。我们断言

$$d(\mathrm{Q}_\mu(u),G):\mathcal{X}\to\mathbb{R}^2 \text{ 是满射。} \tag{3.1}$$

假设断言不成立，即 $d\mathrm{Q}_\mu(u)$ 和 $dG(u)$ 是线性相关的，则存在 $\nu\in\mathbb{R}$ 使得对任意的 $\phi\in\mathcal{X}$ 有

$$\begin{aligned}&\theta(1+\gamma_\theta)\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{\theta-2}\nabla u\cdot\nabla\phi+2\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\cdot\nabla\phi-\gamma_p p\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}u\phi\\&+\kappa\alpha^2(2N\alpha-N+2)\int_{\mathbb{R}^N}\left[2(2\alpha-1)|u|^{4\alpha-4}u\phi|\nabla u|^2+2|u|^{2(2\alpha-1)}\nabla u\cdot\nabla\phi\right]=2\nu\int_{\mathbb{R}^N}u\phi\end{aligned}\tag{3.2}$$

类似引理 2.1 的证明，取 $\phi=x\cdot\nabla u$ 和 $\phi=u$，可推出

$$\theta(1+\gamma_\theta)^2\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\kappa\alpha^2(2N\alpha-N+2)^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2-p\gamma_p^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p=0 \tag{3.3}$$

结合 $\mathrm{Q}_\mu(u)=0$ 和(3.3)，可推得

$$\begin{aligned}&(p\gamma_p-\theta-\theta\gamma_\theta)(1+\gamma_\theta)\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+(p\gamma_p-2)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\\&+\kappa\alpha^2(2N\alpha-N+2)(p\gamma_p-2N\alpha+N-2)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2=0\end{aligned}\tag{3.4}$$

通过计算得出 $p\gamma_p-\theta-\theta\gamma_\theta>0$ 和当 $p>4\alpha+\frac{4}{N}$ 时，$p\gamma_p>2N\alpha-N+2$，这意味着 $u=0$。这与 $u\in S(a)$ 矛盾，因此断言成立。

引理 3.2：对任意的 $0<\mu\le 1$ 和任意的 $u\in\mathcal{X}\setminus\{0\}$，下述结论成立：

i) 存在唯一的 $s_\mu(u)\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathrm{Q}_\mu(s_\mu(u)\star u)=0$；

ii) $I_\mu(s\star u)$ 在 $s\in(-\infty,s_\mu(u))$ 严格递增，在 $s\in(s_\mu(u),+\infty)$ 严格递减。此外，

$$\lim_{s\to-\infty}I_\mu(s\star u)=0^+,\quad \lim_{s\to+\infty}I_\mu(s\star u)=-\infty,\quad I_\mu(s_\mu(u)\star u)>0;$$

iii) $s_\mu(u)<0$ 当且仅当 $\mathrm{Q}_\mu(u)<0$；

iv) 映射 $u\in\mathcal{X}\setminus\{0\}\mapsto s_\mu(u)\in\mathbb{R}$ 是 $\mathcal{C}^1$ 的；

v) 对于任意的 $u\in\mathcal{X}\setminus\{0\}$，$s_\mu(u)$ 为偶函数。

证明：i) 我们给出的 $\mathrm{Q}_\mu(s\star u)$ 定义，通过简单的计算，易得

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_\mu(s\star u)&:=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}I_\mu(s\star u)\\&=(1+\gamma_\theta)\mu e^{\theta(1+\gamma_\theta)s}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+e^{2s}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\\&\quad+\kappa\alpha^2(2N\alpha-N+2)e^{(2N\alpha-N+2)s}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2-\gamma_p e^{p\gamma_p s}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\\&=e^{p\gamma_p s}\Big[(1+\gamma_\theta)\mu e^{-(p\gamma_p-\theta-\theta\gamma_\theta)s}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+e^{-(p\gamma_p-2)s}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\\&\quad+\kappa\alpha^2(2N\alpha-N+2)e^{-(p\gamma_p-2N\alpha+N-2)s}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2-\gamma_p\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\Big]\end{aligned}\tag{3.5}$$

因为 $p\gamma_p > \theta + \theta\gamma_\theta$ 和当 $p > 4\alpha + \dfrac{4}{N}$ 时， $p\gamma_p > 2N\alpha - N + 2 > 2$ 。因此， $Q_\mu(s\star u) = 0$ 仅有一个解 $s_\mu(u) \in \mathbb{R}$ 。

ii) 由(3.5)可得，当 $s < s_\mu(u)$ ， $Q_\mu(s\star u) > 0$；当 $s > s_\mu(u)$ ， $Q_\mu(s\star u) < 0$。因此， $I_\mu(s\star u)$ 在 $s \in (-\infty, s_\mu(u))$ 严格递增，在 $s \in (s_\mu(u), +\infty)$ 严格递减。显然，

$$\lim_{s\to-\infty} I_\mu(s\star u) = 0^+ ,\quad \lim_{s\to+\infty} I_\mu(s\star u) = -\infty ,$$

这意味着 $I_\mu(s_\mu(u)\star u) = \max_{s\in\mathbb{R}} I_\mu(s\star u) > 0$ 。

iii) 假设 $s_\mu(u) < 0$，取 $s = 0 > s_\mu(u)$，由(ii)可得 $Q_\mu(0\star u) = Q_\mu(u) < Q_\mu(s_\mu(u)\star u) = 0$，即 $Q_\mu(u) < 0$ 。

iv)令 $\psi_\mu(s,u) := Q_\mu(s\star u)$ 。则 $\psi_\mu(s_\mu(u),u) = Q_\mu(s_\mu(u)\star u) = 0$ 。此外，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\psi_\mu(s,u) = {}& \theta(1+\gamma_\theta)^2 \mu e^{\theta(1+\gamma_\theta)s}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta + 2e^{2s}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 \\ &+ \kappa\alpha^2(2N\alpha - N + 2)^2 e^{(2N\alpha-N+2)s}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2 - p\gamma_p^2 p^{p\gamma_p s}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\end{aligned} \tag{3.6}$$

结合 $Q_\mu(s_\mu(u)\star u) = 0$ 和(3.6)，可推导出

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\psi_\mu(s_\mu(u),u) = {}& -(p\gamma_p - \theta - \theta\gamma_\theta)(1+\gamma_\theta)\mu e^{\theta(1+\gamma_\theta)s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta - (p\gamma_p - 2)e^{2s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 \\ &- \kappa\alpha^2(p\gamma_p - 2N\alpha + N - 2)(2N\alpha - N + 2)e^{(2N\alpha-N+2)s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2 \\ &< 0\end{aligned} \tag{3.7}$$

利用隐函数定理[24]得出映射 $u \mapsto s_\mu(u) \in \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{C}^1$ 的。

v) 由(3.5)，可得 $Q_\mu(s_\mu(u)\star(-u)) = Q_\mu(s_\mu(u)\star u) = 0$ 。根据 i)中的唯一性， $s_\mu(-u) = s_\mu(u)$ 成立。

3.2. $I_\mu|_{S(a)}$ 的基态临界点

在本小节中，我们考虑极小化问题

$$m_\mu(a) := \inf_{u\in\mathcal{Q}_\mu(a)} I_\mu(u) \tag{3.8}$$

根据引理 2.1，可知 $m_\mu(a)$ 可达，那么极小元是 $I_\mu|_{S(a)}$ 的基态临界点。

引理 3.3：下述结论成立：

i) $\mathcal{D}(a) := \inf_{0<\mu\le1, u\in\mathcal{Q}_\mu(a)}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2 > 0$ 且与 μ 无关；

ii) 如果对任意的 $u_n \in \mathcal{Q}_\mu(a)$ 满足 $\sup_{n\ge1} I_\mu(u_n) < +\infty$ ，则

$$\sup_{n\ge1}\max\left\{\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^\theta, \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u_n|^2, \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\right\} < +\infty 。$$

证明：i) 若 $u \in \mathcal{Q}_\mu(a)$ 。利用反证法，假设

$$\kappa\alpha^2(2N\alpha - N + 2)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2 > \gamma_p\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p 。$$

由(2.3)，得

$$Q_\mu(u) = (1+\gamma_\theta)\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta + \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + \kappa\alpha^2(2N\alpha - N + 2)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2 - \gamma_p\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p > 0 ,$$

这与 $u \in \mathcal{Q}_\mu(a)$ 矛盾。因此，

$$\kappa\alpha^2(2N\alpha - N + 2)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2 < \gamma_p\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p 。$$

结合不等式(2.6)，很容易得到

$$\kappa\alpha^2\left(2N\alpha-N+2\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2<\gamma_p\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\le K\left(p,N\right)\gamma_p a^{\frac{4N\alpha-p(N-2)}{4N\alpha-2N+4}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\right)^{\frac{N(p,-2)}{4N\alpha-2N+4}} \tag{3.9}$$

通过计算可得 $\frac{N(p-2)}{4N\alpha-2N+4}>1$，因此 $\mathcal{D}(a)>0$。

ii) 对任意的 $u\in\mathcal{Q}_\mu(a)$，可推导出

$$\begin{aligned}I_\mu(u)&=I_\mu(u)-\frac{1}{p\gamma_p}Q_\mu(u)\\&=\frac{p\gamma_p-\theta-\theta\gamma_\theta}{\theta p\gamma_p}\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+\frac{p\gamma_p-2}{2p\gamma_p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\\&\quad+\kappa\alpha^2\frac{p\gamma_p-2N\alpha+N-2}{p\gamma_p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\end{aligned} \tag{3.10}$$

显然结论成立。

注 3.1 由(3.10)可知

$$I_\mu(u)>\kappa\alpha^2\frac{p\gamma_p-2N\alpha+N-2}{p\gamma_p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\text{。}$$

结合(3.8)得出

$$m_\mu(a)\ge\mathcal{D}_0(a):=\kappa\alpha^2\frac{p\gamma_p-2N\alpha+N-2}{p\gamma_p}\mathcal{D}(a)>0,\quad\forall\mu\in(0,1]$$

因此我们有如下结论。

引理 3.4：存在一个与 μ 无关的很小的 $\rho>0$ 使得对于任意的 $0<\mu\le1$，有

$$0<\sup_{u\in B_\mu(\rho,a)}I_\mu(u)<\mathcal{D}_0(a)\text{ 和 }I_\mu(u),Q_\mu(u)>0,\forall u\in B_\mu(\rho,a)\text{，}$$

其中

$$B_\mu(\rho,a)=\left\{u\in S(a):\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\le\rho\right\}\text{。}$$

证明：由 $I_\mu(u)$ 的定义可得

$$\sup_{u\in B_\mu(\rho,a)}I_\mu(u)\le\max\left\{\frac{1}{\theta},\frac{1}{2},1\right\}\rho<\mathcal{D}_0(a)\text{，}$$

其中 $\rho>0$ 足够小且与 μ 无关，$\mathcal{D}_0(a)$ 在注 3.1 已给出。另一方面，当 $\rho>0$ 更小时，由不等式(2.6)，对任意的 $u\in\partial B_\mu(r,a)$，$0<r<\rho$ 可推出

$$\begin{aligned}\inf_{u\in\partial B_\mu(r,a)}I_\mu(u)&\ge\frac{\mu}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\\&\quad-\frac{K(p,N)}{p}a^{\frac{4N\alpha-P(N-2)}{4N\alpha-2N+4}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\right)^{\frac{N(p-2)}{4N\alpha-2N+4}}\\&\ge\frac{\mu}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+C\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\ge C_1(a,\theta,\rho,N)r>0\end{aligned} \tag{3.11}$$

类似地，

$$\begin{aligned}\inf_{u\in\partial B_\mu(r,a)} Q_\mu(u) &\ge (1+\gamma_\theta)\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\kappa\alpha^2(2N\alpha-N+2)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\\ &\quad -K(p,N)\gamma_p a^{\frac{4N\alpha-P(N-2)}{4N\alpha-2N+4}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2\right)^{\frac{N(p-2)}{4N\alpha-2N+4}}\\ &\ge C_2(a,\theta,\rho,N)r>0\end{aligned} \tag{3.12}$$

证毕。

为了获得 Palis-Smale(PS)序列，类似于[9]，引入辅助泛函：

$$J_\mu(s,u):=I_\mu(s\star u):\mathbb{R}\times\mathcal{X}\to\mathbb{R} \tag{3.13}$$

记

$$S_r(a):=S(a)\cap\mathcal{X}_r\text{，}\quad \mathcal{X}_r=W^{1,\theta}_{rad}(\mathbb{R}^N)\cap H^1_r(\mathbb{R}^N)\text{。}$$

利用对称临界原理[26]，$J_\mu\big|_{\mathbb{R}\times S_r(a)}$ 的临界点也是 $J_\mu\big|_{\mathbb{R}\times S(a)}$ 的临界点。记

$$I_\mu^c=\{u\in S(a):I_\mu(u)\le c\}\text{，}\quad \sigma_\mu(a):=\inf_{\gamma\in\Gamma_\mu}\sup_{t\in[0,1]}J_\mu(\gamma(t)) \tag{3.14}$$

其中 $\Gamma_\mu:=\{\gamma=(\alpha,\beta)\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}\times S_r(a)):\gamma(0)\in\{0\}\times B_\mu(\rho,a),\gamma(1)\in\{0\}\times I_\mu^0\}$。

类似于文[17]中引理 3.5 的证明，可得

引理 3.5： 对任意的 $0<\mu\le1$，$m_\mu(a)=\sigma_\mu(a)$。

注 3.2 对任意的 $0<\mu_1<\mu_2\le1$，因为 $I_{\mu_2}(u)\ge I_{\mu_1}(u)$ 和 $\Gamma_{\mu_2}\subset\Gamma_{\mu_1}$，因此

$$\sigma_{\mu_2}(a)=\inf_{\gamma\in\Gamma_{\mu_2}}\sup_{t\in[0,1]}J_{\mu_2}(\gamma(t))\ge\inf_{\gamma\in\Gamma_{\mu_2}}\sup_{t\in[0,1]}J_{\mu_1}(\gamma(t))\ge\inf_{\gamma\in\Gamma_{\mu_1}}\sup_{t\in[0,1]}J_{\mu_1}(\gamma(t))=\sigma_{\mu_1}(a)\text{，}$$

即 $\sigma_\mu(a)$ 关于 $\mu\in(0,1]$ 非减。

由第 2 节中的定义 A，定理 B，我们可获得 PS 序列的存在性。类似[17]中的引理 3.6 的证明，得

引理 3.6： 对于任意固定的 $\mu\in(0,1]$，存在序列 $\{u_n\}\in S_r(a)$ 使得

$I_\mu(u_n)\to\sigma_\mu(a),I_\mu\big|'_{S(a)}(u_n)\to0,Q_\mu(u_n)\to0$ 和 $u_n^-\to0$ a.e.在 $\mathbb{R}^N$。

下面证明引理 3.6 中获得的 PS 序列的紧性。

引理 3.7： 对于任意固定的 $\mu\in(0,1]$，设 $\{u_n\}$ 是引理 3.6 中获得的序列，通过取自列，仍记为 $\{u_n\}$，存在 $u_\mu\in\mathcal{X}_r\setminus\{0\}$ 和 $\lambda_\mu\in\mathbb{R}$，使得

u_n 弱收敛 $u_\mu\ge0$ 在 $\mathcal{X}_r$，$I_\mu(u_\mu)=\sigma_\mu(a)$ 和 $I'_\mu(u_\mu)+\lambda_\mu u_\mu=0$。

此外，如果 $\lambda_\mu\ne0$，有

$u_n\to u_\mu$ 在 $\mathcal{X}_r$。

证明：由引理 3.3 可知 $\{u_n\}$ 在 $\mathcal{X}_r$ 中有界。因此，由[24]，通过取子列，仍记为 $\{u_n\}$，存在 $u_\mu\in\mathcal{X}_r$ 使得

u_n 弱收敛 u_μ 在 $\mathcal{X}_r$ 和 $L^2(\mathbb{R}^N)$，$u_n\to u_\mu$ 在 $L^q(\mathbb{R}^N)$，$\forall q\in(2,2^*)$，$u_n\to u_\mu\ge0$ a.e.在 $\mathbb{R}^N$。

我们断言 $u_\mu\ne0$。假设 $u_\mu=0$，则当 $n\to\infty$ 时有，

$$\begin{aligned}I_\mu(u_n)&=\frac{\mu}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^\theta+\frac12\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2+\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u_n|^2-\frac1p\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^p\\ &\le(1+\gamma_\theta)\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^\theta+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2+\kappa\alpha^2(2N\alpha-N+2)\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u_n|^2\text{，}\\ &=Q_\mu(u_n)+\gamma_p\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^p\to0\end{aligned}$$

蕴含 $I_\mu(u_n)\to0$，即 $\sigma_\mu(a)=0$。由引理 3.5 可得 $m_\mu(a)=0$，这与注 3.1 矛盾。因此，$u_\mu\ne0$。根据

$I_\mu\big|_{S(a)}'(u_n)\to 0$，由[22]中引理 3，则存在 $\lambda_n\in\mathbb{R}$ 使得

$$I_\mu'(u_n)+\lambda_n u_n\to 0 \text{ 在 } \mathcal{X}^* 。\tag{3.15}$$

因此，$\lambda_n=\frac{1}{a}I_\mu'(u_n)[u_n]+o_n(1)$ 在 $\mathbb{R}$ 有界，假设 $\lambda_n\to\lambda_\mu$。因为 $\{u_n\}$ 有界，则 $I_\mu'(u_n)+\lambda_\mu u_n\to 0$。类似于[17]中引理 A.2 的证明，有

$$I_\mu'(u_\mu)+\lambda_n u_\mu=0\tag{3.16}$$

以 $x\cdot\nabla u$ 和 u 为(3.16)的测试函数，可得 $\mathrm{Q}_\mu(u_\mu)=0$。因此，

$$\mathrm{Q}_\mu(u_n)+\gamma_p\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^p\to\mathrm{Q}_\mu(u_\mu)+\gamma_p\int_{\mathbb{R}^N}|u_\mu|^p$$

利用弱下半连续的性质，见[25]中引理 4.3，得

$$\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^\theta\to\mu\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\mu|^\theta,\tag{3.17}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\to\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\mu|^2,\tag{3.18}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u_n|^2\to\int_{\mathbb{R}^N}|u_\mu|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u_\mu|^2\tag{3.19}$$

故 $I_\mu(u_\mu)=\lim_{n\to\infty}I_\mu(u_n)=\sigma_\mu(a)$。此外，由(3.17)~(3.19)，得出

$$I_\mu'(u_n)[u_n]\to I_\mu'(u_\mu)[u_\mu]\tag{3.20}$$

因此，结合(3.20)，(3.15)和(3.16)，$\lambda_\mu\|u_n\|_2^2\to\lambda_\mu\|u_\mu\|_2^2$ 成立。故 $\lambda_\mu\neq 0$，这意味着 $u_n\to u_\mu$ 在 $\mathcal{X}_r$。综上，我们得如下结果。

命题 3.1：对于任意固定的 $\mu\in(0,1]$，存在 $u_\mu\in\mathcal{X}_r\setminus\{0\}$ 和 $\lambda_\mu\in\mathbb{R}$，使得 $I_\mu'(u_\mu)+\lambda_\mu u_\mu=0$，$I_\mu(u_\mu)=m_\mu(a)$，$\mathrm{Q}_\mu(u_\mu)=0$，$0<\|u_\mu\|_2^2\le a$，$u_\mu\ge 0$。
此外，如果 $\lambda_\mu\neq 0$，有 $\|u_\mu\|_2^2=a$，即 $m_\mu(a)$ 可达，且 u_μ 是 $I_\mu\big|_{S(a)}$ 的一个基态临界点。

3.3. $I_\mu\big|_{S(a)}$ 的无穷多个临界点

本小节讨论 $I_\mu\big|_{S(a)}$ 的无穷多个径向临界点的存在性。我们回顾定义 C，定义泛函 $K_\mu: X\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ 为：

$$\begin{aligned}K_\mu(u)&:=I_\mu(s_\mu(u)\star u)\\&=\frac{\mu}{\theta}\mathrm{e}^{\theta(1+\gamma_\theta)s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^\theta+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\\&\quad+\kappa\alpha^2\mathrm{e}^{(2N\alpha-N+2)s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{p\gamma_p s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\end{aligned},\tag{3.21}$$

其中 $s_\mu(u)$ 由引理 3.2 给出，我们可以看出 $K_\mu(u)$ 是 τ -不变的。此外，受到[27]的启发，有

引理 3.8：泛函 $K_\mu(u)$ 是 $\mathcal{C}^1$ 的，且对任意的 $u\in\mathcal{X}\setminus\{0\}$ 和 $\phi\in\mathcal{X}$

$$\begin{aligned}K_\mu'(u)[\phi]&=\mu\mathrm{e}^{\theta(1+\gamma_\theta)s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{\theta-2}\nabla u\cdot\nabla\phi+\mathrm{e}^{2s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\cdot\nabla\phi\\&\quad+\kappa\alpha^2\mathrm{e}^{(2N\alpha-N+2)s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}\left[2(2\alpha-1)|u|^{4\alpha-4}u\phi|\nabla u|^2+2|u|^{2(2\alpha-1)}\nabla u\cdot\nabla\phi\right]\\&\quad-\mathrm{e}^{p\gamma_p s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}u\phi\\&=I_\mu'(s_\mu(u)*u)[s_\mu(u)*\phi]\end{aligned}。$$

证明：令 $u\in\mathcal{X}\setminus\{0\}$ 和 $\phi\in\mathcal{X}$。我们估计这项

$$K_\mu(u_t)-K_\mu(u)=I_\mu(s_t\star u_t)-I_\mu(s_0\star u),$$

其中，$u_t=u+t\phi$，$s_t=s_\mu(u_t)$ 且 $|t|$ 足够小。通过中值定理，我们有

$$\begin{aligned}
&I_\mu(s_t\star u_t)-I_\mu(s_0\star u)\le I_\mu(s_t\star u_t)-I_\mu(s_t\star u)\\
&=\mu e^{\theta(1+\gamma_\theta)s_t}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_{\eta_t}|^{\theta-2}\left(\nabla u\cdot\nabla\phi+\eta_t|\nabla\phi|^2\right)t+e^{2s_t}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla u\cdot\nabla\phi+\eta_t|\nabla\phi|^2\right)t\\
&\quad+\kappa\alpha^2e^{(2N\alpha-N+2)s_t}\int_{\mathbb{R}^N}\left[2(2\alpha-1)|u_{\eta_t}|^{4\alpha-4}u_{\eta_t}\phi|\nabla u_{\eta_t}|^2+2|u_{\eta_t}|^{2(2\alpha-1)}\left(\nabla u\cdot\nabla\phi+\eta_t|\nabla\phi|^2\right)\right]t\\
&\quad-e^{p\gamma_p s_t}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{\eta_t}|^{p-2}\left(u\phi+\eta_t\phi^2\right)t
\end{aligned}$$

其中 $|\eta_t|\in(0,|t|)$。类似地，

$$\begin{aligned}
&I_\mu(s_t\star u_t)-I_\mu(s_0\star u)\ge I_\mu(s_0\star u_t)-I_\mu(s_0\star u)\\
&=\mu e^{\theta(1+\gamma_\theta)s_0}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_{\xi_t}|^{\theta-2}\left(\nabla u\cdot\nabla\phi+\xi_t|\nabla\phi|^2\right)t+e^{2s_0}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla u\cdot\nabla\phi+\xi_t|\nabla\phi|^2\right)t\\
&\quad+\kappa\alpha^2e^{(2N\alpha-N+2)s_0}\int_{\mathbb{R}^N}\left[2(2\alpha-1)|u_{\xi_t}|^{4\alpha-4}u_{\xi_t}\phi|\nabla u_{\xi_t}|^2+2|u_{\xi_t}|^{2(2\alpha-1)}\left(\nabla u\cdot\nabla\phi+\xi_t|\nabla\phi|^2\right)\right]t\\
&\quad-e^{p\gamma_p s_0}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{\xi_t}|^{p-2}\left(u\phi+\xi_t\phi^2\right)t
\end{aligned}$$

其中 $|\xi_t|\in(0,|t|)$。因为当 $t\to0$ 时，$s_t\to s_0$，根据上述两个不等式得出

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to0}\frac{K_\mu(u_t)-K_\mu(u)}{t}&=\mu e^{\theta(1+\gamma\theta)s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{\theta-2}\nabla u\cdot\nabla\phi+e^{2s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\cdot\nabla\phi\\
&\quad+\kappa\alpha^2e^{(2N\alpha-N+2)s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}\left[2(2\alpha-1)|u|^{4\alpha-4}u\phi|\nabla u|^2+2|u|^{2(2\alpha-1)}\nabla u\cdot\nabla\phi\right]\\
&\quad-e^{p\gamma_p s_\mu(u)}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}u\phi
\end{aligned}$$

利用中值定理和勒贝格控制收敛定理，可得 K_μ 的 Gâteaux 导数是有界线性，连续的。因此 K_μ 是 $\mathcal{C}^1$ 的。特别地，通过变量变换，有

$$K'_\mu(u)[\phi]=I'_\mu(s_\mu(u)\star u)[s_\mu(u)\star\phi],$$

证毕。

为了得到类似于引理 3.6 的 $I_\mu|_{S(a)}$ 的特殊的 PS 序列，回顾定义 C，我们需要以下引理

引理 3.9 [17]：令 $\mathcal{G}$ 是 $Y=S_r(a)$ 紧子集的一个 τ-同伦稳定族，边界 $B=\varnothing$，设

$$d:=\inf_{A\in\mathcal{G}}\max_{u\in A}K_\mu(u)。$$

如果 $d>0$，则存在 $u_n\in S_r(a)$ 使得

$$I_\mu(u_n)\to d，\ I_\mu|'_{S(a)}(u_n)\to0，\ \mathrm{Q}_\mu(u_n)=0。$$

令 $\mathcal{A}(a)$ 是 $S_r(a)$ 的紧 τ-不变子集的族。对于每个 $j\in N^+$，集合

$$\mathcal{A}_j(a):=\{A\in\mathcal{A}(a):\mathrm{Ind}(A)\ge j\}\text{ 和 }c_\mu^j(a):=\inf_{A\in A_j(a)}\max_{u\in A}K_\mu(u)$$

关于 $\mathcal{A}_j(a)$ 和 $c_\mu^j(a)$，根据[17]中引理 3.10 的证明

引理 3.10 [17]：i) 对任意的 $j\in N^+$，$\mathcal{A}_j(a)=\varnothing$ 和 $\mathcal{A}_j(a)$ 是 $S_r(a)$ 紧子集的一个 τ-同伦稳定族，边界 $B=\varnothing$；

ii) 对任意的 $\mu\in(0,1]$，任意的 $j\in N^+$，$c_\mu^{j+1}(a)\ge c_\mu^j(a)\ge\mathcal{D}_0(a)>0$；

iii) 对任意的 $j\in N^+$， $c_\mu^j(a)$ 关于 $\mu\in(0,1]$ 非减；

iv) 当 $j\to+\infty$ 时， $b_j(a):=\inf_{0<\mu\le 1} c_\mu^j(a)\to+\infty$ 。

对于任意固定的 $\mu\in(0,1]$ 和任意 $j\in N^+$ ，根据引理 3.9 和引理 3.10，可以找到序列 $u_n^j\in S_r(a)$ 使得

$$I_\mu\left(u_n^j\right)\to c_\mu^j(a),\quad I_\mu\big|_{S(a)}'\left(u_n^j\right)\to 0,\quad Q_\mu\left(u_n^j\right)=0 。$$

类似引理 3.7，有

引理 3.11：存在 $\{u_n^j\}$ 的一个子列，仍记为 $\{u_n^j\}$ ，存在一个 $u_\mu^j\in X_r\setminus\{0\}$ 和一个 $\lambda_\mu^j\in\mathbb{R}$ 使得

u_n^j 弱收敛 u_μ^j 在 X_r ， $I_\mu\left(u_\mu^j\right)=c_\mu^j(a)$ 和 $I_\mu'\left(u_\mu^j\right)+\lambda_\mu^j u_\mu^j=0$ 。 (3.22)

此外，如果 $\lambda_\mu^j\ne 0$ ，我们有

$u_n^j\to u_\mu^j$ 在 X_r 。

类似命题 3.1，我们得到

命题 3.2：对任意固定的 $\mu\in(0,1]$ 和任意的 $j\in\mathbb{N}^+$ ，存在一个 $u_\mu^j\in\mathcal{X}_r\setminus\{0\}$ 和 $\lambda_\mu^j\in\mathbb{R}$ 使得

$$I_\mu'\left(u_\mu^j\right)+\lambda_\mu^j u_\mu^j=0,\quad I_\mu\left(u_\mu^j\right)=c_\mu^j(a),\quad Q_\mu\left(u_\mu^j\right)=0,\quad 0<\left\|u_\mu^j\right\|_2^2\le a 。$$

此外，如果 $\lambda_\mu^j\ne 0$ ，有 $\left\|u_\mu^j\right\|_2^2=a$ ，即 $\left\{u_\mu^j : j\in\mathbb{N}^+\right\}$ 是 $I_\mu\big|_{S(a)}$ 随能量增长的无穷多个临界点。

4. 当 $\mu\to 0^+$ 时的收敛问题

在本节中，令 $\mu\to 0^+$ ，我们证明第 3 节中获得的 $I_\mu\big|_{S(a)}$ 的临界点序列收敛于 $I_\mu\big|_{\tilde{S}(a)}$ 的临界点。

命题 4.1：令 $N\ge 2$ 。假设 $\mu_n\to 0^+$ ， $I_{\mu_n}'\left(u_{\mu_n}\right)+\lambda_{\mu_n}u_{\mu_n}=0$ ， $\lambda_{\mu_n}\ge 0$ ，且对于 $u_{\mu_n}\in S_r(a_n)$ ， $I_{\mu_n}\left(u_{\mu_n}\right)\to c\in(0,+\infty)$ ，其中 $0<a_n\le a$ 。则存在一个子列 u_{μ_n} 弱收敛 u 在 $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ ， $u\ne 0$ ， $u\in H_r^1\left(\mathbb{R}^N\right)\cap L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ 和存在一个 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$I'(u)+\lambda u=0$ ， $I(u)=c$ 和 $0<\|u\|_2^2\le a$ 。

此外，i) 如果 $u_{\mu_n}\ge 0$ ，对于每个 $n\in\mathbb{N}^+$ ，则 $u\ge 0$ ；

ii) 如果 $\lambda\ne 0$ ，有 $\|u\|_2^2=\lim_{n\to\infty}a_n$ 。

证明：受[16]的启发。首先，由引理 2.1， $I_{\mu_n}'\left(u_{\mu_n}\right)+\lambda_{\mu_n}u_{\mu_n}=0$ 可推得对每个 $n\in\mathbb{N}^+$ ， $Q_{\mu_n}\left(u_{\mu_n}\right)=0$ 。接下来根据引理 3.3，我们可得

$$\sup_{n\ge 1}\max\left\{\mu_n\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u_{\mu_n}\right|^\theta,\int_{\mathbb{R}^N}\left|u_{\mu_n}\right|^{2(2\alpha-1)}\left|\nabla u_{\mu_n}\right|^2,\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u_{\mu_n}\right|^2\right\}<+\infty \tag{4.1}$$

因此， u_{μ_n} 在 $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ 有界。我们断言 $\liminf_{n\to\infty}a_n>0$ ，故 $\lambda_{\mu_n}=\dfrac{1}{a_n}I_{\mu_n}'\left(u_{\mu_n}\right)\left[u_{\mu_n}\right]$ 在 $\mathbb{R}$ 是有界的。事实上，如果 $a_n\to 0$ ，结合(2.6)，可得 $\left\|u_{\mu_n}\right\|_p\to 0$ ，根据 $Q_{\mu_n}\left(u_n\right)=0$ 得出 $I_{\mu_n}\left(u_{\mu_n}\right)\to 0$ ，这与 $c>0$ 矛盾。因此，存在一个子列，仍记为 λ_{μ_n} 且 $\lambda_{\mu_n}\to\lambda$ 在 $\mathbb{R}$ ， u_{μ_n} 弱收敛 u 在 $H_r^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ ， $u_{\mu_n}\to u$ 在 $L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ 当 $2<q<2^*$ 和 $u_{\mu_n}\to u$ a.e.在 $\mathbb{R}^N$ 。由插值不等式和(2.6)，得 $u_{\mu_n}\to u$ 在 $L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ 当 $2<q<22^*$ 。因此，如果对于每个 $n\in\mathbb{N}^+$ 有 $u_{\mu_n}\ge 0$ ，我们有 $u\ge 0$ 。此外，类似[17]中引理 A.2，可得 $u_n\nabla u_n\to u\nabla u$ 在 $\left(L_{loc}^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^N$ 和 $u_n\nabla u_n\to u\nabla u$ a.e.在 $\mathbb{R}^N$ 。现在我们分几步来证明结论。

第一步：我们证明对于一些正常数 C 有 $\left\|u_{\mu_n}\right\|_\infty\le C$ 和 $\|u\|_\infty\le C$ 。

我们仅证明 $N\ge 3$ 情况，情况 $N=2$ 类似。设 $T>2$ ， $r>0$ 和 $v_n=\begin{cases}T, & u_{\mu_n}\ge T,\\ u_{\mu_n}, & \left|u_{\mu_n}\right|\le T,\\ -T, & u_{\mu_n}\le -T,\end{cases}$

令 $\phi = u_{\mu_n}|v_n|^{2r}$，则 $\phi \in \mathcal{X}$。根据 $I'_{\mu_n}(u_{\mu_n}) + \lambda_{\mu_n} u_{\mu_n} = 0$ 和 $\lambda_{\mu_n} \ge 0$，得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u_{\mu_n}|^{p-2} u_{\mu_n}\phi &= \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{\mu_n}|^{\theta-2} \nabla u_{\mu_n} \cdot \nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_{\mu_n} \cdot \nabla\phi + \lambda_{\mu_n} \int_{\mathbb{R}^N} u_{\mu_n}\phi \\
&\quad + \kappa\alpha^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[2(2\alpha-1)|u_{\mu_n}|^{4\alpha-4} u_{\mu_n}\phi |\nabla u_{\mu_n}|^2 + 2|u_{\mu_n}|^{2(2\alpha-1)} \nabla u_{\mu_n} \cdot \nabla\phi \right] \\
&\ge 2\int_{\mathbb{R}^N} |u_{\mu_n}|^{2(2\alpha-1)} \nabla u_{\mu_n} \cdot \nabla\phi \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N} |u_{\mu_n}|^{2(2\alpha-1)} |\nabla u_{\mu_n}|^2 |v_n|^{2r} + |u_{\mu_n}|^{2(2\alpha-1)} u_{\mu_n} 2r|v_n|^{2r-2} v_n \nabla u_{\mu_n} \cdot \nabla v_n \\
&= 2\frac{1}{(2\alpha)^2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|v_n|^r \left|\nabla u_{\mu_n}^{2\alpha}\right| \right)^2 + \frac{4}{r} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_{\mu_n}^{2\alpha}| \nabla |v_n|^r \right)^2 \\
&\ge \frac{1}{r+(2\alpha)^2} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla\left(u_{\mu_n}^{2\alpha} |v_n|^r \right) \right|^2 \ge \frac{C}{(r+2\alpha)^2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| u_{\mu_n}^{2\alpha} |v_n|^r \right|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}}
\end{aligned}$$

另一方面，由 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u_{\mu_n}|^{p-2} u_{\mu_n}\phi &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_{\mu_n}|^p |v_n|^{2r} = \int_{\mathbb{R}^N} |u_{\mu_n}|^{p-4\alpha} |v_n|^{2r} |u_{\mu_n}|^{4\alpha} \\
&\le \left(\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_{\mu_n}|^{22^*} \right)^{\frac{p-4\alpha}{22^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|v_n|^r |u_{\mu_n}|^{2\alpha} \right)^{\frac{42^*}{22^2-p+4\alpha}} \right) \right)^{\frac{22^*-p+4\alpha}{22^*}} \\
&\le C \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|v_n|^r |u_{\mu_n}|^{2\alpha} \right)^{\frac{42^*}{22^*-p+4\alpha}} \right)^{\frac{22^*-p+4\alpha}{22^*}}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $\frac{p-4\alpha}{22^*} + \frac{22^*-p+4\alpha}{22^*} = 1$。结合这些不等式，有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| u_{\mu_n}^{2\alpha} |v_n|^r \right|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \le C(r+2\alpha)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|v_n|^r |u_{\mu_n}|^{2\alpha} \right)^{\frac{42^*}{22^*-p+4\alpha}} \right)^{\frac{22^*-p+4\alpha}{22^*}} \tag{4.3}$$

令 $r_0 : (r_0+2\alpha)q = 22^*$ 和 $d = \frac{2^*}{q} > 1$，其中 $q = \frac{42^*}{22^*-p+4\alpha}$。在(4.3)中取 $r = r_0$，令 $T \to +\infty$，可得

$$\|u_{\mu_n}\|_{(2\alpha+r_0)qd} \le \left(C(r_0+2\alpha) \right)^{\frac{1}{r_0+2\alpha}} \|u_{\mu_n}\|_{(2\alpha+r_0)q} \tag{4.4}$$

设 $i \in \mathbb{N}$，$2\alpha + r_{i+1} = (2\alpha + r_i)d$。然后归纳起来，可得

$$\|u_{\mu_n}\|_{(2\alpha+r_0)qd^{i+1}} \le \prod_{k=0}^{i} \left(C(r_k+2\alpha) \right)^{\frac{1}{r_k+2\alpha}} \|u_{\mu_n}\|_{(2\alpha+r_0)q} \le C\|u_{\mu_n}\|_{(2\alpha+r_0)q} \tag{4.5}$$

其中 C 是正常数。在(4.5)式中取 $i \to \infty$，有 $\|u_{\mu_n}\|_\infty \le C$ 和 $\|u\|_\infty \le C$。

第二步：证明 $I'(u) + \lambda u = 0$。

取 $\phi = \psi e^{-u_{\mu_n}}$，其中 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$，$\psi \ge 0$，我们有

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(I'_{\mu_n}\left(u_{\mu_n}\right)+\lambda_{\mu_n}u_{\mu_n}\right)[\phi] \\
&= \mu_n\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u_{\mu_n}\right|^{\theta-2}\nabla u_{\mu_n}\left(\nabla\psi e^{-u_{\mu_n}}-\psi e^{-u_{\mu_n}}\nabla u_{\mu_n}\right)+\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_{\mu_n}\left(\nabla\psi e^{-u_{\mu_n}}-\psi e^{-u_{\mu_n}}\nabla u_{\mu_n}\right) \\
&\quad+\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}2(2\alpha-1)\left|u_{\mu_n}\right|^{4\alpha-4}u_{\mu_n}\psi e^{-u_{\mu_n}}\left|\nabla u_{\mu_n}\right|^2 \\
&\quad+\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}2\left|u_{\mu_n}\right|^{2(2\alpha-1)}\nabla u_{\mu_n}\left(\nabla\psi e^{-u_{\mu_n}}-\psi e^{-u_{\mu_n}}\nabla u_{\mu_n}\right) \\
&\quad+\lambda_{\mu_n}\int_{\mathbb{R}^N}u_{\mu_n}\psi e^{-u_{\mu_n}}-\int_{\mathbb{R}^N}\left|u_{\mu_n}\right|^{p-2}u_{\mu_n}\psi e^{-u_{\mu_n}} \\
&\le \mu_n\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u_{\mu_n}\right|^{\theta-2}\nabla u_{\mu_n}\nabla\psi e^{-u_{\mu_n}}+\left(1+2\kappa\alpha^2\left|u_{\mu_n}\right|^{2(2\alpha-1)}\right)\nabla u_{\mu_n}\nabla\psi e^{-u_{\mu_n}} \\
&\quad-\int_{\mathbb{R}^N}\left(1+2\kappa\alpha^2\left|u_{\mu_n}\right|^{2(2\alpha-1)}-2(2\alpha-1)\kappa\alpha^2\left|u_{\mu_n}\right|^{4\alpha-4}u_{\mu_n}\right)\psi e^{-u_{\mu_n}}\left|\nabla u_{\mu_n}\right|^2 \\
&\quad+\lambda_{\mu_n}\int_{R^N}u_{\mu_n}\psi e^{-u_{\mu_n}}-\int_{R^N}\left|u_{\mu_n}\right|^{p-2}u_{\mu_n}\psi e^{-u_{\mu_n}}
\end{aligned}
$$

因为 $\mu_n\to 0^+$ 和 $\left\|u_{\mu_n}\right\|_\infty\le C$，(4.1)推得

$$
\mu_n\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u_{\mu_n}\right|^{\theta-2}\nabla u_{\mu_n}\nabla\psi e^{-u_{\mu_n}}\to 0
$$

根据 u_{μ_n} 的弱收敛性，Hölder 不等式和 Lebesgue 控制收敛定理，可知

$$
\int_{\mathbb{R}^N}\left(1+2\kappa\alpha^2\left|u_{\mu_n}\right|^{2(2\alpha-1)}\right)\nabla u_{\mu_n}\nabla\psi e^{-u_{\mu_n}}\to\int_{\mathbb{R}^N}\left(1+2\kappa\alpha^2|u|^{2(2\alpha-1)}\right)\nabla u\nabla\psi e^{-u}
$$

$$
\lambda_{\mu_n}\int_{R^N}u_{\mu_n}\psi e^{-u_{\mu_n}}\to\lambda\int_{R^N}u\psi e^{-u}，\quad \int_{R^N}\left|u_{\mu_n}\right|^{p-2}u_{\mu_n}\psi e^{-u_{\mu_n}}\to\int_{R^N}|u|^{p-2}u\psi e^{-u}
$$

此外，根据 Fatou 引理，可得

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(1+2\kappa\alpha^2\left|u_{\mu_n}\right|^{2(2\alpha-1)}-2(2\alpha-1)\kappa\alpha^2\left|u_{\mu_n}\right|^{4\alpha-4}u_{\mu_n}\right)\psi e^{-u_{\mu_n}}\left|\nabla u_{\mu_n}\right|^2 \\
&\ge\int_{\mathbb{R}^N}\left(1+2\kappa\alpha^2u^{2(2\alpha-1)}-2(2\alpha-1)\kappa\alpha^2|u|^{4\alpha-4}u\right)\psi e^{-u}|\nabla u|^2
\end{aligned}
$$

因此，对任意的 $\varphi\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$，$\varphi\ge 0$，有

$$
\begin{aligned}
0 &\le\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\left(\nabla\psi e^{-u}-\psi e^{-u}\nabla u\right)+2\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}\nabla u\left(\nabla\psi e^{-u}-\psi e^{-u}\nabla u\right) \\
&\quad+2(2\alpha-1)\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{4\alpha-4}u\psi e^{-u}|\nabla u|^2+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}u\psi e^{-u}-\int_{R^N}|u|^{p-2}u\psi e^{-u}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

选择一个非负函数列 $\psi_n\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ 使得 $\psi_n\to\varphi e^u$ 在 $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$，$\psi_n\to\varphi e^u$ a.e.在 $\mathbb{R}^N$ 和 ψ_n 在 $L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ 一致有界。则根据(4.6)，有

$$
0\le\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\cdot\nabla\varphi+2\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}\nabla u\cdot\nabla\varphi+2(2\alpha-1)\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{4\alpha-4}u\varphi|\nabla u|^2+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}u\varphi-\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}u\varphi \tag{4.7}
$$

类似地，选取 $\phi=\psi e^{u_{\mu_n}}$，可得

$$
0\ge\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\cdot\nabla\varphi+2\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}\nabla u\cdot\nabla\varphi+2(2\alpha-1)\kappa\alpha^2\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{4\alpha-4}u\varphi|\nabla u|^2+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}u\varphi-\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}u\varphi
$$

注意到，对任意的 $\varphi\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$，$\varphi=\varphi^+-\varphi^-$，我们可以得到 $I'(u)+\lambda u=0$。

第三步：类似于引理 3.7，完成证明。

由引理 2.1，我们从 $I'(u)+\lambda u=0$ 可得 $Q(u):=Q_0(u)=0$。因此，

$$
Q_{\mu_n}\left(u_{\mu_n}\right)+\gamma_p\int_{\mathbb{R}^N}\left|u_{\mu_n}\right|^p\to Q(u)+\gamma_p\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p。
$$

接下来利用弱下半连续的性质，必有

$$\mu_n\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u_{\mu_n}\right|^{\theta}\to 0，\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u_{\mu_n}\right|^{2}\to\int_{\mathbb{R}N}|\nabla u|^2，\int_{\mathbb{R}^N}\left|u_{\mu_n}\right|^{2(2\alpha-1)}\left|\nabla u_{\mu_n}\right|^{2}\to\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2 \tag{4.8}$$

故 $I(u)=\lim\limits_{n\to\infty}I_\mu\left(u_{\mu_n}\right)=c$。此外，根据(4.8)，我们有

$$I'_{\mu_n}\left(u_{\mu_n}\right)\left[u_{\mu_n}\right]\to I'(u)[u]。$$

因此，$\lambda\left\|u_{\mu_n}\right\|_2^2\to\lambda\|u\|_2^2$ 成立。故如果 $\lambda\neq 0$，有 $\|u\|_2^2=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

最后，我们给出定理 1.1 和定理 1.2 的证明。

定理 1.1 的证明：由注 3.1 和注 3.2，可知

$$d^*(a):=\lim_{\mu\to 0^+}m_\mu(a)\in(0,+\infty)。$$

由命题 3.1，取 $\mu_n\to 0^+$，对于 $u_{\mu_n}\in S_r(a_n)$，$I'_{\mu_n}\left(u_{\mu_n}\right)+\lambda_{\mu_n}u_{\mu_n}=0$，$I_{\mu_n}\left(u_{\mu_n}\right)\to d^*(a)$，其中 $0<a_n\le a$ 和 $u_{\mu_n}\ge 0$。然后根据引理 2.3 可得 $\lambda_{\mu_n}>0$。现在根据命题 4.1，存在 $v\neq 0$，$v\ge 0$，$v\in H_r^1\left(\mathbb{R}^N\right)\cap L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ 和 $\lambda_0\in\mathbb{R}$，使得

$$I'(v)+\lambda_0 v=0，\quad I(v)=d^*(a)\text{ 和 }0<\|v\|_2^2\le a。$$

然后根据引理 2.3，$\lambda_0>0$。因为 $\lambda_{\mu_n}\to\lambda_0$，可以说当 n 足够大时 $\lambda_{\mu_n}\neq 0$。则 $a_n=a$ 和 $\|v\|_2^2=a$。因此，v 是(1.3)的非平凡非负解。为了考虑基态规范化解，定义

$$d(a):=\inf\left\{I(v):v\in\tilde{S}(a),I|'_{\tilde{S}(a)}(v)=0,v\neq 0\right\},$$

则 $d(a)\le I(v)=d^*(a)$。类似于引理 3.3 的方法，进一步证明 $d(a)>0$。我们取一个序列 $v_n\in\tilde{S}(a)$，$I|'_{\tilde{S}(a)}(v_n)=0$，$v_n\neq 0$ 和 $v_n\ge 0$ 使得 $I(v_n)\to d(a)$。类似于命题 4.1 的证明，存在 $u\neq 0$，$u\ge 0$，$u\in H_r^1\left(\mathbb{R}^N\right)\cap L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得

$$I'(u)+\lambda u=0，\quad I(u)=d(a)。$$

利用引理 2.2，则 $\lambda\neq 0$ 和 $\|u\|_2^2=a$。因此，u 是 $d(a)$ 的极小元。最后，由[23]和 $u\in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$，$u$ 是经典解且严格正的。

定理 1.2 的证明：由引理 3.10，我们可知

$$b_j(a)=\lim_{\mu\to 0^+}c_\mu^j(a)\in(0,+\infty)\text{ 和 }b_j(a)\to+\infty，$$

由命题 3.2，对每个 $j\in\mathbb{N}^+$，取 $\mu_n^j\to 0^+$，对于 $u_{\mu_n^j}\in S_r\left(a_n^j\right)$，$I'_{\mu_n^j}\left(u_{\mu_n^j}^j\right)+\lambda_{\mu_n^j}^j u_{\mu_n^j}^j=0$，$I_{\mu_n^j}\left(u_{\mu_n^j}^j\right)\to b_j(a)$，其中 $0<a_n^j\le a$。然后根据引理 2.3 可得 $\lambda_{\mu_n^j}^j>0$。现在根据命题 4.1，存在 $u^j\neq 0$，$u^j\in H_r^1\left(\mathbb{R}^N\right)\cap L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ 和 $\lambda^j\in R$，使得

$$I'\left(u^j\right)+\lambda^j u^j=0，\quad I\left(u^j\right)=b_j(a)\text{ 和 }0<\left\|u^j\right\|_2^2\le a。$$

接下来利用引理 2.3，可知 $\lambda^j>0$。因为 $\lambda_{\mu_n^j}^j\to\lambda^j$，说明当 n 足够大时 $\lambda_{\mu_n^j}^j\neq 0$，因此，$a_n^j=a$ 和 $\left\|u^j\right\|_2^2=a$，即 $\left\{u^j:j\in\mathbb{N}^+\right\}$ 是(1.3)的规范化解序列。此外，$I\left(u^j\right)=b_j\to+\infty$。

5. 结论

本文研究了当 $h(s)=s^\alpha\,(\alpha\in R)$ 时一类拟线性 Schrödinger 方程基态规范化解的存在性和无穷多个规

范化解的存在性。其中，$N \le 3$，$4\alpha + \frac{4}{N} < p < 2^*$，$\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$。利用 Pohozaev 流形和极小极大原理去寻找扰动泛函的临界点，然后考虑当 $\mu \to 0^+$ 时扰动泛函临界点的收敛性，最后得到该方程的规范化解。

基金项目

山西省自然科学基金面上项目(201901D111085)。

参考文献

[1] Borovskii, A.V. and Galkin, A.L. (1993) Dynamical Modulation of an Ultrashort High-Intensity Laser Pulse in Matter. *JETP*: *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **77**, 562-573.

[2] Kurihara, S. (1981) Large-Amplitude Quasi-Solitons in Superfluid Films. *Journal of the Physical Society of Japan*, **50**, 3262-3267. https://doi.org/10.1143/JPSJ.50.3262

[3] Bass, F.G. and Nasanov, N.N. (1990) Nonlinear Electromagnetic Spin Waves. *Physics Reports*, **189**, 165-223. https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90093-H

[4] Hasse, R.W. (1980) A General Method for the Solution of Nonlinear Soliton and Kink Schrödinger Equations. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, **37**, 83-87. https://doi.org/10.1007/BF01325508

[5] Makhankov, V.G. and Fedynanin,V.K. (1984) Non-Linear Effects in Quasi-One-Dimensional Models of Condensed Matter Theory. *Physics Reports*, **104**, 1-86. https://doi.org/10.1016/0370-1573(84)90106-6

[6] Poppenberg, M., Schmitt, K. and Wang, Z. Q. (2002) On the Exisence of Soliton Solutions to Quasilinear Schrödinger Equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **14**, 329-344. https://doi.org/10.1007/s005260100105

[7] Li, Z. (2019) Positive Solutions for a Class of Singular Quasilinear Schrödinger Equations with Critical Sobolev Exponent. *Journal of Differential Equations*, **266**, 7264-7290. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.11.030

[8] Li, G. (2015) Positive Solution for Quasilinear Schrödinger Equations with a Parameter. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **14**, 1803-1816. https://doi.org/10.3934/cpaa.2015.14.1803

[9] Jeanjean, L. (1997) Existence of Solutions with Prescribed Norm for Semilinear Elliptic Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory, Methods & Applications*, **28**, 1633-1659. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(96)00021-1

[10] Bartsch, T. and De Valeriola, S. (2013) Normalized Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations. ArXiv: 1209.0950.

[11] Ikoma, N. and Tanaka, K. (2019) A Note on Deformation Argument for L^2 Normalized Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations and Systems. *Advances in Differential Equations*, **24**, 609-646.

[12] Jeanjean, L. and Lu, S.-S. (2020) A Mass Supercritical Problem Revisited. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **59**, Article No. 174. https://doi.org/10.1007/s00526-020-01828-z

[13] Soave, N. (2020) Normalized Ground States for the NLS Equation with Combined Nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, **269**, 6941-6987. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.05.016

[14] Soave, N. (2020) Normalized Ground States for the NLS Equation with Combined Nonlinearities: The Sobolev Critical Case. *Journal of Functional Analysis*, **279**, Article ID: 108610. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108610

[15] Jeanjean, L. and Le, T.T. (2021) Multiple Normalized Solutions for a Sobolev Critical Schrödinger Equation. *Mathematische Annalen*, **384**, 101-134. https://doi.org/10.1007/s00208-021-02228-0

[16] Jeanjean, L., Luo, T. and Wang, Z.Q. (2015) Multiple Normalized Solutions for Quasi-Linear Schrödinger Equations. *Journal of Differential Equations*, **259**, 3894-3928. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.05.008

[17] Li, H. and Zou, W. (2021) Quasilinear Schrödinger Equations: Ground State and Infinitely Many Normalized Solutions. ArXiv: 2101.07574.

[18] Yang, X., Tang, X. and Cheng, B. (2021) Multiple Radial and Nonradial Normalized Solutions for a Quasilinear Schrödinger Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **501**, Article ID: 125122. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125122

[19] Liu, J.Q., Wang, Y.Q. and Wang, Z.Q. (2003) Soliton Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations, II. *Journal of Differential Equations*, **187**, 473-493. https://doi.org/10.1016/S0022-0396(02)00064-5

[20] Liu, X.Q., Liu, J.Q. and Wang, Z.Q. (2013) Quasilinear Elliptic Equations with Critical Growth via Perturbation Method. *Journal of Differential Equations*, **254**, 102-124. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.09.006

[21] Ghoussoub, N. (1993) Duality and Perturbation Methods in Critical Point Theory. Cambridge University Press, Cambridge.

[22] Berestycki, H. and Lions, P.L. (1983) Nonlinear Scalar Field Equations II: Existence of Infinitely Many Solutions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **82**, 347-375. https://doi.org/10.1007/BF00250556

[23] Berestycki, H. and Lions, P.L. (1983) Nonlinear Scalar Field Equations I: Existence of a Ground State. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **82**, 313-345. https://doi.org/10.1007/BF00250555

[24] Chang, K.C. (2005) Methods in Nonlinear Analysis. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.

[25] Colin, M., Jeanjean, L. and Squassina, M. (2010) Stability and Instability Results for Standing Waves of Quasi-Linear Schrödinger Equations. *Nonlinearity*, **23**, 1353-1385. https://doi.org/10.1088/0951-7715/23/6/006

[26] Palais, R.S. (1979) The Principle of Symmetric Criticality. *Communications in Mathematical Physics*, **69**, 19-30. https://doi.org/10.1007/BF01941322

[27] Szulkin, A. and Weth, T. (2009) Ground State Solutions for Some Indefinite Variational Problems. *Journal of Functional Analysis*, **257**, 3802-3822. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2009.09.013