

# PhET互动仿真程序在中学数学教学中的应用

崔庆艳\*, 陆海华

南通大学理学院, 江苏 南通

收稿日期: 2022年11月14日; 录用日期: 2022年12月8日; 发布日期: 2022年12月15日

## 摘要

PhET互动仿真程序是一款开源、互动游戏式的学习软件,旨在通过免费的互动模拟平台推动全球科学和数学教育的发展,其中与应用数学相联系的程序是拓展中学数学教学路径的切入点。本文归纳总结PhET仿真平台的特点,探讨PhET互动仿真程序应用价值,挖掘PhET在应用与开发过程中与元认知提示语相联系的创新点,并将其在中学数学中的应用(以《任意角的三角函数概念》和《二项分布》为例)进行详细解释说明。PhET互动仿真程序能够促进学生对抽象知识的本质理解,培养数学应用意识,拓展应用数学思维,提升数学核心素养与关键能力的发展,为跨学科教育与中学数学相融合提供了新的思路,为信息技术与教育相融合提供了一条可行的实践路径。

## 关键词

PhET互动仿真程序, 中学数学教学, 应用数学, 元认知提示语

# The Application of PhET Interactive Simulation in the Middle School Mathematics Teaching

Qingyan Cui\*, Haihua Lu

School of Sciences, Nantong University, Nantong Jiangsu

Received: Nov. 14<sup>th</sup>, 2022; accepted: Dec. 8<sup>th</sup>, 2022; published: Dec. 15<sup>th</sup>, 2022

## Abstract

The PhET interactive simulation is an open source, interactive game learning platform, which aims to promote the development of global science and mathematics education through free interactive

\*通讯作者。

simulation. The simulation associated with applied mathematics provides a perfect introduction to expand the path of mathematics teaching in middle schools. In this study, the characteristics of PhET simulation were induced and summarized, the application value of PhET simulation was discussed, and the innovation of PhET related to metacognitive prompts was explored. What's more, the application of PhET interactive simulation program in middle school mathematics (take "The Concept of Trigonometric Function at Arbitrary Angle" and "Binomial Distribution" as examples) was explained in details. PhET interactive simulation is able to facilitate students' understanding of the essence of abstract knowledge, develop mathematics application awareness, expand applied mathematical thinking and cultivate the development of mathematics core literacy and key abilities. Further, it can provide new ideas for the integration of interdisciplinary education and middle school mathematics, and a feasible practical path for the integration of information technology and education.

## Keywords

PhET Interactive Simulation, Middle School Mathematics Teaching, Mathematics Application, Meta-Cognitive Hint

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. PhET 互动仿真程序

### 1.1. PhET 互动仿真程序简介

PhET (Physics Education Technology)互动仿真程序(<https://phet.colorado.edu/>)是由诺贝尔物理学奖获得者 Carl Wieman (卡尔·威曼)于 2012 年创立的开源虚拟实验平台。当前可译成 97 种语言,通过 Java、Flash 或者 HTML5 来开发仿真程序,利用直观、游戏的环境吸引学生,是一种自我驱动式探索(self-driven exploration) [1], 促进学习者学科核心素养和关键能力的培养。另外此仿真程序也为教师提供丰富的教学资源,可用于课堂教学、实验室、家庭作业以及非正式资源的开发,同时也鼓励教育者分享自己的创新学习资源,进一步促进教师的专业发展。根据多年的使用效果来看,PhET 互动仿真程序具备以下特点[1]:

- 1) 能够提供定量测量和定性分析;
- 2) 用熟悉的元素建立知识与现实世界之间的联系;
- 3) 可视化操作与直接交互相结合;
- 4) 借助多种描述方法从不同方面挖掘事物本质;
- 5) 科学测试的动画图形辅助结论解释;
- 6) 充分的视觉复杂性来激发学习者好奇心,但不是压倒式的“侵袭”。

### 1.2. PhET 互动仿真程序应用价值探讨

#### 1) 时代所需

近年来教育部印发的《教育信息化 2.0 行动计划》和《教育现代化 2035》都体现出国家对信息技术与教育相融合的重视,主张提倡资源平台设计与创新,不断拓展“互联网+教育”路径,发展具备中国特色的教育。近年我国主张开展在地化特色 STEM 教育[2],旨在为学生提供对现实世界问题跨学科理解的

一种途径, 实现不同学科之间的一致性和统一性[3], 同样跨学科教育的实施需要信息技术的辅助。在后疫情时代, PhET 互动仿真程序可以提供远程学习技巧、HTML5 原型模拟程序以及 Java 模拟程序来帮助学习者学习。

### 2) 提供“专家过滤器”

PhET 与真实实验设备相比最突出的优点是可以为使用者提供“专家过滤器”(expert filter) [1]。真实设备出现的意外结果往往会归咎于人为错误或设备缺陷, 学习者几乎不会从其他方面再寻找问题所在, 在真实设备试验中, 无数复杂的未知数是不可预测的, 如果没有“专家过滤器”, 每个不同层次的细节都会被视作同等重要, 这样会让学习者做大量的无用功。

### 3) 游戏式的体验

网络游戏具备的一个最大特点是“竞争性”, 玩家可在装备、战力、等级等方面激发自己的“竞争性”。对同一个知识内容而言, PhET 互动仿真程序通过不断增加程序复杂性和混乱程度来深入知识的拓展, 这不仅能够激发学生为科学研究做好准备的斗志, 更重要的是能够有效指导学生思考。另外利用 PhET 互动仿真程序可以培养学生自主学习与合作学习能力, 同时能够帮助学生建立数学学习信心并促进学生主动思考与交流[4]。

## 2. PhET 互动仿真程序与元认知提示语

元认知是对认知的认知, 是对认知活动的认识和控制。元认知提示语是元认知理论的重要成果之一, 常被应用于课堂教学, 引导和启发学生如何思考以及如何学会思考[5]。波利亚“怎样解题表”中蕴含丰富的元认知提示语, 例如: “你见过类似地题目吗?”、“已知和未知之间的联系是什么?”、“你能否先解决问题的一部分?”等, 元认知提示语与教学之间是双向耦合关系, 信息技术教育与元认知提示语的结合能够在一定程度上弥合“轻交流、轻思考”的鸿沟。PhET 互动仿真程序与元认知提示语的结合有以下三点优势:

### 1) 为元认知提示语的发展提供良好的背景资源

PhET 互动仿真程序的使用, 不仅需要学生的自主探索, 还需要教师的有效指导。教学内容以及教学背景资源是元认知提示语运用和发展的“脚手架”, PhET 互动仿真平台中由浅入深, 循序渐进的教学程序为元认知提示语的设置提供启发, 在本文第三部分也有相应课程内容的元认知提示语设计。

### 2) 元认知提示语反向促进 PhET 互动仿真程序的开发

信息技术教育程序的开发难点在于创新以及克服技术和硬件设施上的困难, 开发者往往不易找到技术的创新点。在一个程序设计之前先进行元认知提示语的设计, 作为一个“指路向标”, 可展示学生的思维历程, 把握教学内容重难点, 为程序创新点开发提供方向。

### 3) 与心理学相联系, 丰富理论基础

元认知提示语可监控和调节认知活动, 权衡下一步行动所带来的结果, 这与心理学中的反馈回路(Feedback loop)息息相关, 即从事实数据出发, 并将数据赋予现实意义, 根据目标去处理信息, 在处理过程中行动本身可作为一个新的评估目标, 不断对其调节和修正, 来达到最终结果[6]。PhET 互动仿真程序的使用和设计都可参考反馈回路理论, 在不断循环、调整和深化过程中来逼近目标, 为大脑提供驱动力。

## 3. 从知识本质出发设计数学课堂

人们常常把数学看作是冰冷的女王, 是因为他们认为数学具有高度的抽象性, 是复杂的、单调乏味的。其实不然, 恩格斯从思维和存在的观点出发, 既肯定了纯数学具有脱离任何个人的特殊经验而独立

存在的意义, 又明确指出数和形的概念是从现实世界中得来的, 数学中的这些材料以极度抽象的形式出现, 这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实[7]。因此只要我们对知识本质进行准确把握, 就会揭开数学的神秘面纱, 并最终会对其感兴趣。下面借助 PhET 互动仿真工具, 以《任意角的三角函数概念》和《二项分布》为例进行探究。

### 3.1. 任意角的三角函数概念

高中任意角的三角函数与初中锐角三角函数有本质的区别, 初中锐角三角函数表示的是关系的度量, 高中任意角的三角函数表示的是关系本身, 即任意角的三角函数描述的是角的大小与三角函数值之间的关系[8], 并且这个关系具备周期性的特点。任意角三角函数相比于锐角三角函数的学习有几处显著的区别: 1) 任意角的推广, 定义了正角、负角和零角; 2) 弧度制的运用, 将角度由六十进制推广到十进制, 实现与实数的一一对应; 3) 借助单位圆, 根据角的终边与圆周的交点坐标来计算三角函数值; 4) 三角函数线是三角函数几何意义的展示, 借助三角函数线可以更好地理解三角函数图像的形成; 5) 三角函数的突出性质: 任意角的三角函数是刻画周期变化现象的数学模型。

PhET 互动仿真程序中的 Trig Tour 深刻展示了上面提到的五点。如图 1 所示, 在此程序上有: 1) 角度与弧度的转换、角的旋转方向的表示来进一步巩固角的分类, 并且以周期的形式来表示出角的大小, 体现了角的任意性; 2) 特殊角的表明, 例如  $0$ 、 $\frac{\pi}{6}$ 、 $\frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{\pi}{4}$ 、 $\frac{\pi}{2}$  等, 由于三角函数的周期性, 可通过记忆一些特殊角的函数值来借助诱导公式推算出其他角的三角函数值; 3) 在下方函数图像中展示出了三角函数线的变化, 有助于学生深刻理解三角函数的概念; 4) 在正切函数中, 当  $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  时, 正切函数在此处无意义, 在这个程序中也形象用  $\pm\infty$  展示出来, 如图 2 所示。

《任意角的三角函数概念》的教学应突出三角函数属于“函数”的范畴, 那就应该突出自变量与函数值的一一对应关系。初中锐角三角函数所学习的几何定义法对于学习函数的帮助不大, 因为学生无法从几何关系中明确找到变量间的对应关系, 这样就会产生一系列的认知障碍。因此在给出任意角的三角函数概念之前需要让学生经历构建函数模型的过程, 可借助 Trig Tour 互动仿真程序, 在教学中纳入“直角坐标系”、“单位圆”、“弧度制”, 充分发挥信息技术的便捷直观功能。通过此仿真程序, 学生从“形”的角度能够将三角函数概念与点的坐标联系起来, 进而抽象出“数”之间的对应关系, 从“函数”的本质特点出发学习三角函数的概念, 有利于学生对内容整体逻辑的把握。

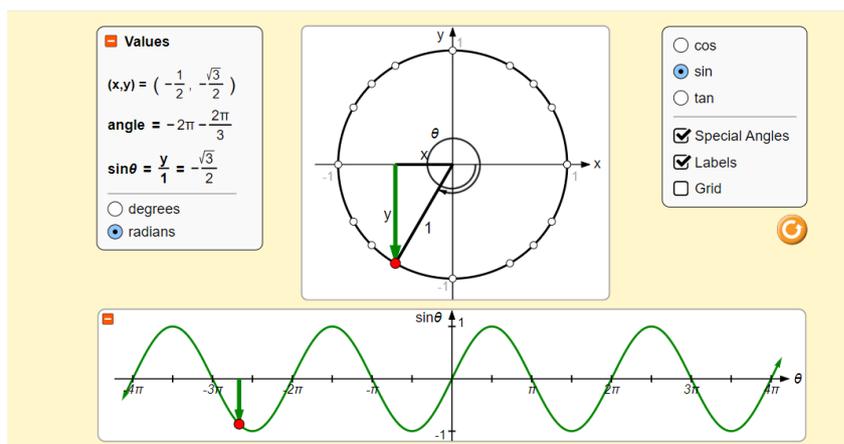


Figure 1. Trig Tour program interface 1

图 1. Trig Tour 程序界面 1

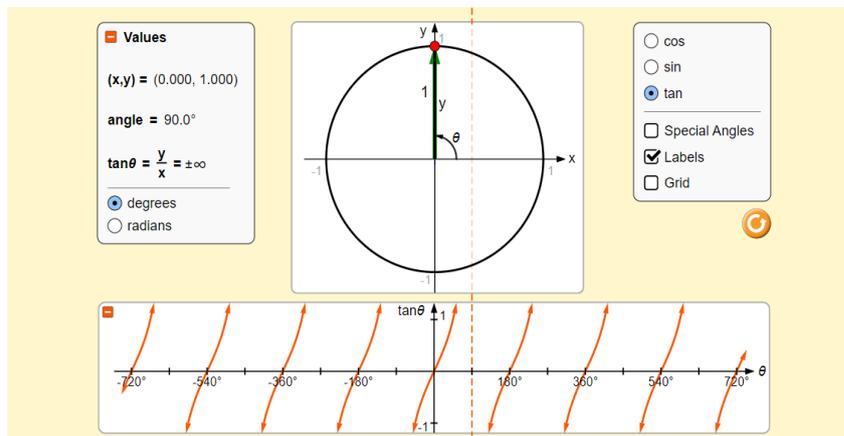


Figure 2. Trig Tour program interface 2

图 2. Trig Tour 程序界面 2

### 3.2. 《任意角的三角函数概念》元认知提示语设计

根据 Trig Tour 程序, 设计相应教学元认知提示语见表 1 所示:

Table 1. Trig Tour metacognitive prompt form

表 1. Trig Tour 元认知提示语表单

元认知提示语	教学过程
1) 程序上的圆具备什么特点? 你是怎么发现的?	新知引入
2) 想象这个圆是一个摩天轮, 当它旋转一周后, 你能否把它的高度找出来?	
3) 哪个函数可以描述高度? 它为什么可以描述高度? 你能根据以往的知识来解释此现象吗?	新知探究
4) 分别点击 cos 和 tan, 它们所描述的情况和你的预设法想一样吗? 不一样的话, 哪里出问题了? 如何进行调整?	
5) 在转动过程中如何确定对应关系? 如何来确定函数值? 存在函数解析式吗?	
6) 现在你可以把摩天轮旋转一周后的高度图像画出来吗? 何时最高? 何时最低?	概念深化
7) 能否将 $\tan\theta$ 图像根据转动特点绘制出来? 点击 $\tan\theta$ 图像展示, 与自己所作图像进行对比, 有什么区别吗? 如果有, 为什么会出现这种区别?	
8) 你在这个过程中进行了怎样的调整? 最终得到了哪些反馈?	回顾总结

### 3.3. 二项分布

在人工智能和大数据时代, 世界正经历百年未有之大变局。概率与统计是人们研究“不确定”现象, 预测事物发展趋势的重要工具, 同样对于培养学生随机性数学思维具有重要帮助作用。《二项分布》与之前所学习的“独立实验”、“二项式定理”等知识密切相关, 是对独立事件的进一步研究, 对后期学生学习随机变量的数字特征奠定理论基础和模型基础。

对于高中概率的学习重难点是构建各类概率模型, 让学生明确各类模型的使用条件以及形成过程。二项分布是应用广泛的离散型随机变量概率模型, 教学重难点自然是二项分布模型的建构。在传统的教学中, 教师会借助具体案例(比如: 抛硬币、射击、有放回抽小球等)从特殊推广到一般, 进而得到二项分布的公式。从特殊到一般的教学思路是值得推荐的, 但可以选择更普适的案例, 并且案例最好可以让学

生联系到前面所学习到的知识, 培养学生应用知识能力和探究精神。PhET 互动仿真程序中的 Plinko Probability 为学生了解整个模型的建构过程提供机会, 同样对于二项分布与正态分布之间的联系也给出了具体的程序展示。

如图 3 所示, 从最上方的节点开始, 下面是按照杨辉三角序列排列的交错节点。从入口处放一枚小球进来, 弹向左边和右边的概率一样, 即 1:1, 再继续下去, 第  $n$  行的概率比例系数则是  $n$  次二项式展开的系数之比, 每个节点都是父节点概率和的  $\frac{1}{2}$ , 具体如图 4 所示。根据二项式展开系数, 可以归纳出

$$p(k) = \frac{C_n^k}{2^n} (k=1,2,3,\dots,n), \text{ 且 } \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{2^n} = 1, \text{ 再化简一步 } p(k) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} (k=1,2,3,\dots,n),$$

进一步由特殊推广到一般, 若事件发生的概率是  $p$ , 则不发生的概率是  $1-p$ ,  $n$  次独立重复试验中发生  $k$  次的概率是  $P(k) = C_n^k (p)^k (1-p)^{n-k} (k=1,2,3,\dots,n)$ 。在此次实验中可要求学生预测单个球会落到哪个箱子的几率更大一些, 将 100 个球进行重复试验, 将落入到箱子中的球数与概率统计联系起来, 实现新旧知识之间的关联。

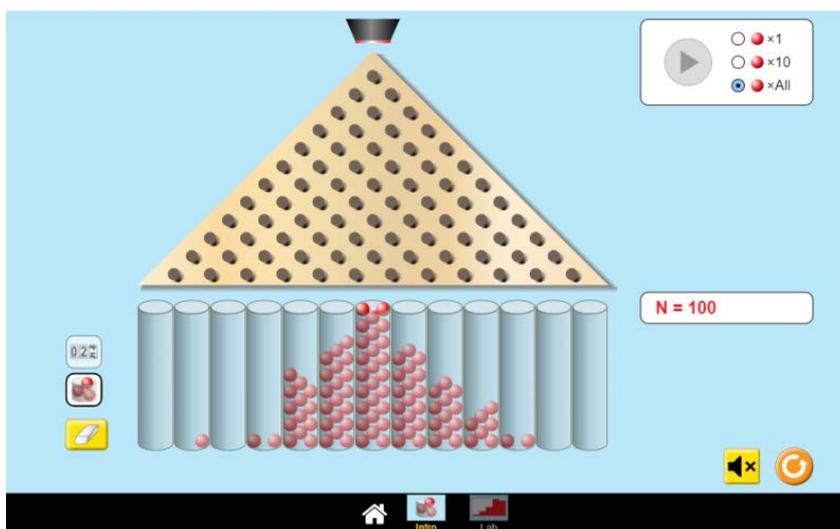


Figure 3. Plinko Probability program interface 1  
图 3. Plinko Probability 程序界面 1

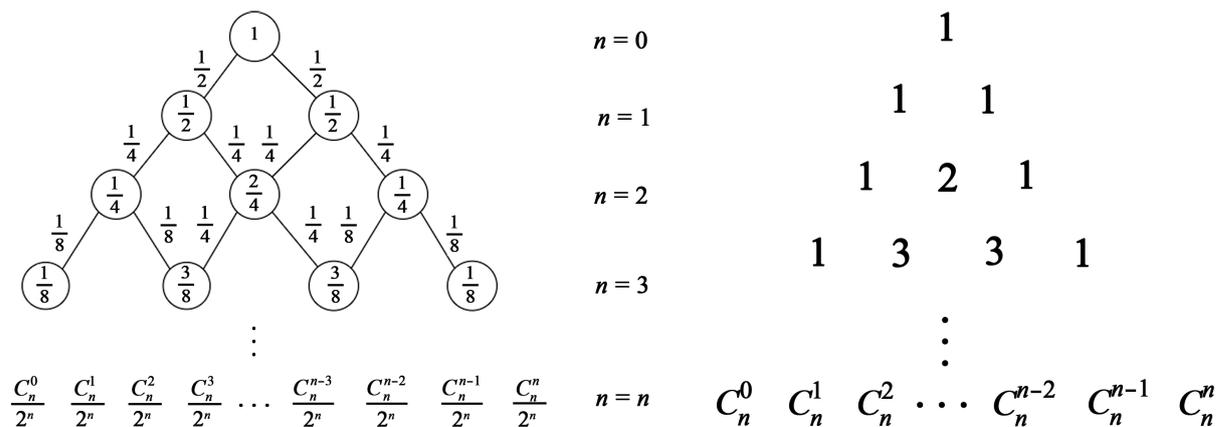


Figure 4. Node probability and Hui Yang triangle  
图 4. 节点概率与杨辉三角

此实验与高尔顿板有异曲同工之处, 若在 Plinko Probability 程序中增加节点的层数以及下面的箱子数, 二项分布会逐渐趋向于正态分布。早在 16 世纪棣莫弗就提出了与其相关的理论, 但没有被世人得到重视, 后来在拉普拉斯的努力下, 产生了棣莫弗 - 拉普拉斯中心极限定理(De Moivre-Laplace), 即当  $n$  比较大时, 二项分布的概率算起来会比较复杂, 可用正态分布近似计算二项分布[9]。

如图 5 所示, 下方蓝色边界的分布直方图是服从  $(8, 2^2)$  的正态分布直方图, 红色区域构成的分布直方图是 2033 个小球进行二项分布试验后所形成的结果, 从图中也可以直观的看到二项分布近似于正态分布。

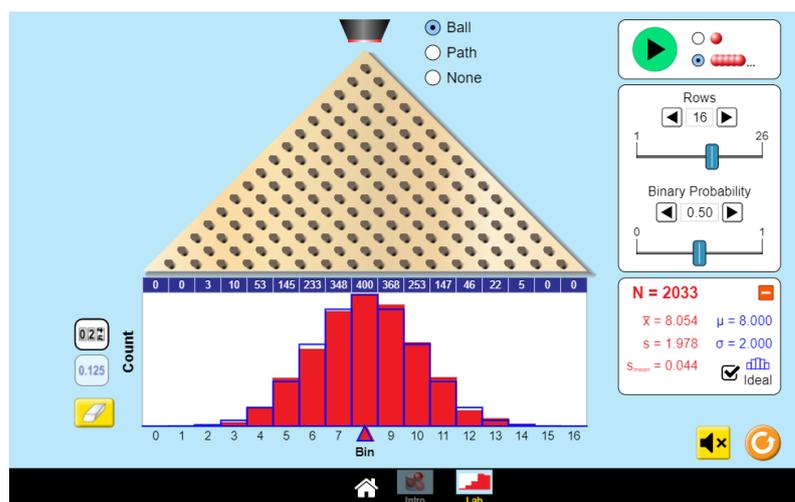


Figure 5. Plinko Probability program interface 2

图 5. Plinko Probability 程序界面 2

基于以上分析, Plinko Probability 仿真程序对于学习《二项分布》有下面几点优势: 1) 以自然地方式与前后知识“二项式定理”、“正态分布”等联系起来, 再次提高学生对于知识之间具有联系性的理解。2) 为学生探究二项分布与正态分布有联系的条件提供思路和想法。一方面当事件成功的概率  $p$  无限接近于  $\frac{1}{2}$  时, 二项分布两侧会逐渐趋于对称, 近似于均值为  $np$ 、方差为  $npq$  的正态分布; 另一方面, 不论  $p$  是否接近于  $\frac{1}{2}$ , 只要  $n$  足够大, 此时的二项分布也会近似于均值为  $np$ 、方差为  $npq$  的正态分布, 这也是此程序中所展示出来的条件。3) 与高尔顿板实验形成联系与比较, 是高尔顿板实验的升华, 向学生拓展中心极限定理也不会显得很突兀, 为课堂教学提供恰当的切入点。

### 3.4. 《二项分布》元认知提示语设计

根据 Plinko Probability 程序, 设计相应教学元认知提示语见表 2 所示:

Table 2. Plinko Probability metacognitive prompt form

表 2. Plinko Probability 元认知提示语表单

元认知提示语	教学过程
1) 猜测一下, 球落入哪个箱子的可能性较大? 哪个箱子的可能性较小? 为什么会产生这种想法?	新知引入
2) 如何去量化这种可能性? 如何计算它落在某个箱子里的概率?	
3) 当球从第一个节点落下时, 是什么决定了它向左还是向右? 你能把小球经过的所有路径画出来吗? 你找到了几条路径?	

## Continued

4) 假设小球向左和向右的概率一样, 那么小球落入第二行每个节点处的概率你可以确定吗? 你是如何确定的? 第三行、第四行呢? 你可以确定每行节点处的概率吗?	新知探究
5) 比较每行各节点处的概率能够发现有什么特点吗? 与以往知识有联系吗? 你是如何观察到的?	
6) 比较行与行节点之间的概率, 你能有什么发现?	
7) 你能总结出第 $n$ 行每个节点的概率吗? 如何用简洁的公式进行描述?	
8) 调整程序中小球向左和向右的概率, 你的这个思路还成立吗? 若成立, 得到的结果与程序中展示的结果一样吗? 若不成立, 哪里出问题了?	知识深化
9) 你还可以继续修正你的公式吗?	
10) 你在这个过程中进行了怎样的调整? 最终得到了哪些反馈?	回顾总结

## 4. 结论

PhET 互动仿真程序不仅是辅助中学数学教学的有效工具, 同样其操作过程与科学探索过程十分接近, 为元认知提示语的发展提供“脚手架”, 为实现“再创造”奠定基础。另外从哲学的观点来看, 世界是处于普遍联系和发展之中的, 知识之间也具有联系性, 借助 PhET 互动仿真程序教学不仅可将知识进行自然的连接, 培养学生数学应用意识的发展, 而且为知识内容的本质学习提供一条可实行路径。

## 基金项目

江苏省研究生科研与实践创新计划项目(SJCX22\_1602)。

## 参考文献

- [1] Wieman, C.E., Adams, W.K. and Perkins, K.K. (2008) PhET: Simulations That Enhance Learning. *Journal of Science*, **322**, 682-683. <https://doi.org/10.1126/science.1161948>
- [2] 李刚. 改变 STEM 教育故事, 面向 STEM 教育未来——第六届国际 STEM 教育大会(2021)述评[J]. 数学教育学报, 2022, 31(3): 88-93.
- [3] 李刚, 吕立杰. 实现真正的 STEM 教育: 来自科学实践哲学视角的理解[J]. 中国教育科学, 2021, 4(2): 84-91.
- [4] 杨婉秋, 李淑文. 美国信息技术与中学数学课堂教学“深度融合”的实践探索[J]. 外国中小学教育, 2019(8): 63-71.
- [5] 韩龙淑. 专家型教师与熟手教师运用元认知提示语的数学课堂比较研究[J]. 数学教育学报, 2016, 25(4): 59-62.
- [6] Carless, D. (2019) Feedback Loops and the Longer-Term: Towards Feedback Spirals. *Journal of Assessment & Evaluation in Higher Education*, **44**, 705-714. <https://doi.org/10.1080/02602938.2018.1531108>
- [7] 傅赢芳, 喻平. 从数学本质出发设计课堂教学——基于数学核心素养培养的视域[J]. 教育理论与实践, 2019, 39(20): 41-43.
- [8] 严兴光. 基于数学理解的三角函数概念教学[J]. 数学通报, 2021, 60(5): 21-24+59.
- [9] 罗艺灵, 刘晓曼, 保继光. 维拉尼演讲中的高尔顿板和网页排序[J]. 数学通报, 2018, 57(10): 39-43.