Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(12), 8869-8873
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1112934

Hans汉斯

复杂三维流形两类穿孔环面和的亏格

王树新，徐诚蕙，陶　金

辽宁师范大学，辽宁 大连

收稿日期：2022年11月21日；录用日期：2022年12月15日；发布日期：2022年12月26日

摘　要

本文从某些三维流形穿孔环面和是否具有亏格可加性出发，通过三维流形组合拓扑的研究方法和技巧，给出了某些可定向闭曲面加厚两类$n(n\geq 3)$穿孔环面和的亏格，进一步得到某些复杂三维流形两类$n(n\geq 3)$穿孔环面和的亏格。

关键词

复杂三维流形，亏格，穿孔环面，曲面和

Genus of Two Classes of Punctured Torus Sum of Complicated 3-Manifolds

Shuxin Wang, Chenghui Xu, Jin Tao

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Nov. 21st, 2022; accepted: Dec. 15th, 2022; published: Dec. 26th, 2022

Abstract

In this paper, starting from whether the punctured torus sum of some 3-manifolds is additive, through the methods and techniques of hybrid topology of 3-manifolds, it gives the genus of two classes of *n*-punctured $(n\geq 3)$ torus sum of some thickened orientable closed surfaces, and then it gets the genus of two classes of *n*-punctured $(n\geq 3)$ torus sum of some complicated 3-mainfolds.

Keywords

Complicated 3-Manifolds, Genus, Punctured Torus, Surfaces Sum

文章引用: 王树新, 徐诚蕙, 陶金. 复杂三维流形两类穿孔环面和的亏格[J]. 应用数学进展, 2022, 11(12): 8869-8873. DOI: 10.12677/aam.2022.1112934

1. 引言

三维流形理论是低维拓扑学研究的核心内容之一，组合方法是研究三维流形分类和结构的一种重要方法。三维流形中不可压缩曲面的性质和分类、纽结和链环理论、三维流形沿曲面相粘后所得流形的亏格与因子三维流形亏格及相粘曲面亏格和边界分支数之间的关系都是近年来三维流形理论研究的热点问题。研究三维流形带边曲面和的亏格，可利用三维流形组合拓扑理论中的割补思想将三维流形带边曲面和转化为三个三维流形沿两个闭曲面相粘的形式，通过三个因子流形的亏格及三维流形沿闭曲面相粘的一些已知结果，进行进一步的分析和讨论。2008 年，Tsuyoshi Kobayashi 和邱瑞锋在文献[1]中证明了若 $M = M_1 \cup_F M_2$，当因子流形 $M_i\,(i=1,2)$ 的 Hausdorff 分解距离足够大时，有 $g(M)=g(M_1)+g(M_2)-g(F)$；2014 年，王树新和倪楠在文献[2]中证明了某些复杂三维流形三穿孔球面和具有亏格可加性；2016 年，王霄在文献[3]中证明了某些复杂三维流形简单穿孔球面和具有亏格可加性；2017 年，冷健在文献[4]中证明了某些复杂三维流形五、六穿孔球面和具有亏格可加性。

本文利用三维流形组合拓扑的研究技巧和方法，对某些可定向闭曲面加厚特定穿孔环面和、某些复杂三维流形特定穿孔环面和的亏格是否具有可加性进行分析，通过讨论相粘穿孔环面的可能分离情形，给出某些可定向闭曲面加厚特定穿孔环面和以及某些复杂三维流形特定穿孔环面和的亏格。

2. 预备知识

定义 2.1 设 M 是一个 Hausdorff 空间，如果空间 M 中任意一点 p 都有一个与 R^n 同胚的开邻域 U_p，则称 M 是一个 n 维流形。如果空间 M 中任意一点 p 存在开邻域或者同胚于 R^n，或者同胚于 R_+^n，则称 M 是一个 n 维带边流形。将流形 M 中所有同胚于 R_+^n 的点组成的集合称为流形 M 的边界，记为 ∂M，并称 $M \setminus \partial M$ 为流形 M 的内部。

定义 2.2 如果 M 是一个 n 维流形，并且 W 是一个含于 M 内的流形，则称 W 是流形 M 的一个子流形。

定义 2.3 假设 M 是一个 n 维流形，W 是一个 m 维流形，如果存在一个同胚映射 $f: W \to M^*$，其中 M^* 是 M 的子流形，则称 f 是从 W 到 M 的一个嵌入映射，$f(W)$ 是 W 到 M 的嵌入。

定义 2.4 如果 M 是一个 n 维流形，同时 W 是一个 m 维流形，映射 f 是从流形 W 到流形 M 的一个嵌入，若满足 $f(\partial W) \subset \partial M$，$f(\operatorname{int} W) \subset \operatorname{int} M$，则称映射 f 是从流形 W 到流形 M 的一个真嵌入。

定义 2.5 设 F 是一个紧致且可定向曲面，C 为曲面 F 上的一条简单闭曲线，如果曲线 C 不在曲面 F 上界定 2-圆片，则称曲线 C 在曲面 F 上是本质的。

定义 2.6 设 F 是真嵌入到三维流形 M 中的曲面，若 F 在 M 中界定三维实心球体或者 F 上至少有一条本质闭曲线在 M 中界定 2-圆片且与 F 不交，则称 F 是流形 M 中的一个可压缩曲面；否则称 F 是流形 M 中的不可压缩曲面。

定义 2.7 假设 S 是三维流形 M 中的一个二维球面，如果 S 不在流形 M 中界定三维实心球体，则称 S 在 M 中是本质的。如果任意球面在 M 中都不是本质的，则称 M 是不可约流形；否则称 M 是可约流形。

定义 2.8 设 P 为一个曲面，F 是 P 的子曲面，若 $\#(P \setminus \operatorname{int} F) > 1$，则称 F 在 P 上是分离的；否则称 F 在 P 上是非分离的。

定义 2.9 若 F 在 P 上是分离的，且 P 沿 F 的任意边界分支切开都是非连通的，则称 F 在 P 上是完全分离的；否则称 F 在 P 上是非完全分离的。

定义 2.10 设 $M_i\left(i=1,2\right)$ 是紧致且可定向的三维流形，P_i 是 M_i 的边界分支，F_i 是 P_i 上的子曲面，其中 $i=1,2$，设 f 为 F_1 到 F_2 的同胚映射，称 $M=M_1\cup_f M_2$ 为流形 M_1，M_2 沿 f 粘合的曲面和。

定义 2.11 设 F 是一个闭的可定向曲面，三维流形 C 可通过在 $F\times I$ 的边界分支 $F\times\{1\}$ 上添加若干个 1-把柄得到，则称三维流形 C 是压缩体。令 $\partial_- C=F\times\{0\}$，$\partial_+ C=\partial C-\partial_- C$。特别地，若 $C\cong F\times I$，称 C 是一个平凡压缩体。

定义 2.12 设 M 为三维流形，若 M 紧致且 $\partial M\neq\varnothing$，并且 ∂M 有一划分 $\left(\partial_1 M,\partial_2 M\right)$，如果压缩体 V 和 W 满足，$M=V\cup_S W$，$\partial_+ V=\partial_+ W=S$，$\partial_- V=\partial_1 M$，$\partial_- W=\partial_2 M$，则称 $V\cup_S W$ 为流形 M 的 Heegaard 分解，并将曲面 S 称为 M 的一个 Heegaard 分解曲面。Heegaard 分解曲面 S 的亏格 $g\left(S\right)$ 称为对应 Heegaard 分解 $V\cup_S W$ 的亏格。令 $g\left(M\right)=\min\left\{g\left(S\right)\mid M=V\cup_S W\right\}$，称 $g\left(M\right)$ 是流形 M 的亏格。

定义 2.13 设三维流形 M 的一个 Heegaard 分解为 $V\cup_S W$，令 $d\left(S\right)=\min\left(d\left(\alpha,\beta\right)\right)$，其中 α 是 V 中本质圆盘的边界，β 是 W 中本质圆盘的边界，则称 $d\left(S\right)$ 是 Heegaard 分解 $V\cup_S W$ 的距离。

引理 2.1 [5]设 M_1，M_2 是不可约且边界不可压缩的三维流形，$F\subset\partial M_1$，$F\subset\partial M_2$，且 $M=M_1\cup_F M_2$，M_i 的 Heegaard 分解为 $M_i=V_i\cup_{S_i} W_i$，满足 $F\subset P_i\subset\partial_- W_i$，且 $P_i\times I$ 与 S_i 不交 $\left(i=1,2\right)$。设 γ_i 为 W_i 中一段垂直的弧，使端点 $e_1\left(r_i\right)\subset\partial_+ W_i$，$e_2\left(r_1\right)=e_2\left(r_2\right)\subset\operatorname{int}F$，设 $N\left(\gamma_1\cup\gamma_2\right)$ 是 $\gamma_1\cup\gamma_2$ 的正则邻域，令 $V=V_1\cup N\left(\gamma_1\cup\gamma_2\right)\cup V_2$，$W=\overline{\left(W_1\cup W_2\right)-N\left(\gamma_1\cup\gamma_2\right)}$，则 $V\cup_S W$ 是 M 的一个 Heegaard 分解，且 $S=\partial_+ V=\partial_+ W$。

注 2.1 由引理 2.1 可知 $g\left(M\right)\le g\left(M_1\right)+g\left(M_2\right)$。

引理 2.2 [5]设 M 是由不可约且边界不可约的两个三维流形 $M_i\left(i=1,2\right)$ 沿带边曲面 F 相粘得到。设 P_i 是 ∂M_i 上包含 F 的分支，如果 $M_i\left(i=1,2\right)$ 有一个距离至少是 $2\left(g\left(M_1\right)+g\left(M_2\right)\right)+1$ 的 Heegaard 分解，则 M 对应的极小亏格 Heegaard 分解可由 M^1，M^2 和 M^* 的 Heegaard 分解沿着 P^1，P^2 进行相粘得到。

引理 2.3 [5]设 P_1，P_2 是可定向闭曲面且亏格至少为 1，将 $P_1\times I$，$P_2\times I$ 沿有界连通曲面 F 相粘的曲面和记为 M。

1) 若 $P_1\times\{0\}-\operatorname{int}F$ 和 $P_2\times\{0\}-\operatorname{int}F$ 都是连通的，则 $g\left(M\right)=\min\left\{g\left(P_1\right)+g\left(P_2\right),G\right\}$，其中 $G=\dfrac{1}{2}\left(2\chi\left(F\right)+2-\chi\left(P_1\right)-\chi\left(P_2\right)\right)+\min\left\{g\left(P_1\right),g\left(P_2\right)\right\}$。

2) 若 F 是一个平环，则 $g\left(M\right)=g\left(M_1\right)+g\left(M_2\right)$。

本文的定义和术语都是标准的，参见文献[6] [7]。

3. 可定向闭曲面加厚两类 $n\left(n\ge 3\right)$ 穿孔环面和的亏格

定理 3.1 设 $M=\left(P_1\times I\right)\cup_F\left(P_2\times I\right)$，其中 $P_i\left(i=1,2\right)$ 是亏格至少为 $n+1\left(n\ge 3\right)$ 的连通可定向闭曲面，若 F 是 $P_1\times I$ 和 $P_2\times I$ 上的不可压缩 $n\left(n\ge 3\right)$ 穿孔环面，且 F 在 $P_1\times\{0\}$ 和 $P_2\times\{0\}$ 上都是完全分离的，则 $g\left(M\right)=g\left(P_1\right)+g\left(P_2\right)$ 或 $g\left(M\right)=g\left(P_1\right)+g\left(P_2\right)-1$。

证明：令 $P_i\times\{0\}=P_i$，$P_i\times\{1\}=P^i$，其中 $i=1,2$，$\partial M=P^1\cup P^2\cup P_1^*\cup P_2^*\cup\cdots\cup P_n^*$。

设 $V\cup_S W$ 是 M 的一个极小亏格的 Heegaard 分解，由流形亏格定义知 $g\left(S\right)=g\left(M\right)$。由 F 是 n 穿孔环面得，$\chi\left(F\right)=-n$。由 $\sum_{i=1}^{n}\chi\left(P_i^*\right)=\chi\left(P_1\right)+\chi\left(P_2\right)-2\chi\left(F\right)$，得 $\sum_{i=1}^{n}g\left(P_i^*\right)=g\left(P_1\right)+g\left(P_2\right)-2$。

由平凡压缩体性质，显然有 $g\left(P_i\times I\right)=g\left(P_i\right)$，又显然有 $g\left(P_i\right)=g\left(P^i\right)$，$i=1,2$。

由引理 2.1 可知 $g\left(S\right)\le g\left(P_1\right)+g\left(P_2\right)$，若 P^1 和 P^2 在 S 的同侧，则 M 的其他边界分支均不与 P^1 在同侧，对于 M 的极小亏格的 Heegaard 分解 $M=V\cup_S W$，M 的边界分支 $P^1,P^2,P_1^*,P_2^*,\cdots,P_n^*$ 在 S 的两侧仅有如下两种情况：

1) P^1， P^2 在S的同侧。

由压缩体的性质得 $g(S)\ge g(P^1)+g(P^2)$， $g(S)\ge\sum_{i=1}^{n}g(P_i^*)$，从而 $g(S)\ge g(P_1)+g(P_2)-2$ 。故此边界分配情形存在，并且 $g(S)\ge g(P_1)+g(P_2)$ 。由引理2.1可知 $g(S)\le g(P_1)+g(P_2)$，故 $g(S)=g(P_1)+g(P_2)$ 。

2) P^1， P^2 在S的异侧。

a) 与 P^1 在Heegaard分解曲面S同侧流形M的其他边界分支亏格之和等于 $g(P_2)$，或与 P^2 在Heegaard分解曲面S同侧流形M的其他边界分支亏格之和等于 $g(P_1)$ 。

此时，由压缩体的性质得 $2g(S)\ge g(P^1)+g(P^2)+\sum_{i=1}^{n}g(P_i^*)$，从而 $g(S)\ge g(P_1)+g(P_2)$，又由引理2.1可知 $g(S)\le g(P_1)+g(P_2)$，故 $g(S)=g(P_1)+g(P_2)$ 。

b) 其他情况。

将 $\sum_{i=1}^{n}g(P_i^*)=g(P_1)+g(P_2)-2$ 代入 $2g(S)\ge g(P^1)+g(P^2)+\sum_{i=1}^{n}g(P_i^*)$ 得 $g(S)\ge g(P_1)+g(P_2)-1$ 。由引理2.1可知 $g(S)\le g(P_1)+g(P_2)$，所以 $g(P_1)+g(P_2)-1\le g(S)\le g(P_1)+g(P_2)$，又由于与 $P^1(P^2)$ 在Heegaard分解曲面S同侧流形M的其他边界分支亏格不为 $g(P_2)(g(P_1))$，故 $g(S)=g(P_1)+g(P_2)-1$ 。

综上， $g(M)=g(P_1)+g(P_2)$ 或 $g(M)=g(P_1)+g(P_2)-1$ 。

定理 3.2 设 $M=(P_1\times I)\cup_F(P_2\times I)$，其中 $P_i(i=1,2)$ 是亏格至少为 $n+1(n\ge3)$ 的连通可定向闭曲面，若 F 是 $P_1\times I$ 和 $P_2\times I$ 上的不可压缩 $n(n\ge3)$ 穿孔环面，且 F 在 $P_1\times\{0\}$ 和 $P_2\times\{0\}$ 上都是非分离的，或者 F 在 $P_1\times\{0\}$ 和 $P_2\times\{0\}$ 上一个是非分离的，另一个是完全分离的，则 $g(M)=g(P_1)+g(P_2)$ 。

证明：令 $P_i\times\{0\}=P_i$， $P_i\times\{1\}=P^i$，其中 $i=1,2$， $\partial M=P_1\cup P_2\cup P^*$ 。

设 $M=V\cup_S W$ 是 M 的一个极小亏格的 Heegaard 分解，由流形亏格定义知 $g(S)=g(M)$ 。由 F 是 n 穿孔环面得 $\chi(F)=-n$ 。由 $\chi(P^*)=\chi(P_1)+\chi(P_2)-2\chi(F)$ 得 $g(P^*)=g(P_1)+g(P_2)-(n+1)$。显然有 $g(P_i\times I)=g(P_i)$， $g(P_i)=g(P^i)$， $i=1,2$ 。

由引理 2.1 知 $g(S)\le g(P_1)+g(P_2)$。因此，若 P^1 和 P^2 在 S 的同侧，则 M 没有其他边界分支在 S 的这一侧，对于 M 的极小亏格的 Heegaard 分解 $M=V\cup_S W$，M 的边界分支 P^1， P^2， P^* 在 S 的两侧有如下两种情况：

1) P^1， P^2 在 S 的同侧。

由压缩体的性质得 $g(S)\ge g(P^*)$， $g(S)\ge g(P_1)+g(P_2)$ 。

将 $g(P^*)=g(P_1)+g(P_2)-(n+1)$ 代入 $g(S)\ge g(P^*)$，可得 $g(S)\ge g(P_1)+g(P_2)-(n+1)$，故此边界分配情形存在，并且 $g(S)\ge g(P_1)+g(P_2)$，由引理 2.1 可知 $g(S)\le g(P_1)+g(P_2)$，故 $g(S)=g(P_1)+g(P_2)$ 。

2) P^1， P^2 在 S 的异侧。

由压缩体的性质得 $g(S)\ge g(P^1)$， $g(S)\ge g(P^2)+g(P^*)$ 。

将 $g(P^*)=g(P_1)+g(P_2)-(n+1)$ 代入得 $g(S)\ge g(P^2)+g(P_1)+g(P_2)-(n+1)$，因为 $g(P^2)=g(P_2)\ge n+1$，当 $g(P_2)>n+1$ 时， $g(S)>g(P_1)+g(P_2)$，这与引理 2.1 中 $g(S)\le g(P_1)+g(P_2)$ 矛盾。当 $g(P_2)=n+1$ 时， $g(S)\ge g(P_1)+g(P_2)$，由引理 2.1 可知 $g(S)\le g(P_1)+g(P_2)$，故 $g(P_2)=n+1$ 时， $g(S)=g(P_1)+g(P_2)$ 。

综上， $g(M)=g(P_1)+g(P_2)$ 。

4. 复杂三维流形两类 $n(n\ge3)$ 穿孔环面和的亏格

定理 4.1 设 $M=M_1\cup_F M_2$，其中 $M_i(i=1,2)$ 是不可约且边界不可约的三维流形，F 是 ∂M_i 分支

$P_i(i=1,2)$上的不可压缩$n(n\geq 3)$穿孔环面。$P_i(i=1,2)$是亏格至少为$n+1(n\geq 3)$的连通可定向闭曲面，若$M_i(i=1,2)$都有距离至少为$2(g(M_1)+g(M_2))+1$的 Heegaard 分解，且 F 在$P_1\times\{0\}$和$P_2\times\{0\}$上都是完全分离的，则有$g(M)=g(M_1)+g(M_2)$或$g(M)=g(M_1)+g(M_2)-1$。

证明：令$P_i\times\{0\}=P_i$，$P_i\times\{1\}=P^i$，其中$i=1,2$，则M可表示为$M^1\cup_{P^1}M^*\cup_{P^2}M^2$，其中$M^*=\overline{(P_1\times I)\cup_F(P_2\times I)}$，$M^1=\overline{M_1\setminus(P_1\times I)}$，$M^2=\overline{M_2\setminus(P_2\times I)}$。

由定理 3.1 知，$g(M^*)=g(P_1)+g(P_2)$或$g(M^*)=g(P_1)+g(P_2)-1$。

又由引理 2.3 知，$g(M)=g(M_1)+g(M_2)+g(M^*)-g(P_1)-g(P_2)$。

故$g(M)=g(M_1)+g(M_2)$或$g(M)=g(M_1)+g(M_2)-1$。

定理 4.2 设$M=M_1\cup_F M_2$，其中$M_i(i=1,2)$是不可约且边界不可约的三维流形，F 是∂M_i分支$P_i(i=1,2)$上的不可压缩$n(n\geq 3)$穿孔环面。$P_i(i=1,2)$是亏格至少为$n+1(n\geq 3)$的连通可定向闭曲面，若$M_i(i=1,2)$都有距离至少为$2(g(M_1)+g(M_2))+1$的 Heegaard 分解，且 F 在$P_1\times\{0\}$和$P_2\times\{0\}$上都是非分离的，或者 F 在$P_1\times\{0\}$和$P_2\times\{0\}$上一个是非分离的，另一个是完全分离的，则有$g(M)=g(M_1)+g(M_2)$。

证明：令$P_i\times\{0\}=P_i$，$P_i\times\{1\}=P^i$，其中$i=1,2$，则M可表示为$M^1\cup_{P^1}M^*\cup_{P^2}M^2$，其中$M^*=\overline{(P_1\times I)\cup_F(P_2\times I)}$，$M^1=\overline{M_1\setminus(P_1\times I)}$，$M^2=\overline{M_2\setminus(P_2\times I)}$。

由定理 3.2 知，$g(M^*)=g(P_1)+g(P_2)$。

又由引理 2.3 知，$g(M)=g(M_1)+g(M_2)+g(M^*)-g(P_1)-g(P_2)$。

故$g(M)=g(M_1)+g(M_2)$。

5. 结论

本文通过三维流形组合拓扑的研究方法和技巧，给出了某些可定向闭曲面加厚两类$n(n\geq 3)$穿孔环面和的亏格为$g(M)=g(P_1)+g(P_2)$或$g(M)=g(P_1)+g(P_2)-1$，进而得出某些复杂三维流形两类$n(n\geq 3)$穿孔环面和的亏格为$g(M)=g(M_1)+g(M_2)$或$g(M)=g(M_1)+g(M_2)-1$。本文的主要结果在某些可定向闭曲面加厚穿孔球面和结论的基础上，将某些复杂三维流形的穿孔球面和推广到了$n(n\geq 3)$穿孔环面和。

参考文献

[1] Kobayashi, T. and Qiu, R.F. (2008) The Amalgamation of High Distance Heegaard Splittings Is Always Efficient. *Mathematische Annalen*, **341**, 707-715. https://doi.org/10.1007/s00208-008-0214-7

[2] Wang, S.X. and Ni, N. (2014) The Pants Sum of High Distance Heegaard Splittings. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **34**, 216-222.

[3] 王霄. 可定向闭曲面加厚的四、五穿孔球面和的亏格可加性[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2016.

[4] 冷健. 复杂三维流形两类穿孔球面和的亏格可加性[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2017.

[5] Qiu, R.F., Wang, S.C. and Zhang, M.X. (2010) The Heegaard Genera of Surface Sums. *Topology and Its Applications*, **157**, 1593-1601. https://doi.org/10.1016/j.topol.2010.02.015

[6] Hempel, J. (1976) 3-Manifolds. Princeton University Press, Princeton.

[7] Jaco, W. (1980) Lectures on Three-Manifold Topology. *Regional Conference Series in Mathematics* 43, Amer Math Soc., Providence.