Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(12), 8917-8922
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1112940

Hans汉斯

单偶数阶和幻方的一种构造方法

张宇婷*，刘兴祥#，朱雅妮#

延安大学数学与计算机科学学院，陕西 延安

收稿日期：2022年11月23日；录用日期：2022年12月16日；发布日期：2022年12月27日

摘 要

根据和幻方的定义及其性质，并通过观察研究，结合已知奇数阶和幻方及以分块矩阵为工具，给出单偶数阶和幻方的分块矩阵构造法及证明。

关键词

和幻方，分块矩阵，奇数阶和幻方，单偶数阶和幻方

A Method of Constructing a Sum Magic Square of Single Even Order

Yuting Zhang*, Xingxiang Liu#, Yani Zhu#

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi

Received: Nov. 23rd, 2022; accepted: Dec. 16th, 2022; published: Dec. 27th, 2022

Abstract

According to the definitions and properties of sum magic square, and adopted observational study, combined with the odd-order sum magic square known to us and used chunked matrix as a tool, the method of chunked matrix constructed about sum magic square of single even order is given and proved.

Keywords

Sum Magic Square, Chunked Matrix, Odd-Order Sum Magic Square, Sum Magic Square of Single Even Order

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 张宇婷, 刘兴祥, 朱雅妮. 单偶数阶和幻方的一种构造方法[J]. 应用数学进展, 2022, 11(12): 8917-8922.
DOI: 10.12677/aam.2022.1112940

1. 引言

从古至今，幻方作为一种特殊的矩阵深受广大研究者的喜爱，引发了许多人的研究。经过一代代数学家与数学爱好者的共同努力，关于幻方的研究成果已经相当丰富。文献[1] [2] [3]是关于和幻方的部分研究成果。但在深入研究的过程中，发现在和幻方构造方法中仍存在着一些问题：在已有和幻方的构造方法中，利用特殊矩阵构造和幻方的方法并不多，大部分都是具体阶数和幻方的构造方法。由此可以了解到给出一般阶数和幻方的构造方法较为困难。为了解决这类问题，可以结合分块矩阵分别找出奇数阶、单偶数阶、双偶数阶和幻方构造的方法。文中将给出单偶数阶和幻方的一种构造方法，即利用分块矩阵构造单偶数阶和幻方。

2. 预备知识

定义 1 [4] [5]设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in Z^{n\times n},n\in N^*$，若矩阵 A 满足以下条件：

① $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $E_{1j}(1,n)\left(\sum_{j=1}^{n}(A\circ E_{ij}(n,n))\right)\sum_{i=1}^{n}E_{i1}(n,1)=S_r$；

② $\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $\sum_{j=1}^{n}E_{1j}(1,n)\left(\sum_{i=1}^{n}(A\circ E_{ij}(n,n))\right)E_{i1}(n,1)=S_c$；

③ $S_r=S_c=\sum_{j=1}^{n}E_{1j}(1,n)\left(\sum_{i=1}^{n}(A\circ E_{ii})\right)\sum_{i=1}^{n}E_{i1}(n,1)=\sum_{j=1}^{n}E_{1j}(1,n)\left(\sum_{i=1}^{n}A\circ E_{i,n+1-i}\right)\sum_{i=1}^{n}E_{i1}(n,1)=S$；

则称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶和幻方，并称 S 为 n 阶和幻方 A 的幻和。

定义 2 [4] [5]设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in Z^{n\times n},n\in N^*$，若矩阵 A 满足以下条件：

① $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $E_{1j}(1,n)\left(\sum_{j=1}^{n}(A\circ E_{ij}(n,n))\right)\sum_{i=1}^{n}E_{i1}(n,1)=S_r$；

② $\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $\sum_{j=1}^{n}E_{1j}(1,n)\left(\sum_{i=1}^{n}(A\circ E_{ij}(n,n))\right)E_{i1}(n,1)=S_c$；

③ $S_r=S_c=\sum_{j=1}^{n}E_{1j}(1,n)\left(\sum_{i=1}^{n}(A\circ E_{ii})\right)\sum_{i=1}^{n}E_{i1}(n,1)=\sum_{j=1}^{n}E_{1j}(1,n)\left(\sum_{i=1}^{n}A\circ E_{i,n+1-i}\right)\sum_{i=1}^{n}E_{i1}(n,1)=S$；

④ 当 $i\neq k$ 或 $j\neq l$ 时，$\forall i,j,k,l\in\{1,2,\cdots,n\}$ 均有 $a_{ij}\neq a_{kl}$。

则称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶异元和幻方，并称 S 为 n 阶异元和幻方 A 的幻和。

定义 3 [6] [7]设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$a_{ij}\in\{1,2,\cdots,n^2\}(i,j=1,2,\cdots,n),n\in N^*$，若矩阵 A 满足以下条件：

① $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $E_{1j}(1,n)\left(\sum_{j=1}^{n}(A\circ E_{ij}(n,n))\right)\sum_{i=1}^{n}E_{i1}(n,1)=S_r$；

② $\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $\sum_{j=1}^{n}E_{1j}(1,n)\left(\sum_{i=1}^{n}(A\circ E_{ij}(n,n))\right)E_{i1}(n,1)=S_c$；

③ $S_r=S_c=\sum_{j=1}^{n}E_{1j}(1,n)\left(\sum_{i=1}^{n}(A\circ E_{ii})\right)\sum_{i=1}^{n}E_{i1}(n,1)=\sum_{j=1}^{n}E_{1j}(1,n)\left(\sum_{i=1}^{n}A\circ E_{i,n+1-i}\right)\sum_{i=1}^{n}E_{i1}(n,1)=S$；

④ 当 $i \neq k$ 或 $j \neq l$ 时，$\forall i, j, k, l \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 均有 $a_{ij} \neq a_{kl}$。

则称矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶始元和幻方，并称 S 为 n 阶始元和幻方 A 的幻和。

定义 4 [6] [7]设矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$a_{ij} \in \{a+1, a+2, \cdots, a+n^2\} (i, j = 1, 2, \cdots, n^2), n \in N^*$，若矩阵 A 满足以下条件：

① $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 有 $E_{1j}(1,n)\left(\sum_{j=1}^{n}\left(A \circ E_{ij}(n,n)\right)\right)\sum_{i=1}^{n} E_{i1}(n,1) = S_r$；

② $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 有 $\sum_{j=1}^{n} E_{1j}(1,n)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(A \circ E_{ij}(n,n)\right)\right)E_{i1}(n,1) = S_c$；

③ $S_r = S_c = \sum_{j=1}^{n} E_{1j}(1,n)\left(\sum_{i=1}^{n}(A \circ E_{ii})\right)\sum_{i=1}^{n} E_{i1}(n,1) = \sum_{j=1}^{n} E_{1j}(1,n)\left(\sum_{i=1}^{n} A \circ E_{i,n+1-i}\right)\sum_{i=1}^{n} E_{i1}(n,1) = S$；

④ 当 $i \neq k$ 或 $j \neq l$ 时，$\forall i, j, k, l \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 均有 $a_{ij} \neq a_{kl}$。

则称矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶连元和幻方，并称 S 为 n 阶连元和幻方 A 的幻和。

定义 5 [8]把一个 $m \times n$ 矩阵 A，在行的方向分成 s_p 块，在列的方向分成 t_q 块，称为 A 的 $s_p \times t_q$ 分块矩阵，记作 $A = \left[A_{s_i \times t_j}\right]_{s_p \times t_q}$，$\sum_{i=1}^{p} s_i = m$，$\sum_{j=1}^{q} t_j = n$ 其中 $A_{s_i \times t_j}\ (i = 1, 2, \cdots, p; j = 1, 2, \cdots, q)$，称为 A 的子块，它们是各种类型的小矩阵。

定义 6 [9]设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵，并且对 A, B 用同样的方法进行分块：$A = \begin{bmatrix} A_{s_1\times t_1} & A_{s_1\times t_2} & \cdots & A_{s_1\times t_q} \\ A_{s_2\times t_1} & A_{s_2\times t_2} & \cdots & A_{s_2\times t_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s_p\times t_1} & A_{s_p\times t_2} & \cdots & A_{s_p\times t_q} \end{bmatrix}$，

$$B = \begin{bmatrix} B_{s_1\times t_1} & B_{s_1\times t_2} & \cdots & B_{s_1\times t_q} \\ B_{s_2\times t_1} & B_{s_2\times t_2} & \cdots & B_{s_2\times t_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s_p\times t_1} & B_{s_p\times t_2} & \cdots & B_{s_p\times t_q} \end{bmatrix}$$

$\sum_{i=1}^{p} s_i = m$，$\sum_{j=1}^{q} t_j = n$，其中 $A_{s_i\times t_j}$，$B_{s_i\times t_j}\ (i = 1, 2, \cdots, p; j = 1, 2, \cdots, q)$ 都是 $s_i \times t_j$ 矩阵，即 $A_{s_i\times t_j}$ 和 $B_{s_i\times t_j}$ 是同型矩阵，那么

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{s_1\times t_1} + B_{s_1\times t_1} & A_{s_1\times t_2} + B_{s_1\times t_2} & \cdots & A_{s_1\times t_q} + B_{s_1\times t_q} \\ A_{s_2\times t_1} + B_{s_2\times t_1} & A_{s_2\times t_2} + B_{s_2\times t_2} & \cdots & A_{s_2\times t_q} + B_{s_2\times t_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s_p\times t_1} + B_{s_p\times t_1} & A_{s_p\times t_2} + B_{s_p\times t_2} & \cdots & A_{s_p\times t_q} + B_{s_p\times t_q} \end{bmatrix}。$$

定义 7 [10] 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，把 A 进行分块：

$$A = \begin{bmatrix} A_{s_1\times t_1} & A_{s_1\times t_2} & \cdots & A_{s_1\times t_q} \\ A_{s_2\times t_1} & A_{s_2\times t_2} & \cdots & A_{s_2\times t_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s_p\times t_1} & A_{s_p\times t_2} & \cdots & A_{s_p\times t_q} \end{bmatrix}$$

其中 $A_{s_i\times t_j}\left(i=1,2,\cdots,p;t=1,2,\cdots,q;\sum_{i=1}^{p}s_i=m;\sum_{j=1}^{q}t_j=n\right)$，$a$ 为任意数，则

$$aA=\begin{bmatrix} aA_{s_1\times t_1} & aA_{s_1\times t_2} & \cdots & aA_{s_1\times t_q} \\ aA_{s_2\times t_1} & aA_{s_2\times t_2} & \cdots & aA_{s_2\times t_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ aA_{s_p\times t_1} & aA_{s_p\times t_2} & \cdots & aA_{s_p\times t_q} \end{bmatrix}$$

3. 主要结果

定义 6 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in\left(N^*\right)^{n\times n}$，若 $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}a_{i,n+1-i}=S$，则称矩阵 A 是具有和幻性的 n 阶和幻阵，S 是 n 阶和幻阵 A 的幻和。

性质 1 若矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in\left(N^*\right)^{n\times n}$，则 $\forall a\in N^*$，存在 aA 也是具有和幻性的 n 阶和幻阵。

性质 2 若矩阵 A、B 为具有和幻性的 n 阶和矩阵，则 $\forall a,b\in N^*$，存在 $aA+bB$ 也是具有和幻性的 n 阶和幻阵。

定理 1 设矩阵 T 是一个 $2n+1$ 阶始元和幻方，

矩阵 $A_{2(2n+1)\times 2(2n+1)}=\begin{pmatrix} B_{(2n+1)\times 2} & C_{(2n+1)\times(n-1)} & D_{(2n+1)\times n} & J_{(2n+1)\times(n-1)} & K_{(2n+1)\times(n+2)} \\ F_{(2n+1)\times 2} & G_{(2n+1)\times(n-1)} & H_{(2n+1)\times n} & M_{(2n+1)\times(n-1)} & N_{(2n+1)\times(n+2)} \end{pmatrix}$，

其中

$$B=3\times\left(b_{ij}\right)_{(2n+1)\times 2}\times E_{2\times 2},\quad \left(b_{ij}=\begin{cases}1,(i+j)(\mathrm{mod}\,2)=0\\0,(i+j)(\mathrm{mod}\,2)=1\end{cases}\right);$$

$$C=3\times[1]_{(2n+1)\times(n-1)};$$

$$D=0\times[1]_{(2n+1)\times n};$$

$$F=3\times\left(f_{ij}\right)_{(2n+1)\times 2}\times E_{2\times 2},\quad \left(f_{ij}=\begin{cases}1,(i+j)(\mathrm{mod}\,2)=1\\0,(i+j)(\mathrm{mod}\,2)=0\end{cases}\right);$$

$$G=0\times[1]_{(2n+1)\times(n-1)};$$

$$H=3\times[1]_{(2n+1)\times n};$$

$$J=[1]_{(2n+1)\times(n-1)};$$

$$K=2\times[1]_{(2n+1)\times(n+2)};$$

$$M=2\times[1]_{(2n+1)\times(n-1)};$$

$$N=[1]_{(2n+1)\times(n+2)}$$

则矩阵 $P=(2n+1)^2\times A+\begin{pmatrix} T & T \\ T & T \end{pmatrix}$ 为 $4n+2$ 阶单偶数阶和幻方。

证明：要证明 P 为和幻方，则需证明矩阵 P 的每行每列的和均相等，由于单偶数阶和幻方是利用奇数阶和幻方并通过分块矩阵构造而来。奇数阶和幻方每行、每列、主对角线及副对角线的幻和是相同的，所以只要证明矩阵 A 的每行、每列、主对角线及副对角线的和均为 $3(2n+1)$ 即可。

1) 由于矩阵 A 的构造形式，在计算它的行和时可以将矩阵 A 分块为两部分来进行计算，即前 $2n+1$ 行与后 $2n+1$ 行，并分别计算这两部分每一行的行和。

前 $2n+1$ 行：矩阵 B 的每行的和为 3，矩阵 C 的每行的和为 $3(n-1)$，矩阵 D 的每行的和为 0，矩阵 E 的每行的和为 $(n-1)$，矩阵 F 的每行的和为 $2(n+2)$，所以

$S_r(i)=3+3\times(n-1)+0+(n-1)+2(n+2)=6n+3$，$(i=1,2,\cdots,2n+1)$。

后 $2n+1$ 行：矩阵 F 的每行的和为 3，矩阵 G 的每行的和为 0，矩阵 H 的每行的和为 $3n$，矩阵 M 的每行的和为 $2(n-1)$，矩阵 N 的每行的和为$(n+2)$，所以 $S_r(i)=3+0\times(n-1)+3n+2(n-1)+(n+2)=6n+3$，$(i=2n+2,2n+3,\cdots,4n+2)$。

因此在矩阵 A 中，$S_r(i)=6n+3$，$(i=1,2,\cdots,4n+2)$。

2) 由于矩阵 A 的构造形式，在计算它的列和时，可以将矩阵 A 分为五部分来进行计算，在每一部分中两个分块矩阵是同型的，则可分别计算每一部分的每一列的列和，即：

① 第 1 列及第 2 列：$B+F=3\times(c_{ij})_{(4n+2),2}\times E_{2\times 2},\left(c_{ij}=\begin{cases}1,(i+j)(\operatorname{mod}2)=0\\0,(i+j)(\operatorname{mod}2)=1\end{cases}\right)$，所以

$S_c(j)=3(2n+1)+0\times(2n+1)=6n+3$，$(j=1,2)$；

② 第 3 列至第 $(n-1)$ 列：$C+G=\begin{bmatrix}3_{(2n+1)\times(n-1)}\\0_{(2n+1)\times(n-1)}\end{bmatrix}$，所以 $S_c(j)=3(2n+1)+0\times(2n+1)=6n+3$，

$(j=3,4,\cdots,n-1)$；

③ 第 n 列至第 $2n$ 列：$D+H=\begin{bmatrix}0_{(2n+1)\times n}\\3_{(2n+1)\times n}\end{bmatrix}$，所以 $S_c(j)=0\times(2n+1)+3(2n+1)=6n+3$，

$(j=n,n+1,\cdots,2n)$；

④ 第 $(2n+1)$ 列至第 $3n$ 列：$J+M=\begin{bmatrix}1_{(2n+1)\times(n-1)}\\2_{(2n+1)\times(n-1)}\end{bmatrix}$，所以 $S_c(j)=(2n+1)+2(2n+1)=6n+3$，

$(j=2n+1,2n+2,\cdots,3n)$；

⑤ 第 $(3n+1)$ 列到第 $(4n+2)$ 列：$K+N=\begin{bmatrix}2_{(2n+1)\times(n+2)}\\1_{(2n+1)\times(n+2)}\end{bmatrix}$，所以 $S_c(j)=(2n+1)+2(2n+1)=6n+3$，

$(j=3n+1,3n+2,\cdots,4n+2)$。

因此矩阵 A 中，$S_c(j)=6n+3$，$(j=1,2,\cdots,4n+2)$。

3) $S_{md}=3(n+1)+0\times n+2(n-1)+(n+2)=6n+3$。

4) $S_{cd}=0\times(n+1)+3n+(n-1)+2(n+2)=6n+3$。

所以在矩阵 A 中，存在 $S_r=S_c=S_{md}=S_{cd}=6n+3$，那么在 $(2n+1)^2\times A$ 中也有

$S_r=S_c=S_{md}=S_{cd}=(2n+1)^2(6n+3)$。

又由于 T 是奇数阶和幻方，必存在 $S_r=S_c=S_{md}=S_{cd}=S_T$。

所以在 $P=(2n+1)^2\times A+\begin{pmatrix}T&T\\T&T\end{pmatrix}$ 中，有 $S_r=S_c=S_{md}=S_{cd}=S_P$，同时可以计算得出

$S_P=2(4n^3+6n^2+4n+1)+(6n+3)(2n+1)^2$。

根据构造的定理可以得出以下性质：

推论 1 如果一个 $4n+2$ 阶矩阵 P 是一个始元和幻方，则 P^{T} 也是一个始元和幻方。

证明：矩阵 P 的第 i 行第 j 列元素就是矩阵 P^{T} 的第 j 行第 i 列元素，即有 $[P]_{ij}=\left[P^{\mathrm{T}}\right]_{ji}$。通过矩阵的转置并未改变幻方中原有的元素，所以在矩阵 P^{T} 中的元素也是 $1\sim\left[2(2n+1)\right]^2$ 中的互不相同的数。由于矩阵的转置只是对行与列的元素进行了整体交换，并未改变矩阵中每行每列的总和，即原矩阵的行和等于现矩阵的列和，则在 P^{T} 中有 $S_r=S_c=S_{md}=S_{cd}=2\left(4n^3+6n^2+4n+1\right)+(6n+3)(2n+1)^2$。因此 P^{T} 也是一个始元和幻方，且 $S_P=2\left(4n^3+6n^2+4n+1\right)+(6n+3)(2n+1)^2$。

推论 2 如果一个 $4n+2$ 阶矩阵 P 是一个始元和幻方，令 $A=(a)_{(4n+2)(4n+2)},a\in N^*$，则 $A+P$ 是一个连元和幻方。

证明：由于 P 是一个始元和幻方，则 P 中元素互不相同，所以 $A+P$ 中的元素必然互不相同。在 $A+P$ 中，只是给原矩阵 P 中每个元素都加一个相同的数 a，所以 $A+P$ 中的每行每列的和相比矩阵 P 中的每行每列的和都增加了 $a(4n+2)$，则在 $A+P$ 中有

$S_r=S_c=S_{md}=S_{cd}=2\left(4n^3+6n^2+4n+1\right)+(6n+3)(2n+1)^2+a(4n+2)$。因此 $A+P$ 是一个连元和幻方，且 $S_{A+P}=2\left(4n^3+6n^2+4n+1\right)+(6n+3)(2n+1)^2+a(4n+2)$。

推论 3 如果一个 $4n+2$ 阶矩阵 P 是一个始元和幻方，则 $\forall a\in N^*$，aP 是一个异元和幻方。

证明：由于 P 是一个始元和幻方，则 P 中元素互不相同，所以在 aP 中的元素必然互不相同。在 aP 中，只是给原矩阵 P 中每个元素乘以一个相同的数 a，所以在 aP 中的每行每列的和都是矩阵 P 中每行每列的和的 a 倍，则在 aP 中有 $S_r=S_c=S_{md}=S_{cd}=a\left[2\left(4n^3+6n^2+4n+1\right)+(6n+3)(2n+1)^2\right]$。因此 aP 是一个异元和幻方，且 $S_{aP}=a\left[2\left(4n^3+6n^2+4n+1\right)+(6n+3)(2n+1)^2\right]$。

4. 小结

单偶数阶和幻方作为一类基本幻方，其构造方法并不唯一，本文仅仅为读者提供一种构造单偶数阶和幻方的新思路，即利用分块矩阵同时结合已知奇数阶和幻方构造单偶数阶和幻方。关于此方法是否可以构造奇数阶、双偶数阶和幻方，有待于日后再做进一步的研究。

基金项目

地区科学基金项目(12161086)。

参考文献

[1] 何敏梅, 刘兴祥. 2k+1 阶连元幻方的矩阵构造法[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2017, 36(2): 11-13+17.

[2] 郭萍, 刘兴祥, 何敏梅. 偶数阶行列和始元幻阵的构造方法[J]. 河南科学, 2018, 36(4): 482-485.

[3] Johnson, C.R. (2018) A Matrix Theoretic Construction of Magic Squares. *The American Mathematical Monthly*, **79**, 1004-1006.

[4] 郭萍, 刘兴祥. 和幻阵的定义及代数性质[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2017, 36(1): 21-27.

[5] 张婧, 刘兴祥, 施钊. 完美和幻方的定义及其构造方法[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2020, 38(4): 420-423.

[6] 董朦朦. 幻性整数矩阵的保持性与 JAD 猜想[D]: [硕士学位论文]. 延安: 延安大学, 2020.

[7] 董朦朦, 刘兴祥, 田雨禾. 幻方可以分解为两个正交拉丁方的线性组合[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2018, 32(8): 181-188.

[8] Hon, R.A. and Johnson, C.R. Matrix Analysis (卷 1) [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2005.

[9] Hon, R.A. and Johnson, C.R. Matrix Analysis (卷 2) [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2005.

[10] Hon, R.A. and Johnson, C.R. Matrix Analysis (卷 3) [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2009.