

# 定义于双曲抛物面上的多元函数切触插值问题

董相好\*, 崔利宏#, 王亚琦, 王文跃

辽宁师范大学, 辽宁 大连

收稿日期: 2022年11月23日; 录用日期: 2022年12月16日; 发布日期: 2022年12月27日

## 摘 要

对函数逼近中的多元函数切触插值问题进行研究。首先对定义于双曲抛物面上的多元切触插值给出定义, 其次, 给出了构造多元函数插值可解泛函组的添加代数曲面法, 该方法对于在计算机上以迭加方式自动完成插值可解泛函组的构造并得到插值格式提供了条件, 最后给出实际算例对算法的有效性进行了验证。

## 关键词

双曲抛物面, 可解泛函组, 多元函数切触插值, 理想

# Multivariate Interpolate Interpolation Problem Defined on a Hyperbolic Parabola

Xiangyu Dong\*, Lihong Cui#, Yaqi Wang, Wenyue Wang

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Nov. 23<sup>rd</sup>, 2022; accepted: Dec. 16<sup>th</sup>, 2022; published: Dec. 27<sup>th</sup>, 2022

## Abstract

The problem of multivariate function cut touch interpolation in function approximation is studied. Firstly, the multivariate tangent touch interpolation defined on hyperbolic paraboloids is defined, and secondly, the additive algebraic surface method for constructing multivariate function interpolation solutionable functional groups is given, which provides conditions for automatically completing the construction of interpolated solutionable functional groups in superposition on computer and obtaining the interpolation format, and finally gives actual examples to verify the effectiveness of the algorithm.

\*第一作者。

#通讯作者。

## Keywords

Hyperbolic Parabola, Suitable Functional Group, Multivariate Functions Cut to Interpolation, Ideal

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

多元函数插值在多元函数列表, 工业产品外形设计等方面的实际科研生产有诸多应用, 所以一直被作为重要内容研究[1]。多元函数插值的一个最基本的问题就是插值多项式函数的存在唯一性问题, 也就是可解性问题。直到今天, 有关这一方面的研究还是十分活跃, 国内外学者们的研究大概有两个方面: 一是当已知插值多项式空间时, 需要找到插值多项式唯一存在的插值泛函组; 二是当已知插值泛函组时, 需要找到使插值多项式唯一存在最小次数的多项式空间。在科研生产中, 虽然目前对于多元插值问题的研究比较系统, 但有些传统的插值格式构造方法还很繁琐, 单纯的依赖便携式计算器或手工计算距离达到科研生产所要求的标准相差甚远, 所以计算机是一个很高效的手段, 本文利用 MATLAB 软件对算法进行验证。

双曲抛物面[2]是二次曲面中一类重要的代数曲面, 它通过直线运动产生, 具有直纹特性, 并有两族子母线, 外观符合大众审美, 易于在建筑中实施, 且其形状不同于一般的平面形建筑。例如, 水利工程中的扭面, 利用双曲抛物面构造会使水流平顺, 水头损失减少; 现代建筑的双曲抛物面薄壳屋盖, 不仅外观新颖富有创意, 更有利于排水, 受力性能好, 建造工艺简单, 可以节约材料; 上海体育馆整体是双曲抛物面结构, 抛物曲面的特性在这里展现的淋漓尽致, 提供给观众好的视域和观赏点; 生活中的很多休闲座椅和薯片也是典型的双曲抛物面状, 可以保持结构稳定。此外, 双曲抛物面在宇宙学也有广泛应用。因此, 研究双曲抛物面上的多元切触插值问题对科研生产和日常生活都有重大意义。

## 2. 基本定义

本文主要研究定义于三维欧式空间  $\mathbb{R}^3$  的双曲抛物面  $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}$  的切触插值可解泛函组问题。

首先引入若干基本概念。

1) 定义 1 ( $\mathbb{R}^3$  中多元函数的全次数型切触插值问题[3])

设给定整数  $z_q \geq 0$ ,  $q = 1, \dots, m; m \geq 0$ ,  $A = \{Q_q\}_{q=1}^m$  是  $\mathbb{R}^3$  中  $m$  个互异点组成的集合。若给定数  $C_{q,\alpha}$ ,  $q = 1, \dots, m; m \geq 0$ ,  $|\alpha| \leq z_q$ ,  $\mathbb{P}_n^{(3)}$  中有一个多项式  $p(x, y, z)$  满足如下条件

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} p(Q_q) = C_{q,\alpha}, \quad q = 1, \dots, m; m \geq 0, \quad |\alpha| \leq z_q,$$

假定这里的  $z_q$  和  $n$  满足:  $\binom{n+3}{3} = \sum_{q=1}^m \binom{z_q+3}{3}$ 。

2) 设  $n, r$  为非负整数,  $k$  为正整数,  $\mathbb{P}_n^{(3)}$  代表关于  $x, y, z$  的全次数为  $n$  的三元多项式组成的集合, 即

$$d_{n,\mu}(k) = \binom{n+3}{3} - \binom{n-(\mu+1)k+3}{3}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3), n < (\mu+1)k \\ \frac{1}{6}(\mu+1)k(3n-(\mu+1)k)+12n+(\mu+1)^2k^2-6(\mu+1)k+11, n \geq (\mu+1)k \end{cases}$$

$$l_{n,r}(k) = \frac{1}{2}(n-rk)k(n-(r+1)k+4) + \binom{k-1}{3} + 1$$

则  $\dim \mathbb{P}_n^{(3)} = d_{n,\mu}(k)$ 。

3) 定义 2 (双曲抛物面  $F(x, y, z)$  上的  $r$  阶切触插值可解泛函组)

设  $F(x, y, z) = 2z - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$  为一个双曲抛物面, 若对于任意一个数组

$\{f_i^{(r)} \mid r=0, \dots, \mu; i=1, \dots, l_{n,r}(2)\}$ , 寻找到一个多项式  $p(x, y, z) \in \mathbb{P}_n^{(3)}$ , 有

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = f_i^{(r)}, r=0, \dots, \mu; i=1, \dots, l_{n,r}(2)$$

这个方程组总存在一组解(并不要求唯一, 以此体现出沿代数曲面进行切触插值的特点), 则称  $\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} \mid r=0, \dots, \mu; i=1, \dots, l_{n,r}(2)\}$  为沿这个曲面的一个  $n$  次  $r$  阶切触插值的可解泛函组, 简记为  $\mathcal{B} \in I_{n,r}^{(3)}(q)$  ( $I_{n,r}^{(3)}(q)$  是所有沿  $F(x, y, z) = 0$  的所有  $n$  次  $r$  阶切触插值的可解泛函组的集合)。

为了说明本文相关定理及其证明, 继续引入如下理想的相关概念:

4) 定义 3 (理想[4])

一个子集  $I \subset K[x_1, \dots, x_s]$  被称为一个理想, 如果满足如下条件:

- i)  $0 \in I$ ;
- ii) 如果  $f, g \in I$ , 则  $f + g \in I$ ;
- iii) 如果  $f \in I$  并且  $h \in K[x_1, \dots, x_s]$ , 则  $hf \in I$ 。

5) 定义 4 (根理想[5])

令  $I \subset K[x_1, \dots, x_s]$  是一个理想, 有如下这样的集合  $\{f \mid f^m \in I \text{ 对某些整数 } m \geq 1\}$ , 则有  $I$  的根理想, 用  $\sqrt{I}$  表示。

定义一叙述了全次数型切触插值问题的提法, 定义二提出了  $\mathbb{P}_n^{(3)}$  上的  $r$  阶切触插值可解泛函组的基本概念, 在这个基础上, 我们能够得出定义于双曲抛物面上的插值可解泛函组所包含的结点数以及导数信息总数之和等于插值空间的维数。为了进一步展开研究, 下面介绍构造三元多项式空间切触插值可解泛函组的添加代数曲面法, 增加  $F$  限制条件, 通过引理和相关证明最终得出构造  $F$  上插值可解泛函组的方法。

### 3. 主要成果

1) 定理 1 (沿双曲抛物面构造切触插值可解泛函组的添加代数曲面法)

令  $\Phi = \{D_{\mathfrak{A}}(Q_i) \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{A}, i=0, 1, \dots, t\}$  是关于  $\mathbb{P}_n^{(3)}$  的一个切触插值可解泛函组, 且  $\Phi$  中没有任何一个点位于如上定义的双曲抛物面  $F(x, y, z) = 0$  上。则对该曲面上一个  $n+2(\mu+1)$  次  $r$  阶切触插值可解泛函组  $\mathcal{B} = \{(Q_i^{(r)}) \mid r=0, \dots, \mu; i=1, \dots, l_{n+2(\mu+1),r}(2)\}$ , 则有  $\mathcal{B} \cup \Phi$  必构成一个关于  $\mathbb{P}_{n+2(\mu+1)}^{(3)}$  的切触插值可解泛函组。

若要证明此定理, 需先引出如下引理并加以证明。

## 2) 引理 1

如上文定义的双曲抛物面  $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}$ , 即  $F(x, y, z) = 2z - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ , 将  $k = 2$

代入, 沿曲面  $F(x, y, z) = 0$  的切触插值泛函组为

$$\mathcal{B} = \left\{ (Q_i^{(r)}) \mid r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n+2(\mu+1)r}(2) \right\}$$

的充分必要条件是: 如果存在多项式  $p(x, y, z) \in \mathbb{P}_n^{(3)}$  满足如下的齐次切触插值条件:

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = 0, \quad r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n-r}(2)$$

则一定有多项式  $r(x, y, z) \in \mathbb{P}_{n-2(\mu+1)}^{(3)}$ , 使得  $p(x, y, z) = [F(x, y, z)]^{\mu+1} \cdot r(x, y, z)$ ,

而当  $n < 2(\mu+1)$  时,  $r(x, y, z) \equiv 0$

**证明** 由文献[6]中引理 1, 这里我们只需要证明引理的必要性。

设  $\mathcal{B} = \left\{ (Q_i^{(r)}) \mid r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n+2(\mu+1)r}(2) \right\}$  是沿双曲抛物面  $F(x, y, z) = 0$  的一个  $n$  次  $r$  阶的切触插值可解泛函组, 且存在多项式  $p(x, y, z) \in \mathbb{P}_n^{(3)}$  满足

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = 0, \quad r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n-r}(2),$$

则当  $r = 0$  时, 沿双曲抛物面  $F(x, y, z) = 0$  恒有  $p(x, y, z) = 0$ 。

记  $I_1 = \langle F \rangle$ ,  $I_2 = \langle p \rangle$ 。则有  $V(I_1) \subset V(I_2)$ ,  $(V(I_1), V(I_2))$  是两个仿射簇,

即  $I(V(I_1)) \supset I(V(I_2))$ , 而  $F(x, y, z) = 0$  是无重复分量代数曲面, 故有  $I(V(I_1)) = \sqrt{I_1} = I_1$ 。

另一方面  $I(V(I_2)) = \sqrt{I_2} \supset I_2$ , 故此有  $I_1 \supset I_2$ 。由上文中理想的定义有, 存在  $r(x, y, z) \in \mathbb{P}_{n-2}^{(3)}$ , 使得  $p(x, y, z) = F(x, y, z) \cdot r(x, y, z)$ 。

假设引理的结论对正整数  $r = s$  成立, 即  $\mathcal{B} = \left\{ (Q_i^{(r)}) \mid r = 0, \dots, \mu; i = 1, \dots, l_{n+2(\mu+1)r}(2) \right\}$  为沿双曲抛物面  $F(x, y, z) = 0$  的  $n$  次  $s$  阶切触插值可解泛函组, 并满足

$$\frac{\partial^s}{\partial n^s} p(Q_i^{(r)}) = 0, \quad \forall Q_i^{(s)} \in \mathcal{B},$$

有  $p(x, y, z) = [F(x, y, z)]^{s+2} \cdot \tilde{r}(x, y, z)$  (1)

则当  $r = s+1$  时, 对上式两端求法向导数, 直到  $s+1$  阶, 并使用莱布尼茨公式, 有

$$r(Q_i^{(r)}) = 0, \quad \forall Q_i^{(r)} \in \mathcal{B}$$

而  $r(x, y, z) \in \mathbb{P}_{n-2}^{(3)}$ , 并且经过唯一确定双曲抛物面  $F(x, y, z) = 0$  的全部条件点, 由此得出沿双曲抛物面  $F(x, y, z) = 0$  恒有  $r(x, y, z) \equiv 0$ 。利用与  $r = 0$  情况类似的证法, 我们可以得出

$$r(x, y, z) = F(x, y, z) \cdot \tilde{r}(x, y, z)$$

将上述式子代入到(1)式中得到:  $p(x, y, z) = [F(x, y, z)]^{s+2} \cdot \tilde{r}(x, y, z)$

综上, 由数学归纳法得, 引理得证。

### 定理 1 的证明

只需证仅存在零多项式满足所给齐次切触插值条件。

首先全部插值的条件数为

$$\begin{aligned}
& \binom{n+3}{3} + \sum_{r=0}^{\mu} l_{n+2(\mu+1),r} \quad (2) \\
&= \binom{n+3}{3} + \sum_{r=0}^{\mu} \left( \frac{1}{2} (n+2(\mu+1)-2r) 2(n+2(\mu+1)-2(r+1)+4) + \binom{1}{3} + 1 \right) \\
&= \binom{n+3}{3} + \frac{1}{6} (\mu+1) (3(n+(\mu+1)) 22(n+2(\mu+1)-2(\mu+1)) + 12n+4(\mu+1)^2 - 12(\mu+1)+11) \\
&= \binom{n+3}{3} + \binom{n+2(\mu+1)+3}{3} - \binom{n+3}{3} \\
&= \binom{n+2(\mu+1)+3}{3}
\end{aligned}$$

这也就是多项式空间  $\mathbb{P}_{n+2(\mu+1)}^{(3)}$  的维数。

假设存在多项式  $p(x, y, z) \in \mathbb{P}_{n+2(\mu+1)}^{(3)}$  满足齐次切触插值条件, 即:

$$\mathcal{D}_{\alpha} p(Q_i) = 0, \quad \forall Q_i \in \mathcal{N} \quad \text{及} \quad \frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i) = 0, \quad \forall Q_i^{(r)} \in \mathcal{B}$$

因为  $\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i) = 0, \forall Q_i^{(r)} \in \mathcal{B}$ , 且  $\mathcal{B} \in I_{n+2(\mu+1),r}^{(3)}(F)$ ,  $p(x, y, z) \in \mathbb{P}_{n+2(\mu+1)}^{(3)}$ , 所以根据引理得存在多项式  $r(x, y, z) \in \mathbb{P}_n^{(3)}$ , 使得

$$p(x, y, z) = [F(x, y, z)]^{\mu+1} \cdot \tilde{r}(x, y, z) \quad (2)$$

将(2)式的两端求导直到  $\mu+1$  阶, 有

$$0 = \mathcal{D}_{\alpha} p(Q_i) = \mathcal{D}_{\alpha} \left\{ [F(x, y, z)]^{\mu+1} \cdot \tilde{r}(x, y, z) \right\} (Q_i), \quad \forall Q_i \in \mathcal{N}$$

由于对任意的  $Q_i \in \mathcal{N}$ ,  $f(Q_i) \neq 0$ , 则由莱布尼茨公式可得  $\mathcal{D}_{\alpha} r(Q_i) = 0, \forall Q_i \in \mathcal{N}$ 。

但  $\Phi = \{ \mathcal{D}_{\alpha} (Q_i) \mid \alpha \in \mathcal{A}, i = 0, 1, \dots, t \}$  是关于  $\mathbb{P}_n^{(3)}$  的切触插值可解泛函组, 所以有  $r(x, y, z) \equiv 0$ , 即  $p(x, y, z) \equiv 0$ , 至此, 定理得证。

#### 4. 实验算例

将被插值函数设为  $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 双曲抛物面方程为  $2z = x^2 - y^2$ , 取该双曲抛物面外一点为  $G_0^0(1, 0, 1)$ , 在此双曲抛物面上取点  $G_1^0(2, 0, 2)$ , 此时  $G_1^0$  的一阶法向导数为  $G_1^1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , 由本文定理 1 得, 泛函组  $(G_0^0, G_1^0, G_1^1)$  为双曲抛物面  $2z = x^2 - y^2$  上的一个 1 次插值可解泛函组, 如图 1 所示, 设被插值函数  $g(x, y, z)$  在此泛函组条件下的插值多项式为  $p(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z + a_4$ 。

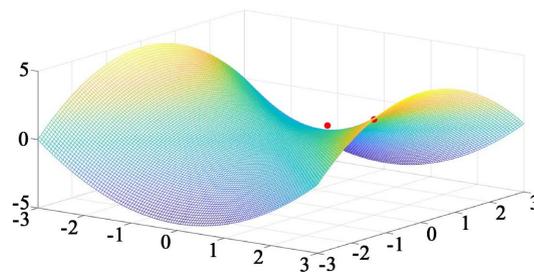


Figure 1. Rendering of hyperbolic parabolic surfaces  
图 1. 双曲抛物面取点效果图

$$\text{插值条件为: } \begin{cases} p(G_0^{(0)}) = g_0^{(0)} \\ p(G_1^{(0)}) = g_1^{(0)} \\ \frac{\partial^1 p(G_0^{(1)})}{\partial_n^1} = g_0^{(1)}, n=1 \end{cases}$$

$$\text{代入条件, 得: } \begin{cases} a_1 + a_3 + a_4 = \sqrt{2} \\ 2a_1 + 2a_3 + a_4 = 2\sqrt{2} \\ a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{解方程组, 得: } \begin{cases} a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

代入得到插值多项式为:  $p(x, y, z) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}z$ , 此时计算点  $(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8})$  在被插值函数  $g(x, y, z)$  和插值多项式  $p(x, y, z)$  处的值分别为  $\frac{\sqrt{5}}{8}$ ,  $\frac{3\sqrt{2}}{16}$ , 误差为  $m = \left| \frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{16} \right| \approx 0.0143$ 。

## 参考文献

- [1] 梁学章, 张洁琳, 崔利宏. 多元 Lagrange 插值与 Cayley-Bacharach 定理[J]. 高等学校计算数学学报, 2005(S1): 276-281.
- [2] 桂国祥, 刘雅芸. 双曲抛物面在实际生活中的应用[J]. 产业与科技论坛, 2018, 17(16): 52-53.
- [3] 崔利宏, 张洁琳, 王仁宏. 关于二元切触插值问题的某些研究[J]. 高等学校计算数学学报, 2005(S1): 282-286.
- [4] 肖水晶. 半环的实理想与半实理想[J]. 南昌大学学报(理科版), 2010, 34(6): 516-519+522.
- [5] 郑金亮, 杜先能, 操晓娟. 理想簇和根理想[J]. 大学数学, 2010, 26(3): 19-22.
- [6] 牟朝会. 关于球面切触插值问题研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2020. <https://doi.org/10.27212/d.cnki.glnsu.2020.001339>