Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(12), 8929-8935
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1112942

定义于双叶双曲面上的多元函数切触插值问题

王亚琪*，董相妤，王文跃，崔利宏#

辽宁师范大学，辽宁 大连

收稿日期：2022年11月23日；录用日期：2022年12月16日；发布日期：2022年12月27日

摘 要

针对在实际科研生产中经常涉及到的有关定义于双叶双曲面上的多元函数切触插值问题进行了研究，提出了定义于双叶双曲面上的多元函数切触插值定义，给出了判定双叶双曲面上的泛函组是否构成切触插值适定泛函组的判定定理以及插值格式的迭代构造方法，最后通过实验算例对所得方法进行了实现。

关键词

双叶双曲面，多元切触插值，插值适定泛函组

Osculatory Interpolation of Multivariate Functions Defined on Hyperboloid

Yaqi Wang*, Xiangyu Dong, Wenyue Wang, Lihong Cui#

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Nov. 23rd, 2022; accepted: Dec. 16th, 2022; published: Dec. 27th, 2022

Abstract

This paper deals with the problem of multivariate osculatory interpolation defined on hyperboloid of two sheets, which is often involved in scientific research and production. The definition of multivariate osculatory interpolation on the hyperboloid of two sheets is presented, and the judgment theorem and the iterative construction method are given to determine whether the functional group on hyperboloid of two sheets constitutes the adaptive functional group of interpolation. Finally, the obtained method is implemented by an example.

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 王亚琪, 董相妤, 王文跃, 崔利宏. 定义于双叶双曲面上的多元函数切触插值问题[J]. 应用数学进展, 2022, 11(12): 8929-8935. DOI: 10.12677/aam.2022.1112942

Keywords

Hyperboloid of Two Sheets, Multivariate Osculatory Interpolation, Interpolation Regular Functional Group

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

多元多项式切触插值是多元多项式插值中最有意义的部分，它是利用已知的插值泛函组(就是给定插值结点的同时再给定在每个插值结点处求导的方向和阶数—给定的一个微分算子)和一个多元函数，构造出一个多元多项式函数来近似表示已知的多元函数，并且两个多元函数在结点处的函数值以及方向导数值相同[1]。有关多元切触插值基本理论和方法研究中一个基本问题是切触插值多项式函数的存在唯一性问题，也就是多元切触插值的正则性问题[1]。由于这个问题直接关系到有意义切触插值多项式格式的构造，因此，有关这一问题的研究在多元插值理论中有着十分重要的地位和作用并且是近年来一个十分活跃的研究主题。

双叶双曲面是除球面外另一类主要的二次代数曲面，它在工程设计中同样有着重要的作用。例如，许多机械零部件和建筑外形采用了双曲面的形式；先进的搅拌机叶片的设计就是双叶双曲面结构——双曲面叶轮体的上表面为双曲线母线绕叶轮体轴线旋转形成的双曲面结构，其独特的叶轮结构设计，最大限度地将流体特性与机械运动相结合[2]。因此，对双叶双曲面上的插值问题研究意义重大。

2. 基本定义和命题

本文主要研究三维欧氏空间 R^3 中双叶双曲面 $F=\left\{(x,y,z)\in R^3 \left| \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0 \right.\right\}$ 上的多元切触插值问题。

首先引入若干基本概念

设 n,r 为非负整数，k 为正整数，$\mathbb{P}_n^{(3)}$ 表示全次数不超过 n 的三元多项式空间，$\mathbb{P}_{n,r}^{(3)}[q]$ 表示定义于 k 次代数曲面 $q(x,y,z)=0$ 上的且有 r 阶方向导数的全次数不超过 n 的三元多项式空间。

$$\begin{aligned}
&\dim \mathbb{P}_{n,r}^{(3)}[q(k)] \\
&=\binom{n+3}{3}-\binom{n-(\mu+1)k+3}{3} \\
&=\begin{cases}\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3), n<(\mu+1)k \\ \frac{1}{6}(\mu+1)k\left(3n(n-(\mu+1)k)+12n+k^2(\mu+1)^2-6(\mu+1)k+11\right), n\geq(\mu+1)k\end{cases} \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$l_{n,r}(k)=\frac{1}{2}(n-rk)k(n-k(r+1)+4)+\binom{k-1}{3}+1.$$

定义 1. ($\mathbb{P}_n^{(3)}$ 的全次数型切触插值)

给定整数 $z_q \ge 0, q=1,\cdots,m; m\ge 0$ 及一个结点集 $\mathcal{A}=\{Q_q\}_{q=1}^m$。$R^d$ 中的全次数型切触插值问题就是给定的数组 $C_{q,\alpha}, q=1,\cdots,m$ 及 $|\alpha|\le z_q$，寻找一个多项式 $p\in\mathbb{P}_n^{(d)}$，使之满足：

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}} p(Q_q)=C_{q,\alpha}\quad q=1,\cdots,m;|\alpha|\le z_q \tag{2}$$

这里 z_q 及 n 假定满足如下条件：

$$\binom{n+d}{d}=\sum_{q=1}^{m}\binom{z_q+d}{d} \tag{3}$$

等式(3)表示插值空间 $\mathbb{P}_n^{(d)}$ 的维数等于插值条件总数。如果 $z_q, q=1,\cdots,m$ 全部相同，则该切触插值问题被称为一致切触插值问题。

定义 2. (定义于 F 上的 r 阶切触插值适定泛函组)

设 F 为以上定义的双叶双曲面，$\mathbb{P}_{n,r}^{(3)}[F]$ 为 $\mathbb{P}_n^{(3)}$ 在 F 上的限制($\dim\mathbb{P}_n^{(3)}(F), l_{n,r}(2)$ 由 k=2 代入式(1)得到)，令 $\mathcal{B}=\{(Q_i^{(r)})|r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,l_{n,r}(2)\}$ 为 F 中的一个切触插值泛函组，如果对于任意给定的数组 $\{f_i^{(r)}|r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,l_{n,r}(2)\}$ 恒存在多项式 $p(x,y,z)\in\mathbb{P}_n^{(3)}$，使之满足

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r}p(Q_i^{(r)})=f_i^{(r)}\quad r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,l_{n,r}(2) \tag{4}$$

则称 $\mathcal{B}$ 为代数曲面 F 的一个 n 次 r 阶切触插值适定泛函组，记为 $\mathcal{B}\in I_{n,r}^{(3)}(F)$，其中 $I_{n,r}^{(3)}(F)$ 代表所有沿曲面 F 的 n 次 r 阶切触插值适定泛函组的集合。其中 $\frac{\partial^r}{\partial n^r}p(Q_i^{(r)})$ 表示 $p(x,y,z)$ 在曲面 F 上泛函组 $\mathcal{B}$ 中点 $Q_i(i=1,2,\cdots,l_{n,r}(2))$ 处沿 F 上的 r 阶法向导数。

注 1: 如果对于每一个任意给定的数组方程组 $\{f_i^{(r)}|r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,l_{n,r}(2)\}$ 方程组(2)总存在一组解 $\Leftrightarrow$ 如果存在 $p(x,y,z)\in\mathbb{P}_n^{(3)}$ 满足插值条件 $\frac{\partial^r}{\partial n^r}p(Q_i^{(r)})=0, r=0,1,\cdots,\mu;i=1,2,\cdots,l_{n,r}(2)$，蕴含曲面 F 恒有 $p(x,y,z)\equiv 0$。

定义 3. (理想)

一个子集 $I\subset K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 被称之为是一个理想，如果它满足以下三个条件：

1) $0\in I$；

2) 如果 $f,g\in I$，则 $f+g\in I$；

3) 如果 $f\in I$ 并且 $h\in K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，则 $hf\in I$。

定义 4.

若 $f_1,f_2,\cdots,f_s\in K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，且 $\langle f_1,f_2,\cdots,f_s\rangle=\left\{\sum_{i=1}^{s}h_i f_i : h_1,\cdots,h_s\in K[x_1,x_2,\cdots,x_n]\right\}$ 是 $K[x_1,x_2,\cdots,x_s]$ 中的一个理想，那么就称 $\langle f_1,f_2,\cdots,f_s\rangle$ 是由 $f_1,f_2,\cdots,f_s$ 生成的理想。

定义 5. (根理想)

令 $I\subset K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 是一个理想，I 的根理想用 $\sqrt{I}$ 表示，它是如下的集合

$$\{f\,|\,f^m\in I \text{ 对某些整数 } m\ge 1\}.$$

命题 1.

令 I 是一个理想，且设 V_1,V_2 是两个仿射簇，则有 $V_1\subset V_2\Rightarrow I(V_1)\supset I(V_2)$。

命题 2.

如果 $f \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$，$I = \langle f \rangle$ 是由 f 生成的素理想，且有 $f = f_1^{\alpha_1} \cdots f_s^{\alpha_s}$，其中 $f_1^{\alpha_1}, \cdots, f_s^{\alpha_s}$ 为不可约多项式，则有 $\sqrt{I} = \sqrt{\langle f \rangle} = \langle f_1, f_2, \cdots, f_s \rangle$。

特别地，如果 $f_i^{\alpha_i} \neq f_j^{\alpha_j}\ (i, j = 1, \cdots, s; i \neq j)$，则有 $\sqrt{I} = I$。

3. 主要定理

3.1. 定理内容

根据以上的定义以及定理，得到本文重要的定理如下：

定理 1. (构造 $\mathbb{P}_n^{(3)}$ 切触插值适定泛函组的添加双曲面法)

设 $(\mathcal{A}, D_{\mathfrak{A}})$ 是关于 $\mathbb{P}_n^{(3)}$ 的一个切触插值适定泛函组，并且 $\mathcal{A}$ 中没有任何一个点位于曲面 F 上，任取 F 上的一个 $n+(\mu+1)k$ 次 r 阶切触插值适定泛函组 $\mathcal{B} = \left\{ \left(Q_i^{(r)} \right) \middle| r = 0, \cdots, \mu; i = 1, \cdots, l_{n+2(\mu+1),r}(2) \right\}$，则 $\mathcal{B} \cup \mathcal{A}$ 必定构成关于 $\mathbb{P}_{n+2(\mu+1)}^{(3)}$ 的切触插值适定泛函组。

注 2： 定理 2 中"$\mathcal{B} \cup \mathcal{A}$"必定构成关于 $\mathbb{P}_{n+2(\mu+1)}^{(3)}$ 的切触插值适定泛函组，表示对任何给定的函数 $f(x, y, z) \in C^{\infty}(R^3)$，存在唯一一个多项式 $p(x, y, z) \in \mathbb{P}_{n+2(\mu+1)}^{(3)}$，满足：

$$D_{\mathfrak{A}} p(x, y, z)\big|_{Q_i} = D_{\mathfrak{A}} f(x, y, z)\big|_{Q_i} \quad \forall Q_i \in \mathcal{N}, \frac{\partial^r}{\partial n^r} p\left(Q_i^{(r)}\right) = f_i^{(r)}; \forall Q_i^{(r)} \in \mathcal{B}$$

3.2. 定理的证明

为了证明本章的主要结果，需要引入并证明以下引理。

3.2.1. 引理的内容

引理 1： 曲面 F 上的切触插值泛函组 $\mathcal{B} = \left\{ \left(Q_i^{(r)} \right) \middle| r = 0, \cdots, \mu; i = 1, \cdots, l_{n,r}(2) \right\}$ 能够做成沿曲面 F 的一个 n 次 r 阶切触插值适定泛函组的充分必要条件是：若存在多项式 $p(x, y, z) \in \mathbb{P}_n^{(3)}$ 满足：

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p\left(Q_i^{(r)}\right) = 0, \quad r = 0, \cdots, \mu; i = 1, \cdots, l_{n,r}(2)$$

则一定存在多项式，有

$$p(x, y, z) = \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 \right]^{\mu+1} \cdot r(x, y, z)$$

并且当 $n < 2(\mu+1)$ 时，$r(x, y, z)$ 恒为零多项式。

证明：由注 2 可知，**充分性**显然。

必要性： 设 $\mathcal{B} = \left\{ \left(Q_i^{(r)} \right) \middle| r = 0, \cdots, \mu; i = 1, \cdots, l_{n,r}(2) \right\}$ 是沿 2 次代数曲面 F 的一个 n 次 r 阶切触插值适定泛函组，且存在多项式 $p(x, y, z) \in \mathbb{P}_n^{(3)}$ 满足 $\frac{\partial^r}{\partial n^r} p\left(Q_i^{(r)}\right) = 0, r = 0, \cdots, \mu; i = 1, \cdots, l_{n,r}(2)$

则当 $r = 0$ 时，由注 1 可知沿曲面 F 恒有 $p(x, y, z) = 0$。

设 $I_1 = \langle F \rangle, I_2 = \langle p \rangle$。则有 $V(I_1) \subset V(I_2)$，即有 $I(V(I_1)) \supset I(V(I_2))$。

而 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ 是无重复分量的代数曲面，故有 $I(V(I_1)) = \sqrt{I_1} = I_1$。

另外，有 $I(V(I_2)) = \sqrt{I_2} \supset I_2$。从而有 $I_1 \supset I_2$，则由理想的定义，存在 $r(x, y, z) \in \mathbb{P}_{n-2}^{(3)}$，使得

$$p(x,y,z)=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1\right)\cdot r(x,y,z)$$

假设结论对正整数 $r=s$ 成立，即 $\mathcal{B}=\left\{\left(Q_i^{(r)}\right)\middle| r=0,\cdots,s;i=1,\cdots,l_{n,r}(2)\right\}$ 为沿曲面 F 的一个 n 次 s 阶切触插值适定泛函组，且满足

$$\frac{\partial^s}{\partial n^s}p\left(Q_i^{(r)}\right)=0,\quad \forall Q_i^{(s)}\in\mathcal{B}$$

有

$$p(x,y,z)=\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1\right]^{s+1}\cdot r(x,y,z) \tag{5}$$

则当 $r=s+1$时，对(3)式左右两端求 $s+1$阶法向导数，利用 Leibniz 公式，有

$$r\left(Q_i^{(r)}\right)=0,\quad \forall Q_i^{(r)}\in\mathcal{B}$$

而 $r(x,y,z)\in\mathbb{P}_{n-2}^{(3)}$ 且经过唯一确定曲面 F 的全部条件点，故此沿曲面 F 恒有 $r(x,y,z)\equiv 0$。

由以上过程有

$$r(x,y,z)=\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1\right]^{s+2}\cdot \tilde{r}(x,y,z)$$

代入(3)式得到：

$$p(x,y,z)=\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1\right]^{s+2}\cdot \tilde{r}(x,y,z)$$

故有数学归纳法知，引理必要性得证。 □

3.2.2. 定理 2 的证明

证明：只需证明满足所给的齐次切触插值条件的多项式只有零多项式即可。

首先定理所给的全部条件数为：

$$\begin{aligned}
&\binom{n+3}{3}+\sum_{r=0}^{\mu}l_{n+2(\mu+1),r}(2)\\
&=\binom{n+3}{3}+\sum_{r=0}^{\mu}\left(\frac{1}{2}(n+2(\mu+1)-2r)2(n+2(\mu+1)-2(r+1)+4)+\binom{k-1}{3}+1\right)\\
&=\binom{n+3}{3}+\frac{2}{6}(\mu+1)\left(6n(n+2(\mu+1))+12n+4(\mu+1)^2-12(\mu+1)+11\right)\\
&=\binom{n+3}{3}+\binom{n+2(\mu+1)+3}{3}-\binom{n+3}{3}\\
&=\binom{n+3}{3}+\binom{n+2(\mu+1)+3}{3}-\binom{n+3}{3}\\
&=\binom{n+2(\mu+1)+3}{3}=\dim\mathbb{P}_{n+2(\mu+1)}^{(3)}
\end{aligned}$$

假设存在多项式 $p(x,y,z)\in\mathbb{P}^{(3)}_{n+2(\mu+1)}$ 满足齐次切触插值条件，即有：

$$D_{\mathfrak{A}}p(Q_i)=0,\ \ \forall Q_i\in\mathcal{N};$$

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r}p\left(Q_i^{(r)}\right)=0,\ \ \forall Q_i^{(r)}\in\mathcal{B}.$$

且由 $\mathcal{B}\in I^{(3)}_{n+2(\mu+1),r}(F),\ p(x,y,z)\in\mathbb{P}^{(3)}_{n+2(\mu+1)}$，则根据引理 1 知，存在多项式 $r(x,y,z)\in\mathbb{P}^{(3)}_{n}$，满足

$$p(x,y,z)=\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1\right]^{\mu+1}\cdot\tilde{r}(x,y,z) \tag{6}$$

对(3)式两端进行 $(\mu+1)$ 阶求导，有

$$D_{\mathfrak{A}}p(Q_i)=D_{\mathfrak{A}}\left\{\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1\right]^{\mu+1}\cdot\tilde{r}(x,y,z)\right\}(Q_i)=0,\quad \forall Q_i\in\mathcal{N}$$

由于对任何 $Q_i\in\mathcal{N}$，有 $q(Q_i)\neq 0$，则由 Leibniz 公式有

$$D_{\mathfrak{A}}r(Q_i)\equiv 0,\quad \forall Q_i\in\mathcal{N}.$$

但因为 $(\mathcal{A},D_{\mathfrak{A}})$ 是关于 $\mathbb{P}^{(3)}_{n}$ 的切触插值适定泛函组，则有 $r(x,y,z)\equiv 0$，即有 $p(x,y,z)\equiv 0$。 □

4. 实验算例

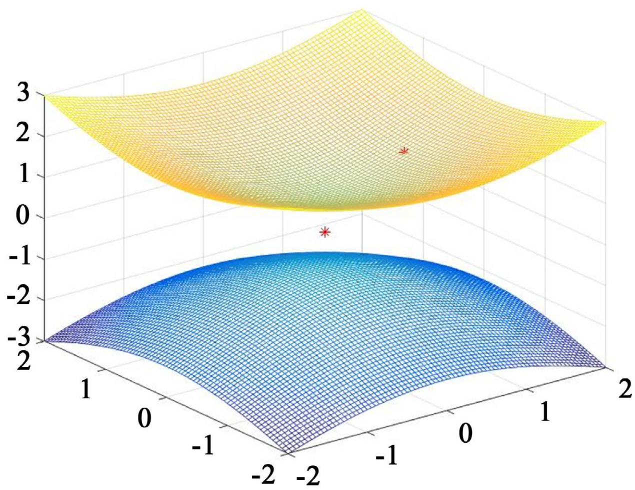

Figure 1. The effect picture of hyperboloid point taking
图 1. 双叶双曲面取点效果图

例如：取被插函数 $f_0(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，双叶双曲面 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+1$，在双叶双曲面外取一点 $Q_0^{(0)}(0,0,0)$，则该点是 $\mathbb{P}_0^{(3)}$ 的一个正则结点组；另外在双叶双曲面 F 上取一个点 $Q_1^{(0)}=\left(1,0,\sqrt{2}\right)$，并求出在这点处一阶法向导数 $Q_1^{(1)}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，则由定理 2，$\left(Q_0^{(0)},Q_1^{(0)},Q_1^{(1)}\right)$ 构成 $\mathbb{P}_1^{(3)}$ 适定泛函组。设插值多项式为

$$p(x,y,z)=a_0x+a_1y+a_2z+a_3$$

插值条件：$p\left(Q_0^{(0)}\right)=f_0^{(0)}$；$p\left(Q_1^{(0)}\right)=f_1^{(0)}$；$\frac{\partial^1}{\partial n^1}p\left(Q_1^{(1)}\right)=f_1^{(1)},n=1$。

将泛函组代入条件得到方程组：

$$\begin{cases} a_3 = 0 \\ a_0 + \sqrt{2}a_2 = \sqrt{3} \\ a_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

解方程组得到：$a_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, a_1 = 0, a_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}, a_3 = 0$；得到插值多项式：$p(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{\sqrt{6}}{3}z$。

如图 1 所示取点$\left(\dfrac{1}{10},\dfrac{1}{10},\dfrac{1}{10}\right)$，插值结果为$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{30}$，精确值为$\dfrac{\sqrt{3}}{10}$，误差为 $t = \left|\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{30} - \dfrac{\sqrt{3}}{10}\right| \approx 0.0338$。

参考文献

[1] 牟朝会. 关于球面切触插值问题研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2020.

[2] 崔利宏, 刘海波, 惠婷婷. 定义于双叶双曲面上的多元 Lagrange 插值问题[J]. 应用数学进展, 2017, 6(4): 547-552. https://doi.org/10.12677/aam.2017.64065