

一类食饵 - 捕食者随机离散时滞模型的稳定性

储家蕊, 李 艳, 廖新元*

南华大学数理学院, 湖南 衡阳

收稿日期: 2022年11月23日; 录用日期: 2022年12月16日; 发布日期: 2022年12月27日

摘 要

基于随机白噪声扰动与系统状态和平衡状态的偏差成正比, 本文提出并研究了一类随机的食饵 - 捕食者离散时滞模型。通过Lyapunov泛函及随机微分方程动力系统的相关理论, 得到了该系统正平衡状态的局部渐近均方稳定性及两个边界平衡状态的几乎确定的渐近稳定性的充分条件。理论的结果得到了数值模拟的支持。

关键词

随机食饵 - 捕食者离散模型, 渐近均方稳定, Lyapunov泛函

Stability of a Class of Prey-Predator Stochastic Discrete Model with Delay

Jiarui Chu, Yan Li, Xinyuan Liao*

School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang Hunan

Received: Nov. 23rd, 2022; accepted: Dec. 16th, 2022; published: Dec. 27th, 2022

Abstract

Based on the fact that the stochastic white noise perturbations are proportional to the deviation of the system state from the equilibrium state, a stochastic prey-predator discrete delay model is proposed and studied in this paper. By the approach of Lyapunov functional and related theories of dynamical systems of stochastic differential equations, the sufficient conditions for local asymptotic mean square stability of positive equilibrium state and almost surely asymptotic stability of two boundary equilibrium states are established. The obtained main results are supported by numerical simulations.

*通讯作者。

Keywords

Stochastic Prey-Predator Discrete Model, Asymptotic Mean Square Stability, Lyapunov Functional

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

生物系统是一个非常复杂的系统，它与人类的生存、人们的健康和社会的发展密切相关。研究生物系统的动态特性具有重要意义。捕食是物种之间的重要相互作用的活动表现，其动力性行为被广泛研究 [1] [2] [3]。在现实世界中，人口增长可以分为几个生理功能差异显著的阶段，例如幼年、成年和老年，幼年通常不具有生育能力、捕食能力和传播能力。因此，许多学者考虑具有阶段结构的种群模型 [4] [5] [6]。参考文献 [4]，我们提出并研究了以下阶段结构的具有时滞的食饵 - 捕食者微分动力系统：

$$\begin{cases} \frac{dx_j(t)}{dt} = \alpha x(t) - \gamma x_j(t) - \alpha e^{-\gamma\tau} x(t-\tau), \\ \frac{dx(t)}{dt} = \alpha e^{-\gamma\tau} x(t-\tau) - \mu_1 x(t) - mx^2(t) - \beta x(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = b\beta x(t-\tau)y(t-\tau) - \mu_2 y(t) - wy^2(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x_j(t)$ 和 $x(t)$ 分别代表时间 t 的幼年和成年食饵密度， $y(t)$ 代表时间 t 的捕食者密度。假设幼年食饵的繁殖率与现有的成年食饵种群的繁殖率成正比，其比例常数为 α ， γ 是幼年食饵种群的死亡率。时滞 τ 表示食饵种群从出生到成年的时间， $\alpha e^{-\gamma\tau} x(t-\tau)$ 表示幼年食饵种群向成年食饵种群的转变。成年食饵种群的死亡率为 μ_1 和增长率为 m ，捕食者种群的死亡率为 μ_2 和增长率为 w 。 β 为捕食系数， $b(0 < b \leq 1)$ 为捕食者捕食食饵的转化率，又称消化系数。

对于哺乳动物来说，幼年食饵隐藏在自己的巢穴中，由父母抚养，它们不需要外出觅食，因此不容易受到捕食者的攻击，也不会受随机因素的影响。因此，本文引入了以下带有时滞 k 的食饵 - 捕食者微分动力系统：

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \alpha e^{-\gamma k} u(t-k) - \mu_1 u(t) - mu^2(t) - \beta u(t)v(t), \\ \frac{dv(t)}{dt} = b\beta u(t-k)v(t-k) - \mu_2 v(t) - wv^2(t), \end{cases} \quad (2)$$

随机因素的影响在生物系统各要素之间非常常见，如人与人之间的交流，总是存在许多不确定因素。在一个生态系统中，各种随机因素的干扰无处不在，当随机因素的影响很小时，许多模型可能会忽略，但是忽略随机因素的作用可能导致相当大的偏差 [7] [8] [9]，一个合理的解释是，当外界干扰越小时，生态系统偏离平衡状态越小，各个种群之间越容易达到平衡。因此，与确定性模型相比，随机模型将更好地描述生物系统本身并反映实际问题的本质。许多学者将布朗运动作为随机因素添加到确定性生物模型中，然后利用随机微分方程理论研究随机动力学行为。参考文献 [10] [11]，对噪声的一个合理的数学解释

是所谓的白噪声，它正式被认为是布朗运动 $B(t)$ 的导数，即 $\dot{B}(t) = dB(t)/dt$ 。参考文献[12]，假设系统受到随机白噪声扰动的影响，该随机白噪声扰动与系统状态 $(u(t), v(t))$ 和平衡状态 (u^*, v^*) 的偏差成正比。当偏差越大，随机扰动也越大，当处于平衡状态时，随机扰动为零。这种随机扰动也被许多研究者所接受并应用[13][14]。于是，得到了具有时滞 k 的食饵 - 捕食者随机微动力系统：

$$\begin{cases} du(t) = [\alpha e^{-\gamma k} u(t-k) - \mu_1 u(t) - mu^2(t) - \beta u(t)v(t)]dt + \sigma_1 (u(t) - u^*)dB_1(t), \\ dv(t) = [b\beta u(t-k)v(t-k) - \mu_2 v(t) - wv^2(t)]dt + \sigma_2 (v(t) - v^*)dB_2(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\sigma_i (i=1,2)$ 表示随机白噪声扰动的强度。 $B_i(t) (i=1,2)$ 是定义在完全概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \in R^+}, P)$ 上的布朗运动。 α, β, m, w 和 $\mu_i (i=1,2)$ 是正常数， $0 < b \leq 1$ ， $\alpha e^{-\gamma k} x(t-k)$ 表示幼年食饵向成年食饵的转变，时滞 k (正整数)表示食饵从出生到成熟的时间。

大部分的随机系统都是研究连续时间情况下的模型，但是由差分方程组成的离散时间模型比连续时间模型更合适。因为实际情况下的数值模拟，离散时间模型比连续时间模型的效果更好。此外，关于差分方程描述的随机离散模型的稳定性的研究也很少。于是，本文通过 Euler-Maruyama 离散化方法[15]得到具有时滞 k 的食饵 - 捕食者随机离散系统，并研究该系统在平衡态的稳定性。

$$\begin{cases} u(n+1) = u(n) + (\alpha e^{-\gamma k} u(n-k) - \mu_1 u(n) - mu^2(n) - \beta u(n)v(n))h \\ \quad + \sigma_1 \sqrt{h} (u(n) - u^*) \xi_1(n+1), \\ v(n+1) = v(n) + (b\beta u(n-k)v(n-k) - \mu_2 v(n) - wv^2(n))h \\ \quad + \sigma_2 \sqrt{h} (v(n) - v^*) \xi_2(n+1), \end{cases} \quad (4)$$

其中 h 是步长，初始条件 $u(-k) \geq 0, v(-k) \geq 0, k = 1, 2, \dots, u(0) > 0, v(0) > 0$ ， $\xi_i(n+1) (i=1,2)$ 是一个相互独立的适应 $\{F_n \in F\}_{n \in Z}$ 的随机变量序列，且满足：

$$E \xi_i(n) = 0, E \xi_i^2(n) = 1, E \xi_i(n) \xi_j(n) = 0 (i \neq j), \quad (5)$$

其中 E 是期望。

系统(4)有两个边界平衡点：

$$E_1(0,0); E_2\left(\frac{\alpha e^{-\gamma k} - \mu_1}{m}, 0\right) \text{ 且 } \alpha e^{-\gamma k} > \mu_1;$$

和一个正平衡点：

$$E_3\left(\frac{w(\alpha e^{-\gamma k} - \mu_1) + \beta \mu_2}{mw + b\beta^2}, \frac{b\beta(\alpha e^{-\gamma k} - \mu_1) - m\mu_2}{mw + b\beta^2}\right) \text{ 且 } b\beta(\alpha e^{-\gamma k} - \mu_1) > m\mu_2。$$

本文主要研究具有时滞 k 的食饵 - 捕食者随机离散系统(4)的正平衡点和边界平衡点的稳定性。首先给出了一些定义、定理和规范形式，在正平衡状态和边界平衡状态下线性化系统(4)，分别得到了具有随机扰动的非线性差分方程在正平衡状态下的渐近均方稳定性的充分条件和边界平衡状态的几乎确定的渐近稳定性；并通过给定参数对模型进行了数值模拟验证结论的正确性。

2. 正平衡状态的渐近均方稳定性

由于本文的目的是考虑这些平衡点的稳定性，为此需将非线性的随机离散系统线性化。记正平衡点 $E_3(c_1, c_2)$ ，令 $x(n) = u(n) - c_1, y(n) = v(n) - c_2$ ：

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n) + [\alpha e^{-\gamma k} (x(n-k) + c_1) - \mu_1 (x(n) + c_1) - m(x(n) + c_1)^2 \\ \quad - \beta (x(n) + c_1)(y(n) + c_2)]h + \sigma_1 \sqrt{hx(n)} \xi_1(n+1), \\ y(n+1) = y(n) + [b\beta (x(n-k) + c_1)(y(n-k) - c_2) - \mu_2 (y(n) + c_2) \\ \quad - w(y(n) + c_2)^2]h + \sigma_2 \sqrt{hy(n)} \xi_2(n+1), \end{cases} \quad (6)$$

对平移变换后的(6)进行 Jaccobi 线性化, 得到正平衡状态下的具有时滞 k 的食饵 - 捕食者随机离散线性系统:

$$\begin{cases} x(n+1) = (1 - \mu_1 h - 2mc_1 h - \beta c_2 h)x(n) - \beta c_1 h y(n) + \alpha e^{-\gamma k} h x(n-k) \\ \quad + \sigma_1 \sqrt{hx(n)} \xi_1(n+1), \\ y(n+1) = (1 - \mu_2 h - 2wc_2 h)y(n) + b\beta c_2 h x(n-k) + b\beta c_1 h y(n-k) \\ \quad + \sigma_2 \sqrt{hy(n)} \xi_2(n+1). \end{cases} \quad (7)$$

对于边界平衡点 $E_1(0, 0)$, 令 $x(n) = u(n), y(n) = v(n)$:

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n) + [\alpha e^{-\gamma k} x(n-k) - \mu_1 x(n) - mx(n)^2 - \beta x(n)y(n)]h \\ \quad + \sigma_1 \sqrt{hx(n)} \xi_1(n+1), \\ y(n+1) = y(n) + [b\beta x(n-k)y(n-k) - \mu_2 y(n) - wy(n)^2]h \\ \quad + \sigma_2 \sqrt{hy(n)} \xi_2(n+1), \end{cases} \quad (8)$$

对平移变换后的(8)进行 Jaccobi 线性化, 得到边界平衡状态 $E_1(0, 0)$ 下的具有时滞 k 的食饵 - 捕食者随机离散线性系统:

$$\begin{cases} x(n+1) = (1 - \mu_1 h)x(n) + \alpha e^{-\gamma k} h x(n-k) + \sigma_1 \sqrt{hx(n)} \xi_1(n+1), \\ y(n+1) = (1 - \mu_2 h)y(n) + \sigma_2 \sqrt{hy(n)} \xi_2(n+1). \end{cases} \quad (9)$$

记边界平衡点 $E_2(c_0, 0)$, 令 $x(n) = u(n) - c_0, y(n) = v(n)$:

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n) + [\alpha e^{-\gamma k} (x(n-k) + c_0) - \mu_1 (x(n) + c_0) - m(x(n) + c_0)^2 \\ \quad - \beta (x(n) + c_0)y(n)]h + \sigma_1 \sqrt{hx(n)} \xi_1(n+1), \\ y(n+1) = y(n) + [b\beta (x(n-k) + c_0)y(n-k) - \mu_2 y(n) - wy(n)^2]h \\ \quad + \sigma_2 \sqrt{hy(n)} \xi_2(n+1), \end{cases} \quad (10)$$

对平移变换后的(10)进行 Jaccobi 线性化, 得到边界平衡状态 $E_2(c_0, 0)$ 下的具有时滞 k 的食饵 - 捕食者随机离散线性系统:

$$\begin{cases} x(n+1) = (1 - \mu_1 h - 2mc_0 h)x(n) - \beta c_0 h y(n) + \alpha e^{-\gamma k} h x(n-k) \\ \quad + \sigma_1 \sqrt{hx(n)} \xi_1(n+1), \\ y(n+1) = (1 - \mu_2 h)y(n) + b\beta c_0 h y(n-k) + \sigma_2 \sqrt{hy(n)} \xi_2(n+1). \end{cases} \quad (11)$$

令 $z(n) = (x(n) \ y(n))'$, 平衡状态 $E(u^*, v^*)$, 系数矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \mu_1 h - 2mu^* h - \beta v^* h & -\beta u^* h \\ 0 & 1 - \mu_2 h - 2wv^* h \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha e^{-\gamma k} h & 0 \\ b\beta v^* h & b\beta u^* h \end{pmatrix},$$

以及

$$\theta(\xi(n+1)) = \begin{pmatrix} \sigma_1 \xi_1(n+1) \sqrt{h} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \xi_2(n+1) \sqrt{h} \end{pmatrix},$$

得到规范形式:

$$z(n+1) = Az(n) + Bz(n-k) + \theta(\xi(n+1))z(n).$$

定义 2.1 对于两个对称矩阵 P 和 Q , 如果 $P > Q$, 则 $P - Q$ 是正定矩阵.

定义 2.2 对于任意 Lyapunov 函数 $V(n) = V(n, z(-k), \dots, z(0), z(1), \dots, z(n))$, 定义算子:

$$\Delta V(n) = V(n+1, z(-k), \dots, z(0), z(1), \dots, z(n+1)) - V(n, z(-k), \dots, z(0), z(1), \dots, z(n)).$$

定义 2.3 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ($E|z(0)|^2 < \delta$), 使得 $E|z(n)|^2 < \varepsilon$, 则系统(7)的零解是均方稳定的; 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} E|z(n)|^2 = 0$, 则是渐近均方稳定的.

引理 2.1 ([16]的定理 1.1) 对于线性化后的系统(4), 假设存在满足 $V(0, \phi(0)) \leq \delta_1 \|\phi\|^2$ 的非负泛函 $V_i = V_i(i, z(1), \dots, z(n))$ 和 $E\Delta V_i \leq -\delta_2 E|z(i)|^2$, 那么系统(7)的零解是渐近均方稳定的. 其中 $i \in Z, \delta_1, \delta_2$ 是正常数.

引理 2.2 ([16]的引理 1.3) Q 为正定的 $n \times n$ 矩阵, 对矩阵 $a, b \in R^n$, 有

$$a'b + b'a \leq a'Qa + b'Q^{-1}b, \tag{12}$$

其中 ' 代表转置.

定理 2.1 假设对于某个正定的 2×2 矩阵 P 和 Q , 若矩阵方程

$$-P = A'DA - D + A'QA + C + B'DB + B'D'Q^{-1}DB, \tag{13}$$

有半正定解 D , 则系统(7)的零解是渐近均方稳定的.

证明 考虑一个由 $V(n) = V_1(n) + V_2(n)$ 定义的 Lyapunov 函数, 其中 $V_1(n) = z'(n)Dz(n)$,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \text{ 均为正定对称矩阵.}$$

首先计算 $\Delta V_1(n)$ 的期望值:

$$\begin{aligned} E\Delta V_1(n) &= E(z'(n+1)Dz(n+1) - z'(n)Dz(n)) \\ &= E\left((Az(n) + Bz(n-k) + \theta(\xi(n+1))z(n))' D(Az(n) \right. \\ &\quad \left. + Bz(n-k) + \theta(\xi(n+1))z(n)) - z'(n)Dz(n) \right) \\ &= E(z'(n)(A'DA - D)z(n) + z'(n)A'DBz(n-k) + z'(n-k)B'DAz(n) \\ &\quad + z'(n-k)B'DBz(n-k) + z'(n)\theta'(\xi(n+1))D\theta(\xi(n+1))z(n)). \end{aligned}$$

通过引理 2.2, 令 $a = Az(n)$ 和 $b = DBz(n-k)$, 由(12)有

$$\begin{aligned} & z'(n)A'DBz(n-k) + z'(n-k)B'DAz(n) \\ & \leq z'(n)A'QAz(n) + z'(n-k)B'D'Q^{-1}DBz(n-k). \end{aligned}$$

根据(5), 计算 $\theta'(\xi(n+1))D\theta(\xi(n+1))$ 的期望值:

$$\begin{aligned} & E(\theta'(\xi(n+1))D\theta(\xi(n+1))) \\ &= E\left(\begin{matrix} \sigma_1\xi_1(n+1)\sqrt{h} & 0 \\ 0 & \sigma_2\xi_2(n+1)\sqrt{h} \end{matrix}\right)\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1\xi_1(n+1)\sqrt{h} & 0 \\ 0 & \sigma_2\xi_2(n+1)\sqrt{h} \end{pmatrix} \\ &= E\left(\begin{matrix} d_{11}\sigma_1^2\xi_1^2(n+1)h & d_{12}\sigma_1\sigma_2\xi_1(n+1)\xi_2(n+1)h \\ d_{12}\sigma_1\sigma_2\xi_1(n+1)\xi_2(n+1)h & d_{22}\sigma_2^2\xi_2^2(n+1)h \end{matrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} d_{11}\sigma_1^2h & 0 \\ 0 & d_{22}\sigma_2^2h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此有:

$$E\Delta V_1(n) \leq E\left(z'(n)(A'DA - D + A'QA - C)z(n) + z'(n-k)(B'DB + B'D'Q^{-1}DB)z(n-k)\right),$$

其中 $C = \begin{pmatrix} d_{11}\sigma_1^2h & 0 \\ 0 & d_{22}\sigma_2^2h \end{pmatrix}$, $B'DB + B'D'Q^{-1}DB = B'(DB + D'Q^{-1}D)B$.

现在, 设 $X(n) = z'(n)B'(DB + D'Q^{-1}D)Bz(n)$, 定义 $V_2(n) = \sum_{i=n-k}^{n-1} X(i)$. 则

$$\begin{aligned} \Delta V_2(n) &= \sum_{i=n+1-k}^n X(i) - \sum_{i=n-k}^{n-1} X(i) \\ &= X(n) - X(n-k) \\ &= z'(n)B'(DB + D'Q^{-1}D)Bz(n) \\ &\quad - z'(n-k)B'(DB + D'Q^{-1}D)Bz(n-k). \end{aligned}$$

接下来, 计算 $\Delta V(n)$ 的期望值:

$$\begin{aligned} E\Delta V(n) &= E\Delta V_1(n) + E\Delta V_2(n) \\ &\leq E\left(z'(n)(A'DA - D + A'QA - C)z(n) + z'(n-k)B'(DB + D'Q^{-1}D)Bz(n-k)\right) \\ &\quad + E\left(z'(n)B'(DB + D'Q^{-1}D)Bz(n) - z'(n-k)B'(DB + D'Q^{-1}D)Bz(n-k)\right) \\ &= E\left(z'(n)(A'DA - D + A'QA - C + B'DB + B'D'Q^{-1}DB)z(n)\right) \\ &= E\left(z'(n)(-P)z(n)\right) = -E\left(z'(n)Pz(n)\right) \\ &\leq -\delta E|z(n)|^2, \end{aligned}$$

其中 $-P = A'DA - D + A'QA + C + B'DB + B'D'Q^{-1}DB$, δ 是一个正常数. 因此得到系统(4)的零解是渐近均方稳定的.

应用定理 2.1 去分析系统(7), 系统(7)的系数矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \mu_1h - 2mc_1h - \beta c_2h & -\beta c_1h \\ 0 & 1 - \mu_2h - 2wc_2h \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha e^{-\gamma k}h & 0 \\ b\beta c_2h & b\beta c_1h \end{pmatrix},$$

求解矩阵方程(13)得到:

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= d_{11}(1-\sigma_1^2 h) - 2b\alpha\beta c_2 h^2 e^{\gamma k} d_{12} - b^2 \beta^2 c_2^2 h^2 d_{22} \\
 &\quad - \alpha^2 e^{2\gamma k} h^2 d_{11} + (d_{11} + q_{11})(\mu_1 h + 2c_1 m h + (c_1 + c_2)\beta h - 1)^2 \\
 &\quad + \frac{2b\alpha\beta c_2 h^2 d_{12}^2 q_{12} - b^2 \beta^2 c_2^2 e^{\gamma k} h^2 (d_{22}^2 q_{11} - d_{12}^2 q_{22} + 2d_{12} d_{22} q_{12})}{e^{\gamma k} (q_{11} q_{22} - q_{12}^2)}, \\
 p_{12} &= d_{12} - b^2 \beta^2 c_1 c_2 h^2 d_{22} - b\alpha\beta c_1 h^2 e^{-\gamma k} d_{12} \\
 &\quad - (d_{12} + q_{12})(\mu_2 h + 2c_2 w h - 1)(\mu_1 h + 2c_1 m h + (c_1 + c_2)\beta h - 1) \\
 &\quad - \frac{b^2 \beta^2 c_1 c_2 h^2 (d_{22}^2 q_{11} + d_{12}^2 q_{22} - 2d_{12} d_{22} q_{12})}{q_{11} q_{22} - q_{12}^2} \\
 &\quad + \frac{b\alpha\beta c_1 h^2 (d_{12}^2 q_{12} - d_{11} d_{12} q_{22} + d_{11} d_{22} q_{12} - d_{12} d_{22} q_{11})}{e^{\gamma k} (q_{11} q_{22} - q_{12}^2)}, \\
 p_{22} &= d_{22}(1-\sigma_2^2 h) - (d_{22} + q_{22})(\mu_2 h + 2c_2 w h - 1)^2 - b^2 \beta^2 c_1^2 h^2 d_{22} \\
 &\quad - \frac{b^2 \beta^2 c_1^2 h^2 (d_{22}^2 q_{11} + d_{12}^2 q_{22} - 2d_{12} d_{22} q_{12})}{q_{11} q_{22} - q_{12}^2}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

注 2.1 不难看出，系统(7)的零解的稳定性等同于线性化的系统(4)的正平衡解 (c_1, c_2) 的局部稳定性。如果在平衡点 $E_3(c_1, c_2)$ 处存在正定矩阵 P 和 Q ，以及一个半正定解 D 满足矩阵方程(13)，则系统(7)的零解是渐近均方稳定的。

理论上，可以求解 p_{11}, p_{12}, p_{22} ，然后验证是否存在正定矩阵 P 和 Q ，以及一个半正定解 D 满足矩阵方程(13)。然而，因为涉及太多的参数，所以本文只提供一个具体的例子。

设 $D = Q = I$ (单位矩阵)，选择参数 $h = 1, m = 0.1, k = 1, \gamma = \ln 2, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.1, b = 0.6518, w = 0.9058, \mu_1 = 0.0254, \mu_2 = 0.2740$ 及初始条件 $(u_{-1}, v_{-1}) = (u_0, v_0) = (0.5, 0.4)$ 。

代入系统(4)，得到正平衡点 $E_3 = (0.9482, 0.3798)$ ；系数矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 0.4052 & -0.9482 \\ 0 & 0.0380 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.2498 & 0.6237 \end{pmatrix},$$

求解矩阵方程得到 $P = \begin{pmatrix} 0.3114 & -0.1991 \\ -0.1991 & 0.3122 \end{pmatrix}$ 。

由**注 2.1**，矩阵 P 是正定的，因此系统(7)的零解是渐近均方稳定的，系统(4)的正平衡点 $E_3 = (0.9482, 0.3798)$ 是局部渐近均方稳定的。数值模拟见图 1，图中显示加入随机扰动后，系统(4)的正平衡状态收敛于 $(0.9482, 0.3798)$ 。

3. 边界平衡状态的几乎渐近稳定性

当我们用**定理 2.1** 讨论其他 2 个边界平衡点时，没有一个具有均方稳定性。当这种情况发生时，Palmer [17]通过离散化的 Itô 公式研究了线性随机差分方程的几乎确定的渐近稳定性。

定义 3.1 如果 $P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} z(n) = 0\right\} = 1$ ，则线性化的系统(4)的零解是几乎渐近稳定的。

引理 3.1 ([17]中的引理 5.3) $u(n)$ 是差分方程

$$u(n+1) = u(n) + rhu(n) + \sigma\sqrt{h}u(n)\xi(n+1),$$

的解， $n \in \mathbb{Z}, r, \sigma \in \mathbb{R}, h > 0$ 且足够小，则有以下结论：

- 1) 当且仅当 $2r - \sigma^2 < 0$ ，几乎确定的有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = 0$ ；
- 2) 当且仅当 $2r - \sigma^2 > 0$ ，几乎确定的有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = \infty$ 。

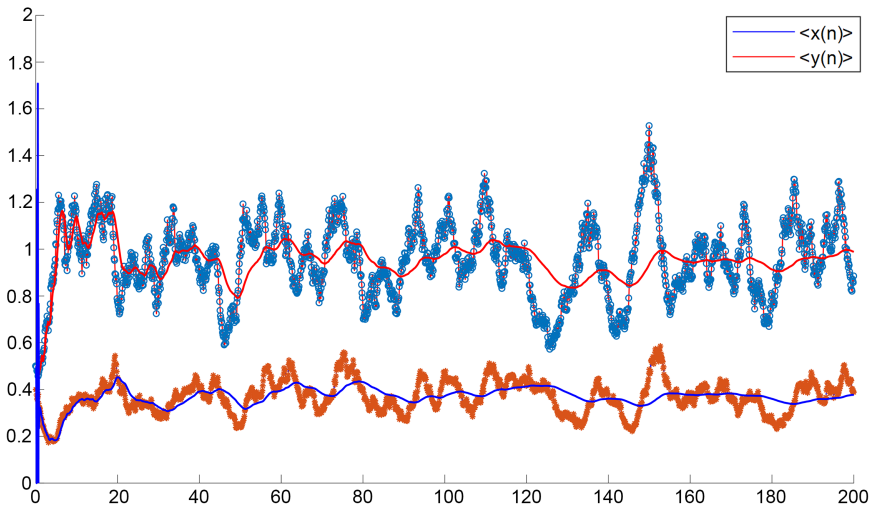


Figure 1. The positive equilibrium $E_3(c_1, c_2)$ is local asymptotically mean square stable
图 1. 正平衡状态是 $E_3(c_1, c_2)$ 局部渐近均方稳定的

考虑边界平衡点 $E_1(0, 0)$ ，对应系数矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \mu_1 h & 0 \\ 0 & 1 - \mu_2 h \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha e^{-\gamma k} h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

无法找到半正定解 D 使矩阵方程(13)成立。线性化的系统(4)为系统(9)：

$$\begin{cases} x(n+1) = (1 - \mu_1 h)x(n) + \alpha e^{-\gamma k} h x(n-k) + \sigma_1 \sqrt{h} x(n) \xi_1(n+1), \\ y(n+1) = (1 - \mu_2 h)y(n) + \sigma_2 \sqrt{h} x(n) \xi_2(n+1). \end{cases} \quad (9)$$

对系统(9)的第二个差分方程，应用引理 3.1。因为 $\mu_i (i=1, 2), \sigma_i (i=1, 2)$ 均为正常数， $-2\mu_2 - \sigma_2^2 < 0$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$ 是肯定的。

对于对系统(9)的第一个差分方程：

$$x(n+1) \leq \alpha e^{-\gamma k} h + (1 - \mu_1 h)x(n) + \sigma_1 \sqrt{h} x(n) \xi_1(n+1),$$

因为 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha e^{-\gamma k} = 0, k \in n \rightarrow \infty$ ，则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$ 。

注 3.1 若 $\alpha e^{-\gamma k} > \mu_1$ ，则系统(4)的边界平衡状态 $E_1(0, 0)$ 是几乎渐近稳定的。

选择参数： $h = 0.25, m = 0.1, k = 1, \gamma = \ln 2, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.5, b = 0.6518, w = 0.9058, \mu_1 = 0.0254, \mu_2 = 0.2740$ 及初始条件 $(u_{-1}, v_{-1}) = (u_0, v_0) = (0.5, 0.4)$ 。

数值模拟结果见图 2，系统(9)的零解是混乱且不规则的，对应的边界平衡状态 $E_1(0, 0)$ 是不稳定的。

选择参数： $h = 0.25, m = 0.1, k = 1, \gamma = \ln 2, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.9, b = 0.6518, w = 0.9058, \mu_1 = 0.2540, \mu_2 = 0.2740$ 及初始条件 $(u_{-1}, v_{-1}) = (u_0, v_0) = (0.5, 0.4)$ 。

数值模拟见图 3，系统(9)的零解收敛于 $(0, 0)$ ，对应的边界平衡状态 $E(0, 0)$ 是几乎渐近稳定的。

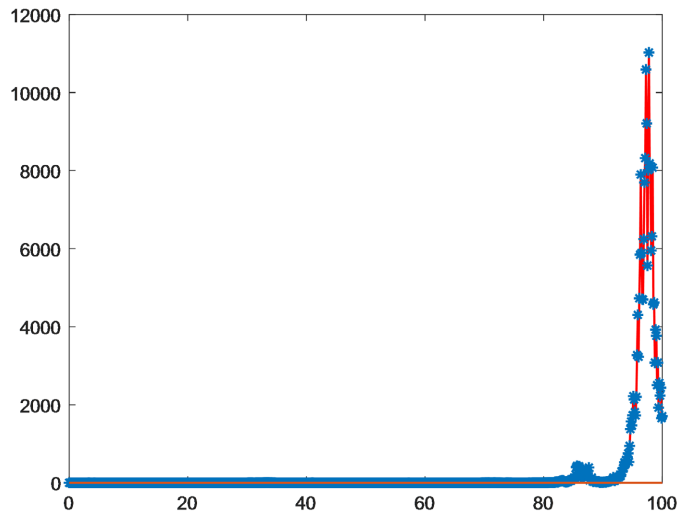


Figure 2. The boundary equilibrium state $E_1(0,0)$ is unstable

图 2. 边界平衡状态 $E_1(0,0)$ 是不稳定的

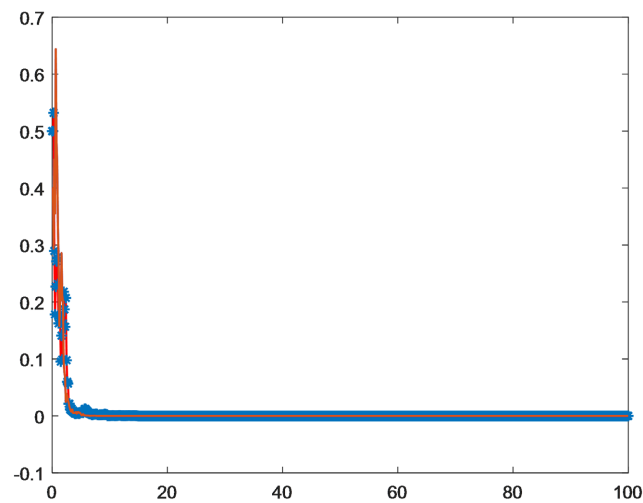


Figure 3. The boundary equilibrium state $E_1(0,0)$ is almost surely asymptotic stable

图 3. 边界平衡状态 $E_1(0,0)$ 是几乎渐近稳定的

考虑边界平衡点 $E_2(c_0, 0)$ ，对应系数矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \mu_1 h + 2mc_0 h & -\beta c_0 h \\ 0 & 1 - \mu_2 h \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha e^{-\gamma k} h & 0 \\ 0 & b\beta c_0 h \end{pmatrix},$$

无法找到半正定解 D 使矩阵方程(13)成立。线性化的系统(4)为系统(11)：

$$\begin{cases} x(n+1) = (1 - \mu_1 h - 2mc_0 h)x(n) - \beta c_0 h y(n) + \alpha e^{-\gamma k} h x(n-k) \\ \quad + \sigma_1 \sqrt{h} x(n) \xi_1(n+1), \\ y(n+1) = (1 - \mu_2 h)y(n) + b\beta c_0 h y(n-k) + \sigma_2 \sqrt{h} x(n) \xi_2(n+1). \end{cases} \quad (11)$$

对系统(11)应用引理 3.1，若 $2(-\mu_1 + mc_0) - \sigma_1^2 < 0$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$ 是肯定的。

注 3.2 若 $2(-\mu_1 + mc_0) - \sigma_1^2 < 0$ 且 $\alpha e^{-\gamma k} > \mu_1$ ，则系统(4)的边界平衡点 $E_2(c_0, 0)$ 是几乎渐近稳定的。

选择参数: $h = 0.125, m = 0.9, k = 1, \gamma = \ln 2, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.1, b = 0.6518, w = 0.9058, \mu_1 = 0.2540, \mu_2 = 0.2740$ 及初始条件 $(u_{-1}, v_{-1}) = (u_0, v_0) = (0.5, 0.4)$ 。

数值模拟结果见图 4，系统(11)的零解是混乱且不规则的，对应的边界平衡状态 $E_2(0.2733, 0)$ 是不稳定的。

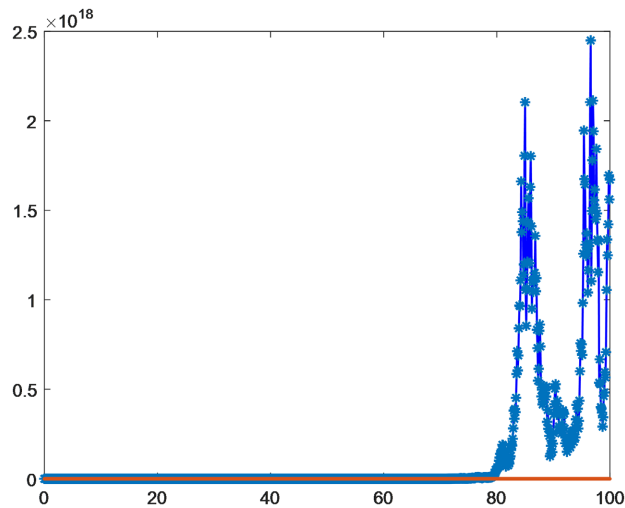


Figure 4. The boundary equilibrium state $E_2(c_0, 0)$ is unstable

图 4. 边界平衡状态 $E_2(c_0, 0)$ 是不稳定的

选择参数:

$h = 0.125, m = 0.9, k = 1, \gamma = \ln 2, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.9, b = 0.6518, w = 0.9058, \mu_1 = 0.4254, \mu_2 = 0.2740$ ，初始条件 $(u_{-1}, v_{-1}) = (u_0, v_0) = (0.5, 0.4)$ 。

进行数值模拟，结果见图 5，系统(11)的零解收敛于 $(0.083, 0)$ ，对应的边界平衡状态 $E_2(c_0, 0)$ 是几乎渐近稳定的。

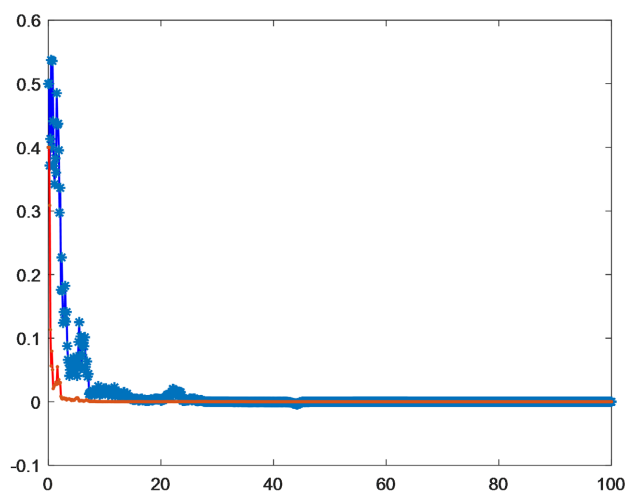


Figure 5. The boundary equilibrium state $E_2(c_0, 0)$ is almost surely asymptotic stable

图 5. 边界平衡状态 $E_2(c_0, 0)$ 是几乎渐近稳定的

4. 总结

在本文中, 提出并研究了随机的食饵 - 捕食者离散时滞模型, 并假设随机白噪声扰动与系统状态和平衡状态的偏差成正比。对于正平衡状态, 通过 Lyapunov 函数方法得到了渐近均方稳定性的充分条件。但是, 应用这种方法来获得另外两个边界平衡状态的均方稳定性似乎并不容易。对于边界平衡状态, 通过使用离散化的 Itô 公式和相关定理研究了它们的几乎确定的渐近稳定性。同时, 本文提供了一种解决随机离散时滞模型在正平衡状态下判断渐近均方稳定性问题的通用结论。获得的理论结果得到了数值模拟的有力支持。只要系统参数和白噪声强度满足我们给出的条件, 系统就会稳定在平衡状态。将来, 我们可以将随机离散模型与神经网络模型结合, 复杂神经网络加入随机扰动后, 已成为重要的研究方向。通过大量数据的拟合, 其结果也更具实际意义。

参考文献

- [1] Nindjin, A.F., Aziz-Alaoui, M.A. and Cadivel, M. (2006) Analysis of a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes with Time Delay. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **7**, 1104-1118. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2005.10.003>
- [2] Su, H., Dai, B., Chen, Y., et al. (2008) Dynamic Complexities of a Predator-Prey Model with Generalized Holling Type III Functional Response and Impulsive Effects. *Computers & Mathematics with Applications*, **56**, 1715-1725. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.04.001>
- [3] Haque, M. (2010) A Predator-Prey Model with Disease in the Predator Species Only. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 2224-2236. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.06.012>
- [4] Cai, L., Li, X., Song, X., et al. (2007) Permanence and Stability of an Age-Structured Prey-Predator System with Delays. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2007**, Article ID: 054861. <https://doi.org/10.1155/2007/54861>
- [5] Cai, L., Yu, J. and Zhu, G. (2008) A Stage-Structured Predator-Prey Model with Beddington-DeAngelis Functional Response. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **26**, 85-103. <https://doi.org/10.1007/s12190-007-0008-1>
- [6] Al-Omari, J.F.M. (2015) The Effect of State Dependent Delay and Harvesting on a Stage-Structured Predator-Prey Model. *Applied Mathematics and Computation*, **271**, 142-153. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.08.119>
- [7] Evans, L.C. (2012) An Introduction to Stochastic Differential Equations. American Mathematical Society, Providence. <https://doi.org/10.1090/mbk/082>
- [8] Lai, Y.C. (2005) Beneficial Role of Noise in Promoting Species Diversity through Stochastic Resonance. *Physical Review E*, **72**, Article ID: 042901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.042901>
- [9] May, R.M. (2019) Stability and Complexity in Model Ecosystems. Princeton University Press, Princeton. <https://doi.org/10.2307/j.ctvs32rq4>
- [10] Mao, X. (2007) Stochastic Differential Equations and Applications. Elsevier, Amsterdam. <https://doi.org/10.1533/9780857099402>
- [11] Gikhman, I.I. and Skorokhod, A.V. (2007) Stochastic Differential Equation. In: Gikhman, I.I. and Skorokhod, A.V., Eds., *The Theory of Stochastic Processes III*, Springer, Berlin, 113-219. https://doi.org/10.1007/978-3-540-49941-1_2
- [12] Shaikhet, L. (2015) Stability of Equilibrium States for a Stochastically Perturbed Exponential Type System of Difference Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **290**, 92-103. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.05.002>
- [13] Liao, X. and Chen, Y. (2019) Stability of a Stochastic Discrete Mutualism System. *Advances in Difference Equations*, **2019**, Article No. 111. <https://doi.org/10.1186/s13662-019-2056-x>
- [14] Liu, M. and Yuan, R. (2022) Stability of a Stochastic Discrete SIS Epidemic Model with General Nonlinear Incidence Rate. *Journal of Difference Equations and Applications*, **28**, 561-577. <https://doi.org/10.1080/10236198.2022.2055470>
- [15] Iacus, S.M. (2008) Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations: With R Examples (Vol. 486). Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-75839-8>
- [16] Shaikhet, L. (2011) Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Difference Equations. Springer Science & Business Media, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-685-6>
- [17] Palmer, P. (2012) Application of a Discrete Itô Formula to Determine Stability (Instability) of the Equilibrium of a Scalar Linear Stochastic Difference Equation. *Computers & Mathematics with Applications*, **64**, 2302-2311. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.03.012>