

具有非光滑解的第三类时滞Volterra积分方程的Müntz配置法

马晓华*, 胡琼方

长沙理工大学, 湖南 长沙

收稿日期: 2022年1月7日; 录用日期: 2022年2月3日; 发布日期: 2022年2月10日

摘要

本文运用Müntz配置法求解具有非光滑解的第三类时滞Volterra积分方程并给出收敛性分析。首先选取合适的分数次多项式空间作为近似解空间, 使得数值解更精准地逼近方程的解析解, 再用带权的分数次Jacobi高斯求积公式近似积分算子得到全离散格式。其次通过理论分析给出数值格式在 L_∞ 和带权 $L^2_{\omega^{\alpha,\beta,\lambda}}$ 范数下的误差估计, 最后通过数值实验验证了数值格式的谱精度。

关键词

Müntz配置法, 第三类Volterra方程, 非紧致算子, 非光滑解, 收敛性分析

Müntz Collocation Method for the Third-Kind Volterra Integral Equations with Proportional Delays and Non-Smooth Solutions

Xiaohua Ma*, Qiongfang Hu

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Jan. 7th, 2022; accepted: Feb. 3rd, 2022; published: Feb. 10th, 2022

Abstract

In this paper, the Müntz-collocation method is used to solve the third-kind Volterra integral equa-

*通讯作者。

tion with delay and the convergence analysis is given. Firstly, the proper fractional polynomial space is selected as the approximate solution space to make the numerical solution more accurately approach the analytic solution of the equation. Then, the fractional Jacobi Gaussian quadrature formula with weight is used to approximate the integral operator to get the fully discrete scheme. Secondly, the error estimations of the numerical scheme under L_∞ norm and the weighted $L_{\omega^{\alpha,\beta,\lambda}}^2$ norm are given by theoretical analysis. Finally, the spectral accuracy of the numerical scheme is verified by numerical experiments.

Keywords

The Müntz-Collocation, Third-Kind Volterra, Noncompact Operators, Non-Smooth Solutions, Convergence Analysis

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文主要考虑如下时滞第三类 Volterra 积分方程:

$$t^\nu y(t) = \int_0^{qt} (qt - \delta)^{-\mu} K(t, \delta) y(\delta) d\delta + f(t), \quad t \in I := [0, T], \quad (1)$$

其中 $\nu > 0$, $\mu \in [0, 1)$, 函数 $f(t) = t^\nu g(t)$, $f \in C(I)$, 核函数 $K(t, \delta)$ 具有分解形式

$$K(t, \delta) = \begin{cases} \delta^{\mu+\nu-1} H(t, \delta), & \mu+\nu \geq 1, \\ H(t, \delta), & \mu+\nu < 1. \end{cases}$$

Volterra 积分方程(VIEs)在生物学、控制问题、人口动力学等方面都有广泛应用, 其中基于第一、二类 Volterra 积分方程的理论和算法研究已相对成熟[1], 而第三类 Volterra 积分方程由于积分算子结构更加复杂, 研究进展相对缓慢。1910年, Evans [2]首次提出第三类 VIEs 的一般形式。然而直到 2015年, Seyed, Alleai 等学者[3]证明了第三类 VIEs 的解的存在性、唯一性、正则性后, 第三类 VIEs 才受到更多学者关注。2017年, Seyed, Alleai 等在文献[4]中采用样条配置法得到该方程的近似解。随后, 关于第三类 VIEs 的理论和算法研究得到快速发展。2019年, 宋等[5]在分片多项式空间中用配置法求解了非线性第三类 VIEs, 同年 Shayanfard 等[6]采用多步配置法求解第三类 VIEs。2020年, 蔡[7]提出基于算子分解法的谱 Legendre-Galerkin 法求解第三类 VIEs, 并给出稳定性和收敛性分析。2021年, 宋等[8]采用梯度网格求解了具有时滞项的第三类 VIEs。2021年, 马等[9]用 Chebyshev 谱配置法求解了具有非光滑解的第三类 Volterra 积分方程并给出了严格的收敛性分析, 同年马等在文献[10]中采用 Legendre 配置法求解具有非光滑解的第三类 Volterra 积分微分方程。

为了简化模型, 令 $\delta = qs$, 方程(1)可转化为

$$y(t) = \mathcal{V}_{\mu,\nu,q} y(t) + g(t), \quad t \in I := [0, 1], \quad (2)$$

其中 $\mathcal{V}_{\mu,\nu,q} y(t) = q \int_0^t t^{-\nu} (qt - qs)^{-\mu} K(t, qs) y(qs) ds$, $g(t) = t^{-\nu} f(t)$ 。从文献[4] [11]和[12]可知当 $\mu+\nu \geq 1$ 且 $H(0,0) \neq 0$ 时积分算子 $\mathcal{V}_{\mu,\nu,q}$ 是非紧致的, 然而当 $\mu+\nu < 0$ 或者当 $\mu+\nu \geq 1$ 且 $H(0,0) = 0$ 时, 积分算子 $\mathcal{V}_{\mu,\nu,q}$ 是从 $C(I)$ 到 $C(I)$ 的紧算子。

2019年, 侯等在[12]中提出了新的导数定义, 证明了分数次 Jacobi 多项式在新导数定义下能继承经典 Jacobi 多项式的基本性质, 并指出用 Müntz 配置法求解一般弱奇异 Volterra 积分方程具有显著优势. 本文基于分数次 Jacobi 多项式配置点的 Müntz 配置法求(2), 并在带权的 Sobolev 空间中研究该配置法的收敛性, 最后通过数值算例验证理论结论的有效性.

2. 预备知识及离散格式

2.1. 预备知识

为了构建分数次 Jacobi 配置法的离散格式. 我们首先引入分数次多项式空间作为近似解空间, 其次引入新的导数定义使得分数次 Jacobi 多项式能继承经典 Jacobi 多项式的基本性质, 如正交性等. 最后定义加权 Sobolev 空间下的正交投影算子和插值算子, 为第四节的收敛性分析提供理论依据.

定义 2.1 [12]定义分数次多项式空间

$$\mathbb{P}_n^\lambda(I) := \{1, t^\lambda, t^{2\lambda}, t^{3\lambda}, \dots, t^{n\lambda}\}, \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

和 n 次分数次 Jacobi 多项式

$$J_n^{\alpha, \beta, \lambda}(t) = J_n^{\alpha, \beta}(2t^\lambda - 1), \quad \forall t \in I, \quad \alpha, \beta > -1,$$

其中 $J_n^{\alpha, \beta}(t)$ 是标准 Jacobi 多项式, $J_n^{\alpha, \beta, \lambda}(t)$ 是关于权函数 $\omega^{\alpha, \beta, \lambda}(t) = \lambda(1-t^\lambda)^\alpha t^{(\beta+1)\lambda-1}$ 正交的分数次 Jacobi 多项式.

定义 2.2 [12]广义 Lagrange 基函数

$$l_{j, \lambda}^{\alpha, \beta}(t) = \prod_{i=0, i \neq j}^N \frac{t^\lambda - t_i^\lambda}{t_j^\lambda - t_i^\lambda}, \quad 0 \leq j \leq N,$$

其中 $\{t_j\}_{j=0}^N$ 是 $N+1$ 个分数次 Jacobi 高斯点. 由此广义 Lagrange 插值算子定义为 $\mathcal{I}_{N, \lambda}^{\alpha, \beta}: C(I) \rightarrow \mathbb{P}_N^\lambda(I)$

$$\mathcal{I}_{N, \lambda}^{\alpha, \beta} y(t) = \sum_{j=0}^N l_{j, \lambda}^{\alpha, \beta}(t) y(t_j).$$

定义 2.3 [12]如果 $0 < \lambda \leq 1, k \geq 1$, 则 k 次新导数 $D_\lambda^k y(t)$ 定义为

$$D_\lambda^k y(t) = \overbrace{D_\lambda^1 \cdot D_\lambda^1 \cdots D_\lambda^1}^k y(t), \quad D_\lambda^1 y(t) = \frac{d}{dt^\lambda} y(t) = \frac{t^{1-\lambda}}{\lambda} y'(t).$$

由文献[12]可知, 在新的 k 次导数定义下, 分数次 Jacobi 多项式能很好的继承经典 Jacobi 多项式的正交性. 最后, 我们定义带权 $L_{\omega^{\alpha, \beta, \lambda}}^2$ 空间及其内积和范数

$$L_{\omega^{\alpha, \beta, \lambda}}^2 = \left\{ y \mid \int_0^1 |y(t)|^2 \omega^{\alpha, \beta, \lambda}(t) dt < +\infty \right\},$$

$$(u, v)_{\omega^{\alpha, \beta, \lambda}} = \int_0^1 u(t)v(t) \omega^{\alpha, \beta, \lambda}(t) dt, \quad \|u\|_{\omega^{\alpha, \beta, \lambda}} = (u, u)_{\omega^{\alpha, \beta, \lambda}}^{\frac{1}{2}}.$$

以及分数次 Jacobi 加权 Sobolev 空间及其内积、范数和半范数

$$B_{\alpha, \beta}^{m, \lambda}(I) = \left\{ y \mid D_\lambda^k y \in L_{\omega^{\alpha+k, \beta+k, \lambda}}^2(I), 0 \leq k \leq m \right\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$(y, v)_{B_{\alpha, \beta}^{m, \lambda}} = \sum_{k=0}^m (D_\lambda^k y, D_\lambda^k v)_{\omega^{\alpha+k, \beta+k, \lambda}}, \quad \|y\|_{B_{\alpha, \beta}^{m, \lambda}} = (y, y)_{B_{\alpha, \beta}^{m, \lambda}}^{\frac{1}{2}},$$

$$|y|_{B_{\alpha, \beta}^{m, \lambda}} = \|D_\lambda^m y\|_{0, \omega^{\alpha+m, \beta+m, \lambda}} := (D_\lambda^m y, D_\lambda^m y)_{\omega^{\alpha+m, \beta+m, \lambda}}.$$

2.2. 离散格式

Müntz 配置法是将分数次多项式空间作为近似解空间, 也就是寻找 $y_N^\lambda \in \mathbb{P}_N^\lambda(I)$ 使得方程(2)在分数次 Jacobi 配置点 $\{t_i\}_{i=0}^N$ 上恒成立, 即

$$y_N^\lambda(t_i) = (\mathcal{V}_{\mu,\nu,q} y_N^\lambda)(t_i) + g(t_i), \quad i = 0, \dots, N. \quad (3)$$

为了利用分数次 Jacobi 多项式的正交性求解上述方程, 引入变量变换 $s = \tau_i(\theta) = t_i \theta^{\frac{1}{\lambda}}$, 则(3)中的积分项

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mu,\nu,q} y_N^\lambda(t_i) &= q \int_0^t t_i^{-\nu} (qt_i - qs)^{-\mu} K(t_i, qs) y_N^\lambda(qs) ds \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\lambda} t_i^{1-\mu-\nu} q^{1-\mu} \left(1 - \theta^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{-\mu} K(t_i, q\tau_i(\theta)) y_N^\lambda(q\tau_i(\theta)) \theta^{\frac{1}{\lambda}-1} d\theta \\ &=: (\bar{K}(t_i, q\tau_i(\theta)), y_N^\lambda(q\tau_i(\theta)))_{\omega^{-\mu, \phi(\mu,\nu), 1}}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\bar{K}(t, q\tau_i(\theta)) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} q^\nu \left(\frac{1-\theta^{\frac{1}{\lambda}}}{1-\theta}\right)^{-\mu} \theta^{\left[\frac{\mu+\nu}{\lambda}\right]-1} H(t, q\tau_i(\theta)), & \mu+\nu \geq 1, \\ \frac{1}{\lambda} t^{1-\mu-\nu} q^{1-\mu} \left(\frac{1-\theta^{\frac{1}{\lambda}}}{1-\theta}\right)^{-\mu} \theta^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]-1} H(t, q\tau_i(\theta)), & \mu+\nu < 1, \end{cases} \quad (5)$$

$$\phi(\mu, \nu) = \begin{cases} \frac{\mu+\nu}{\lambda} - \left[\frac{\mu+\nu}{\lambda}\right], & \mu+\nu \geq 1, \\ \frac{1}{\lambda} - \left[\frac{1}{\lambda}\right], & \mu+\nu < 1, \end{cases}$$

$[\cdot]$ 表示上取整函数。

对于给定的 $N > 0$, 设 $\{\theta_k, w_k\}_{k=0}^N$ 是 $N+1$ 个分数次 Jacobi 高斯点和相应权值, 则存在如下分数次 Jacobi-Guass 求积公式:

$$\int_0^1 f(t) \omega^{\alpha,\beta,\lambda}(t) dt \approx \sum_{k=0}^N f(\theta_k) \omega_k,$$

因此利用分数次 Jacobi-Guass 求积公式近似积分项(4), 可得

$$(\bar{K}(t_i, q\tau_i(\theta)), y_N^\lambda(q\tau_i(\theta)))_{\omega^{-\mu, \phi(\mu,\nu), 1}} \approx \sum_{k=0}^N \bar{K}(t_i, q\tau_i(\theta_k)) y_N^\lambda(q\tau_i(\theta_k)) \omega_k.$$

为了方便, 我们令

$$(\mathcal{V}_{\mu,\nu,q}^N y_N^\lambda)(t_i) := (\bar{K}(t_i, q\tau_i(\theta)), y_N^\lambda(q\tau_i(\theta)))_{N, \omega^{-\mu, \phi(\mu,\nu), 1}} \approx \sum_{k=0}^N \bar{K}(t_i, q\tau_i(\theta_k)) y_N^\lambda(q\tau_i(\theta_k)) \omega_k.$$

综上所述, 分数次 Jacobi 谱配置法的数值解 $y_N^\lambda(t) = \sum_{j=0}^N y_j^{\alpha,\beta} I_{j,\lambda}^{\alpha,\beta}(t) \in \mathbb{P}_N^\lambda(I)$ 满足全离散格式

$$y_N^\lambda(t_i) = (\mathcal{V}_{\mu,\nu,q}^N y_N^\lambda)(t_i) + g(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (6)$$

其等价矩阵形式为

$$Y = AY + F,$$

$$Y = (y_0, y_1, \dots, y_N)^T, \quad F = (g(t_0), g(t_1), \dots, g(t_N))^T,$$

$$a_{i,j} = \sum_{k=0}^N \bar{K}(t_i, q\tau_i(\theta_k)) l_{j,\lambda}^{\alpha,\beta}(q\tau_i(\theta_k)) \omega_k, \quad A = (a_{i,j})_{i,j=0}^N.$$

3. 主要引理

本节我们介绍在加权 Sobolev 空间下的投影算子、插值算子、分数次 Jacobi 多项式等概念的重要性, 以及在下节收敛性分析证明中需要用到的重要引理。

引理 3.1 [12] 如果 $-1 < \alpha, \beta \leq -\frac{1}{2}$, 那么对一切 $y \left(t^{\frac{1}{\lambda}} \right) \in B_{\alpha,\beta}^{m,1}(I)$, 有

$$\|y - \mathcal{I}_{N,\lambda}^{\alpha,\beta} y\| \leq CN^{\frac{1}{2}-m} \left\| \partial_t^m y \left(t^{\frac{1}{\lambda}} \right) \right\|_{0,\omega^{\alpha+m,\beta+m,1}},$$

$$\|D_\lambda^l (y - \mathcal{I}_{N,\lambda}^{\alpha,\beta} y)\|_{0,\omega^{\alpha+l,\beta+l,\lambda}} \leq CN^{l-m} \left\| \partial_t^m y \left(t^{\frac{1}{\lambda}} \right) \right\|_{0,\omega^{\alpha+m,\beta+m,1}}.$$

引理 3.2 [12] [13] 令 $\{l_{j,\lambda}^{\alpha,\beta}(t)\}_{j=0}^N$ 是以 $N+1$ 个分数次 Jacobi 多项式高斯点 $\{t_i\}_{i=0}^N$ 为插值基点的拉格朗日插值基函数, 则

$$\|\mathcal{I}_{N,\lambda}^{\alpha,\beta}\|_\infty = \max_{t \in I} \sum_{j=0}^N |l_{j,\lambda}^{\alpha,\beta}(t)| = \begin{cases} O(\log N), & -1 < \alpha, \beta \leq -\frac{1}{2}, \\ O(N^\lambda), & \lambda = \max\{\alpha, \beta\}, \text{其他}, \end{cases}$$

$$\|\mathcal{I}_{N,\lambda}^{\alpha,\beta}\|_{\omega^{\alpha,\beta}} = \left\| \sum_{j=0}^N y(t_j) l_{j,\lambda}^{\alpha,\beta}(t) \right\|_{\omega^{\alpha,\beta}} \leq C \|y\|_\infty.$$

引理 3.3 [12] 假设 $m > 1$, $v \in B_{\alpha,\beta}^{m,1}(I)$, 则对于分数次 Jacobi-Guass 插值有

$$\left| (y, \phi)_{\omega^{\alpha,\beta,1}} - (y, \phi)_{N,\omega^{\alpha,\beta,1}} \right| \leq CN^{-m} \|\partial_t^m y\|_{0,\omega^{\alpha+m,\beta+m,1}} \|\phi\|_{0,\omega^{\alpha,\beta,1}}, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_N^1,$$

其中 $(y, \phi)_{N,\omega^{\alpha,\beta,1}} = \sum_{k=0}^N y(t_k) \phi(t_k) \omega_k$ 。

引理 3.4 [9] 令 $L > 0$, $y(t)$ 是在 $[0, 1]$ 上的非负且局部可积函数, 若 $y(t)$ 满足

$$y(t) \leq v(t) + L \int_0^t t^{-\nu} (t-s)^{-\mu} K(t, qs) y(qs) ds,$$

则有

$$y(t) \leq v(t) + L \int_0^t t^{-\nu} (t-s)^{-\mu} K(t, qs) v(qs) ds.$$

引理 3.5 [13] 令 r 是非负整数, $\kappa \in (0, 1)$, 则存在常数 C , 使得对 $\forall y(t) \in C^{r,\kappa}(I)$, 存在函数 $\mathcal{T}_W y \in \mathbb{P}_N^1$ 满足

$$\|y - \mathcal{T}_W y\|_\infty \leq CN^{-r-\kappa} \|y\|_{r,\kappa},$$

其中 $C^{r,\kappa}$ 是指数为 κ 的 r 次 Hölder 连续函数

$$\|y\|_{r,\kappa} = \max_{0 \leq k \leq r} \max_{0 \leq s \leq 1} \left| \partial_t^k y(t) \right| + \sup_{t \neq y} \frac{|\partial_t^r y(t) - \partial_t^r y(y)|}{|t - y|^\kappa}.$$

引理 3.6 [9] 如果 $\mu < 1$, $1 - \mu - \nu + q > 0$ 并且 $0 < \kappa < \min\{1 - \mu - \nu + q, 1, 1 - \mu\}$, 则存在依赖于 $\|l(t, \cdot)\|_{0,\kappa}$ 的 C , 使得对 $\forall y(t) \in C(I)$ 满足

$$My(t) = \int_0^t (t-s)^{-\mu} t^\nu s^q l(t, qs) y(qs) ds,$$

则有

$$\left\| My \left(t^{\frac{1}{\lambda}} \right) \right\|_{0,\kappa} \leq C \|y\|_\infty.$$

4. 收敛性分析

本节研究该方法在 L_∞ 和 $L^2_{\omega^{\alpha,\beta,\lambda}}$ 空间中的误差估计. 不妨设 $e(t) = y(t) - y_N^\lambda(t)$ 为误差函数, 则方程(6)与方程(2)相减可得

$$y(t_i) - y_i = (\mathcal{V}_{\mu,\nu,q} e)(t_i) + I_i, \tag{7}$$

其中 $I_i = \mathcal{V}_{\mu,\nu,q} y(t_i) - \mathcal{V}_{\mu,\nu,q}^N y(t_i)$, 接着将方程(7)两端同乘 $I_{i,\lambda}^{\alpha,\beta}(t)$, 并将 i 从 0 到 N 求和得

$$\mathcal{I}_{N,\lambda}^{\alpha,\beta} y - y_N^\lambda = I_{N,\lambda}^{\alpha,\beta} (\mathcal{V}_{\mu,\nu,q} e)(t) + \sum_{i=0}^N I_{i,\lambda}^{\alpha,\beta}(t) I_i,$$

因此

$$e(t) = (\mathcal{V}_{\mu,\nu,q} e)(t) + \sum_{i=1}^3 E_i(t),$$

其中

$$\begin{aligned} E_1(t) &= y(t) - \mathcal{I}_{N,\lambda}^{\alpha,\beta} y(t), \quad E_2(t) = \sum_{i=0}^N I_{i,\lambda}^{\alpha,\beta}(t) I_i, \\ E_3(t) &= (\mathcal{I}_{N,\lambda}^{\alpha,\beta} - I)(\mathcal{V}_{\mu,\nu,q} e)(t). \end{aligned} \tag{8}$$

综上所述

$$|e(t)| \leq \left| \int_0^t t^{-\nu} (t-s)^{-\mu} K(t, qs) e(qs) ds \right| + \left| \sum_{i=0}^3 E_i(t) \right|. \tag{9}$$

定理 4.1 假设 $-1 < \alpha, \beta \leq -\frac{1}{2}$, 核函数 $H(t, s) \in C^m(D)$, 令 y 是问题(2)的解析解且 $y \left(t^{\frac{1}{\lambda}} \right) \in B_{\alpha,\beta}^{m+1}(I)$, y_N^λ 是采用离散格式(6)得到的近似解, 则存在常数 C , 当 N 充分大时有

$$\|y - y_N^\lambda\|_\infty \leq CN^{-m} \left(N^{\frac{1}{2}} \left\| \partial_x^m y \left(t^{\frac{1}{\lambda}} \right) \right\|_{0,\omega^{\alpha+m,\beta+m,1}} + \log NK^* \|y\|_\infty \right), \tag{10}$$

其中

$$K^* = \max_{0 \leq i \leq N} \left\| \partial_\theta^m K(t_i, q\tau_i(\cdot)) \right\|_{0,\omega^{m-\mu,m+\phi(\mu,\nu),1}}. \tag{11}$$

证明: 由引理 3.4 中的 Gronwall 不等式可得

$$\|e(t)\|_\infty \leq C \sum_{i=0}^3 \|E_i(t)\|_\infty. \tag{12}$$

由引理 3.1、引理 3.2、引理 3.3 可分别得到

$$\begin{aligned} \|E_1(t)\|_\infty &= \|y(t) - I_{N,\lambda}^{\alpha,\beta} y(t)\|_\infty \leq CN^{\frac{1}{2}-m} \left\| \partial_t^m y \left(t^{\frac{1}{\lambda}} \right) \right\|_{0,\omega^{\alpha+m,\beta+m,1}}. \\ \max_{1 \leq i \leq N} |I_i| &\leq CN^{-m} \max_{1 \leq i \leq N} \left\| \partial_\theta^m \bar{K}(t, q\tau_i(\cdot)) \right\|_{0,\omega^{-\mu-m+\phi(\mu,\nu),1}} \max_{1 \leq i \leq N} \left\| y_N^\lambda(q\tau_i(\cdot)) \right\|_{0,\omega^{-\mu,\phi(\mu,\nu),1}} \\ &\leq CN^{-m} K^* \left\| y_N^\lambda(q\tau_i(\cdot)) \right\|_\infty \leq CN^{-m} K^* (\|y\|_\infty + \|e\|_\infty), \\ \|E_2(t)\|_\infty &= \left\| \sum_{i=0}^N I_{i,\lambda}^{\alpha,\beta}(t) I_i \right\|_\infty \leq C \log NN^{-m} K^* (\|y\|_\infty + \|e\|_\infty). \end{aligned}$$

由于 E_3 中积分算子的特殊性, 我们分别讨论 $\mu + \nu \geq 1$ 和 $\mu + \nu < 1$ 两种不同的情况下 $\|E_3\|_\infty$ 的范数估计。

当 $\mu + \nu \geq 1$ 时, 因为 $H(t, s) \in C^m(D)$, 则存在 $\xi \in (-1, t)$, 满足一次 Taylor 展开式

$$H(t, qs) = H(0, 0) + \hat{H}(t, qs),$$

其中

$$\hat{H}(t, qs) = s \frac{dH(s, qs)}{ds} \Big|_{s=\xi} + (t-s) \partial_x H(\xi, qs).$$

$$\begin{aligned} E_{3,1}(t) &= (\mathcal{I}_{N,\lambda}^{\alpha,\beta} - I) \int_0^t q^\nu t^{-\nu} (t-s)^{-\mu} s^{\mu+\nu-1} H(0, 0) y(qs) ds, \\ E_{3,2}(t) &= (I - \mathcal{I}_{N,\lambda}^{\alpha,\beta}) \int_0^t q^\nu t^{-\nu} (t-s)^{-\mu} s^{\mu+\nu-1} H(0, 0) y_N^\lambda(qs) ds, \\ E_{3,3}(t) &= (\mathcal{I}_{N,\lambda}^{\alpha,\beta} - I) \int_0^t q^\nu t^{-\nu} (t-s)^{-\mu} s^{\mu+\nu-1} \hat{H}(t, qs) e(qs) ds. \end{aligned}$$

则有

$$E_3 = \sum_{i=1}^3 E_{3,i}(t), \tag{13}$$

接着根据引理 3.1 和 Hardy 不等式, 参考文献[12]可以得到

$$\begin{aligned} \|E_{3,1}(t)\|_\infty &\leq CN^{\frac{1}{2}-m} \left\| q^\nu \partial_t^m \int_0^t \left(t^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{-\nu} \left(t^{\frac{1}{\lambda}} - s \right)^{-\mu} s^{\mu+\nu-1} H(0, 0) y(qs) ds \right\|_{0,\omega^{\alpha+m,\beta+m,1}} \\ &\leq CN^{\frac{1}{2}-m} \left\| \frac{q^\nu}{\lambda} \int_0^1 \left(1 - \theta^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{-\mu} \theta^{\frac{\mu+\nu}{\lambda}-1} H(0, 0) \partial_t^m y \left(qt^{\frac{1}{\lambda}} \theta^{\frac{1}{\lambda}} \right) d\theta \right\|_{0,\omega^{\alpha+m,\beta+m,1}} \\ &\leq CN^{\frac{1}{2}-m} \left\| \frac{q^{\nu+\frac{m}{\lambda}}}{\lambda} \int_0^1 \left(1 - \theta^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{-\mu} \theta^{\frac{\mu+\nu}{\lambda}+m-1} H(0, 0) \partial_\tau^m y \left(\tau^{\frac{1}{\lambda}} \right) d\theta \right\|_{0,\omega^{\alpha+m,\beta+m,1}} \\ &\leq CN^{\frac{1}{2}-m} \left\| \partial_t^m y \left(t^{\frac{1}{\lambda}} \right) \right\|_{0,\omega^{\alpha+m,\beta+m,1}}. \end{aligned} \tag{14}$$

又因为 $\int_0^t q^\nu t^{-\nu} (t-s)^{-\mu} s^{\mu+\nu-1} H(0, 0) y_N^\lambda(qs) ds \in \mathbb{P}_N^\lambda(I)$, 所以

$$\|E_{3,2}(t)\|_\infty = 0. \tag{15}$$

因为

$$\begin{aligned} \hat{M}e(t) &= \int_0^t t^{-\nu} (t-s)^{-\mu} s^{\mu+\nu-1} \hat{H}(t,qs) e(qs) ds \\ &= \int_0^t t^{-\nu} (t-s)^{-\mu} s^{\mu+\nu-1} \frac{H(t,qs)}{ds} \Big|_{s=\eta} e(qs) ds \\ &\quad + \int_0^t t^{-\nu} (t-s)^{-\mu} s^{\mu+\nu-1} \partial_x H(\xi, s) e(qs) ds, \end{aligned}$$

接着我们令 $\kappa_1 = 1 - \alpha$ ，再由引理 3.2、引理 3.5 和引理 3.6 可得

$$\begin{aligned} \|E_{3,3}(t)\|_\infty &= \max_{t \in I} |(\mathcal{I}_{N,\lambda}^{\alpha,\beta} - I)(\hat{M}e)(t)| = \max_{z^{\frac{1}{\lambda}} = t \in I} |(\mathcal{I}_{N,1}^{\alpha,\beta} - I)(\hat{M}e)\left(z^{\frac{1}{\lambda}}\right)| \\ &= \left\| (\mathcal{I}_{N,1}^{\alpha,\beta} - I)(\hat{M}e)\left(z^{\frac{1}{\lambda}}\right) \right\|_\infty = \left\| (\mathcal{I}_{N,1}^{\alpha,\beta} - I)(I - \mathcal{T}_w)(\hat{M}e)\left(z^{\frac{1}{\lambda}}\right) \right\|_\infty \\ &\leq C \left(\|\mathcal{I}_{N,1}^{\alpha,\beta}\|_\infty + 1 \right) \left\| (I - \mathcal{T}_w)(\hat{M}e)\left(z^{\frac{1}{\lambda}}\right) \right\|_\infty \leq C \log NN^{-\kappa_1} \left\| (\hat{M}e)\left(z^{\frac{1}{\lambda}}\right) \right\|_{0,\kappa_1} \\ &\leq C \log NN^{-\kappa_1} \|e\|_\infty. \end{aligned} \tag{16}$$

最后，由(14)、(15)和(16)可知

$$\|E_3(t)\|_\infty \leq C \sum_{k=1}^3 \|E_{3,k}(t)\|_\infty \leq CN^{\frac{1}{2}-m} \left\| \partial_t^m y\left(t^{\frac{1}{\lambda}}\right) \right\|_{0,\omega^{\alpha+m,\beta+m,1}} + C \log NN^{-\kappa_1} \|e\|_\infty.$$

当 $\mu + \nu < 1$ 时，相比于 $\mu + \nu \geq 1$ 情况下的积分算子，此情况下的积分算子构造较为简单，令 $\kappa_2 = 1 - \mu - \nu$ ，类似(16)的证明可得

$$\|E_3(t)\|_\infty \leq C \log NN^{-\kappa_2} \left\| (\mathcal{V}_{\mu,\nu} e)\left(z^{\frac{1}{\lambda}}\right) \right\|_{0,\kappa_2} \leq C \log NN^{-\kappa_2} \|e\|_\infty,$$

通过上述证明过程，我们得到(10)式中的误差估计。

不失一般性，类似文献[9]定理 4.2 的证明过程可得(2.4)在加权 $L^2_{\omega^{\alpha,\beta,\lambda}}$ 范数下的误差估计。

定理 4.2 假设 $-1 < \alpha, \beta \leq -\frac{1}{2}$ ，核函数 $H(t,s) \in C^m(D)$ ，假设 y 是问题(2)的解析解且 $y\left(t^{\frac{1}{\lambda}}\right) \in B_{\alpha,\beta}^{m,1}(I)$ ， y_N^λ 是采用离散格式(6)得到的近似解，则存在常数 C ，当 N 充分大时有

$$\|y - y_N^\lambda\|_{0,\omega^{\alpha,\beta,\lambda}} \leq CN^{-m} \left[\left(1 + N^{\frac{1}{2}-\kappa_*} \right) \left\| \partial_t^m y\left(t^{\frac{1}{\lambda}}\right) \right\|_{0,\omega^{\alpha+m,\beta+m,1}} + K^* \|y\|_\infty \right], \tag{17}$$

其中

$$\kappa_* = \begin{cases} 1 - \mu, & \mu + \nu \geq 1, \\ 1 - \mu - \nu, & \mu + \nu < 1, \end{cases}$$

K^* 的定义和(11)一致。

5. 数值实验

考虑以下形式的方程:

$$t^{\frac{4}{3}}y(t) = \int_0^{0.5t} (0.5t - \delta)^{-\frac{1}{2}} \delta^{\frac{5}{6}} y(\delta) d\delta + t^3 - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{8\Gamma(4)} t^3, \tag{18}$$

其中 $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{4}{3}$, $K(t, \delta) = \delta^{\frac{5}{6}}$, 精确解为 $y(t) = t^{\frac{5}{3}}$ 。由于该方程具有非光滑解, 对此我们通过选取参数 λ 的值, 使得数值解更加接近解析解。首先分别选取 $\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 比较参数 λ 在不同取值下对方程求解的影响。其次选择权指标 $\alpha = \beta = -0.6$, 分别计算 L_∞ 和带权 $L^2_{\omega^{-0.6, -0.6, \lambda}}$ 范数下的误差。通过误差表 1, 表 2, 可以看出 $\lambda = 1, N = 24$ 时 L_∞ 范数下误差为 $1.80e-05$, 远远大于 λ 取值为分数的情况。从误差图 1, 图 2 可以看出 $\lambda = 1$ 时误差衰减最缓慢, 随 λ 取值变小误差衰减率逐渐变大, 当 $\lambda = \frac{1}{5}$ 时误差衰减最快, 甚至在 $N = 24$ 处数值解与精确解在 L_∞ 范数下误差仅为 $2.40e-15$, 这表现了 Müntz 配置法具有更高精度, 同时我们可以从误差图 1, 图 2 得出该方法具有指数收敛性, 数值实验和理论分析高度吻合。综上所述, Müntz 配置法在求解具有时滞项和非光滑解的第三类 Volterra 方程时具有较强的可行性和有效性。

Table 1. $4 \leq N \leq 24$, the L_∞ norm error

表 1. $4 \leq N \leq 24$, L_∞ 范数下的误差

N	4	8	12	16	20	24
$\lambda = 1$	2.64e-03	3.31e-04	9.41e-05	3.80e-05	1.86e-05	1.03e-05
$\lambda = \frac{1}{2}$	3.63e-04	3.55e-06	2.64e-07	4.17e-08	9.91e-09	3.05e-09
$\lambda = \frac{1}{4}$	1.09e-02	2.28e-07	5.33e-10	1.03e-11	5.19e-13	4.62e-14
$\lambda = \frac{1}{5}$	2.12e-02	1.69e-06	1.67e-10	8.99e-13	1.91e-14	8.65e-16

Table 2. $4 \leq N \leq 24$, the $L^2_{\omega^{-0.6, -0.6, \lambda}}$ norm error

表 2. $4 \leq N \leq 24$, $L^2_{\omega^{-0.6, -0.6, \lambda}}$ 的范数下的误差

N	4	8	12	16	20	24
$\lambda = 1$	4.98e-04	3.86e-05	8.13e-06	2.63e-06	1.08e-06	5.22e-07
$\lambda = \frac{1}{2}$	1.25e-04	7.83e-07	4.53e-08	5.95e-09	1.22e-09	3.35e-10
$\lambda = \frac{1}{4}$	8.08e-03	1.20e-07	2.34e-10	4.17e-12	1.94e-13	1.63e-14
$\lambda = \frac{1}{5}$	1.80e-02	1.25e-06	1.11e-10	5.62e-13	1.14e-14	5.66e-16

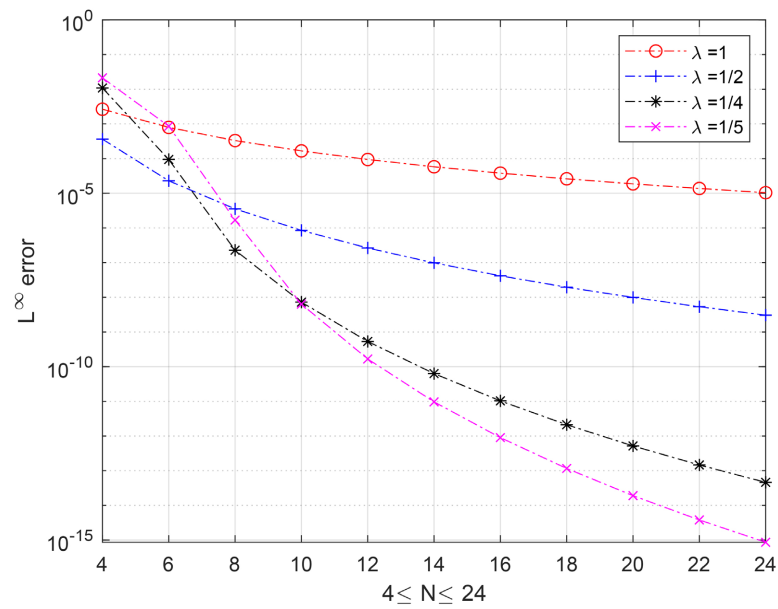


Figure 1. $4 \leq N \leq 24$, the L_∞ norm error

图 1. $4 \leq N \leq 24$, L_∞ 范数下的误差

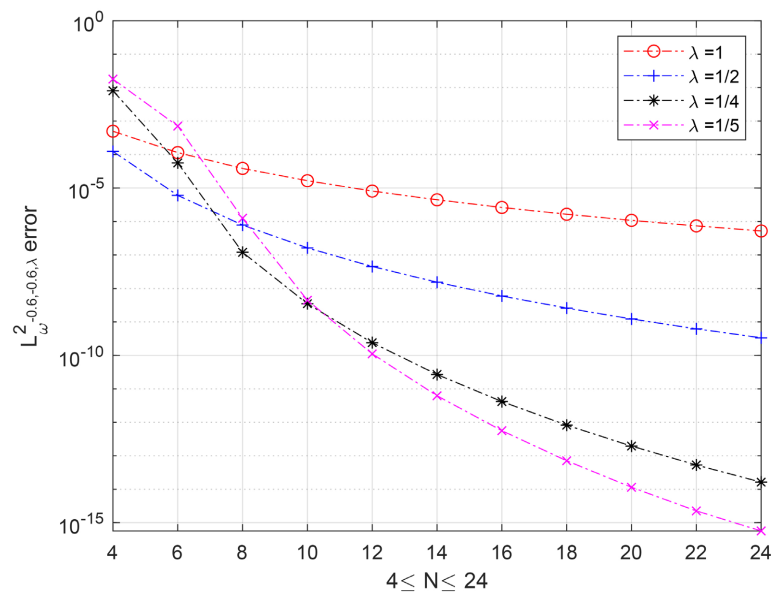


Figure 2. $4 \leq N \leq 24$, the $L_{\omega}^{2,-0.6,-0.6,\lambda}$ norm error

图 2. $4 \leq N \leq 24$, $L_{\omega}^{2,-0.6,-0.6,\lambda}$ 的范数下的误差

6. 总结

我们采用具有谱精度的分数次 Jacobi 谱配点法求解了具有时滞项的第三类 Volterra 积分方程, 讨论了在 L_∞ 和加权 $L_{\omega}^{2,-0.6,-0.6,\lambda}$ 范数下的误差估计。由于方程的解在原点附近具有奇异性, 若采用经典的多项式配置法会降低全局收敛阶, 因此采用分数次 Lagrange 多项式作为插值基函数得到数值解。最后证明了使用广义基函数能使得到的数值格式具有更好的误差精度。

基金项目

国家自然科学基金项目(11801127); 湖南省教育厅科研基金资助项目(20C0081)。

参考文献

- [1] 李星. 积分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [2] Evans, G.C. (1911) Volterra's Integral Equation of the Second Kind with Discontinuous Kernel. II. *Transactions of the American Mathematical Society*, **12**, 429-472. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1911-1500899-X>
- [3] Allaei, S.S., Yang, Z.W. and Brunner, H. (2015) Existence, Uniqueness and Regularity of Solutions to a Class of Third-Kind Volterra Integral Equations. *Journal of Integral Equations and Applications*, **27**, 325-342. <https://doi.org/10.1216/JIE-2015-27-3-325>
- [4] Allaei, S.S., Yang, Z.W. and Brunner, H. (2017) Collocation Methods for Third-Kind VIEs. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **37**, 1104-1124.
- [5] Song, H., Yang, Z. and Brunner, H. (2019) Analysis of Collocation Methods for Nonlinear Volterra Integral Equations of the Third Kind. *Calcolo*, **56**, Article Number: 7. <https://doi.org/10.1007/s10092-019-0304-9>
- [6] Shayanfar, F., Dastjerdi, H.L. and Ghaini, F.M. (2019) A Numerical Method for Solving Volterra Integral Equations of the Third Kind by Multistep Collocation Method. *Computational and Applied Mathematics*, **38**, Article Number: 174. <https://doi.org/10.1007/s40314-019-0947-9>
- [7] Cai, H. (2020) Legendre-Galerkin Methods for Third Kind VIEs and CVIEs. *Journal of Scientific Computing*, **83**, Article Number: 3. <https://doi.org/10.1007/s10915-020-01187-z>
- [8] Song, H., Xiao, Y. and Chen, M. (2021) Collocation Methods for Third-Kind Volterra Integral Equations with Proportional Delays. *Applied Mathematics and Computation*, **388**, 125509. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125509>
- [9] Ma, X. and Huang, C. (2021) Recovery of High Order Accuracy in Spectral Collocation Method for Linear Volterra Integral Equations of the Third-Kind with Non-Smooth Solutions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **392**, 113458. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113458>
- [10] Ma, X. and Huang, C. (2021) An Accurate Legendre Collocation Method for Third-Kind Volterra Integro-Differential Equations with Non-Smooth Solutions. *Numerical Algorithms*, **88**, 1571-159. <https://doi.org/10.1007/s11075-021-01086-w>
- [11] Vainikko, G. (2012) First Kind Cordial Volterra Integral Equations 1. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **33**, 680-704. <https://doi.org/10.1080/01630563.2012.665260>
- [12] Hou, D., Lin, Y., Azaiez, M. and Xu, C. (2019) A Müntz-Collocation Spectral Method for Weakly Singular Volterra Integral Equations. *Journal of Scientific Computing*, **81**, 2162-2187. <https://doi.org/10.1007/s10915-019-01078-y>
- [13] Shen, J., Tang, T. and Wang, L.L. (2011) *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications* (Vol. 41). Springer Science and Business Media, Berlin.