

指标1-型积分代数方程的配置边值方法

曾 港*, 任 浩, 李恒杰

贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2022年4月9日; 录用日期: 2022年5月3日; 发布日期: 2022年5月10日

摘 要

通过构造配置边值方法求解指标-1型积分代数方程。利用拉格朗日插值公式, 选取未计算的节点作插值节点, 将原方程离散为一个线性方程组。由绕圈数以及剩余理论分析了该方法的解性和收敛性。证明了该方法求解指标-1型积分代数方程具有较高的收敛阶, 同时给出数值算例验证了我们的理论结果。

关键词

指标-1型积分代数方程, 配置边值方法, 收敛性分析

A Collocation Boundary Value Method for Integral Algebraic Equations of Index-1

Gang Zeng*, Hao Ren, Hengjie Li

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Apr. 9th, 2022; accepted: May 3rd, 2022; published: May 10th, 2022

Abstract

The index-1 integral algebraic equation is solved by constructing boundary value method. Using Lagrange interpolation formula, the nodes that not calculated are selected as interpolation nodes, then original equation is discreted into a system of linear equations. And the solvability and convergence of the method are analyzed based on the winding number and residual theory. It is proved that this method has higher convergence order for solving index-1 type integral algebraic equations, and numerical examples are given to verify our theoretical results.

*第一作者。

Keywords

Integral Algebraic Equations Index-1, Collocation Boundary Value Method, Convergence Analysis

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

由第一类与第二类 Volterra 积分方程组成的积分代数方程在各个自然科学学科和数学建模中有着大量的应用[1] [2] [3] [4]。而积分代数方程是一个庞大的系统,对该方程的求解是比较复杂的。对此,研究者引入指标来协助求解积分代数方程。Gear 引入了积分代数方程的“指标”的概念[5],该说法类似于用数据来评估积分代数方程[6]。在此之后,很多学者提出了大量求解积分代数方程的数值方法[7] [8] [9] [10],但均未对指标进行深入的研究。最近 Liang 和 Brunner 通过引入线性积分代数方程的指标填补了这一空缺[11],给出了积分代数方程的指标的定义以及如何求得其指标的计算方法,提出指标-1 型积分代数方程可以解耦成如下形式

$$\begin{cases} u(t) + \int_0^t K_{11}(t,s)u(s)ds + \int_0^t K_{12}(t,s)v(s)ds = f(t), \\ \int_0^t K_{21}(t,s)u(s)ds + \int_0^t K_{22}(t,s)v(s)ds = g(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中, $t \in [0, T]$, $|K_{22}(t,t)| \neq 0$, 函数 f, g 以及核函数 $K_{i,j}(t,s), (i, j = 1, 2)$ 足够光滑, $g(0) = 0$ 。并证明了方程(1)有唯一解,给出该方程一般系统的配置解。

随后, Liang 和 Brunner 分析了指标-2 型积分代数方程的解耦系统,证明了配置法在给定的系统和解耦后的系统中的应用是一致的[12]。基于对指标- μ 型积分代数方程解耦成新的系统,其理论分析以及数值计算方法已经有了大量的结果[13] [14] [15] [16]。配置边值方法是求解常微分方程的一种方法[17], Chen 和 Zhang 利用该方法来求解 Volterra 积分方程[18] [19]。Ma 和 Xiang 基于特殊的多步配置方法,利用未计算的近似值,研究了求解 Volterra 积分方程的 k 步配置边值方法(CBVM- k) [20]。Liu 和 Ma 进一步利用该理论构造了第一类 Volterra 积分方程的块配置边值方法[21]。他们都得到了具有高阶收敛的数值解,并且具有很强的稳定性。这一思想对本论文的研究有着重要的影响。

在本文中,我们考虑利用 CBVM- k 求解指标-1 型积分代数方程

$$\begin{cases} u(t) + \int_0^t K_{11}(t-s)u(s)ds + \int_0^t K_{12}(t-s)v(s)ds = f(t), \\ \int_0^t K_{21}(t-s)u(s)ds + \int_0^t K_{22}(t-s)v(s)ds = g(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中 $K_{22}(0) \neq 0$ 。并讨论 CBVM- k 求解指标-1 型积分代数方程的解的唯一性以及收敛性。

本文工作安排如下,在第二节,我们构造指标-1 型积分代数方程的 k 步配置边值方法(CBVM- k)。第三节,我们利用 Toeplitz 矩阵的一些理论进行可解性和收敛性分析。在第四节给出数值例子验证我们的理论分析。最后,我们进行简要的总结。

2. k 步配置边值方法

在这一节中,我们将构造指标-1 型积分代数方程(1)的 k 步配置边值方法(CBVM- k)。

对区间 $[0, T]$ 作均匀网格划分

$$X_h = \left\{ t_n : t_n = nh, n = 0, 1, \dots, N, h = \frac{T}{N} \right\}$$

在区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上 ($n < N - k$), 选取 t_n, t_{n+1} 以及 t_{n+1} 的后 k 个节点为配置节点, 在 $[t_{N-k}, t_N]$ 用 t_{N-k}, \dots, t_N 为配置节点. 定义差值基函数

$$\phi_j^k(s) = \prod_{i=0, i \neq j}^{k+1} \frac{s-i}{j-i},$$

则, 当 $n = 1, 2, \dots, N - k - 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} f(t_n) &= u_h(t_n) + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{11}(t_n - (t_j + sh)) \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) ds U_{j+i} + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{12}(t_n - (t_j + sh)) \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) ds V_{j+i}, \\ g(t_n) &= h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{21}(t_n - (t_j + sh)) \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) ds U_{j+i} + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{22}(t_n - (t_j + sh)) \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) ds V_{j+i}, \end{aligned}$$

当 $n = N - k, \dots, N$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} f(t_n) &= U_n + h \sum_{j=0}^{N-k-2} \int_0^1 K_{11}(t_n - (t_j + sh)) \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) U_{j+i} ds \\ &\quad + h \sum_{j=0}^{N-k-2} \int_0^1 K_{12}(t_n - (t_j + sh)) \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) V_{j+i} ds \\ &\quad + h \int_0^{n-N+k+1} K_{11}(t_n - (t_{N-k-1} + sh)) \sum_{i=0}^k \phi_i^{k-1}(s) U_{N-k+i} ds \\ &\quad + h \int_0^{n-N+k+1} K_{12}(t_n - (t_{N-k-1} + sh)) \sum_{i=0}^k \phi_i^{k-1}(s) V_{N-k+i} ds, \\ g(t_n) &= h \sum_{j=0}^{N-k-2} \int_0^1 K_{21}(t_n - (t_j + sh)) \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) U_{j+i} ds \\ &\quad + h \sum_{j=0}^{N-k-2} \int_0^1 K_{22}(t_n - (t_j + sh)) \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) V_{j+i} ds \\ &\quad + h \int_0^{n-N+k+1} K_{21}(t_n - (t_{N-k-1} + sh)) \sum_{i=0}^k \phi_i^{k-1}(s) U_{N-k+i} ds \\ &\quad + h \int_0^{n-N+k+1} K_{22}(t_n - (t_{N-k-1} + sh)) \sum_{i=0}^k \phi_i^{k-1}(s) V_{N-k+i} ds. \end{aligned}$$

在介绍 $CBVM-k$ 之前, 我们先引入一些记号, 令 $\alpha_m(t) = \sum_{i=-m+1}^{m-1} a_i t^i$, 我们定义一个 m 阶的 Toeplitz 矩阵如下

$$T[\alpha_m] = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-m+1} \\ a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}.$$

定义

$$b_{-j,i}^{pq} = \int_0^1 K_{pq}(h(j-s)) \phi_i^k(s) ds, \hat{b}_{j,i}^{pq} = \int_0^{j-N+k+1} K_{pq}(h(j-N+k+1)) \phi_i^{k-1}(s) ds,$$

其中 $p, q = 1, 2$ 。定义 Laurent 多项式如下

$$\beta_m^{pq,i}(t) = \sum_{j=-m+1}^0 b_{j-1,t}^{pq} t^j, i = 0, 1, \dots, k+1.$$

我们有 Toeplitz 型矩阵

$$H_i^{pq} = (\mathbf{0}_{N \times i} T[\beta_N^{pq,i}(t)](1:N, 1:N-k-1) \mathbf{0}_{N \times (k-i+2)}), i = 0, 1, 2, \dots, k+1.$$

以及一个 $N \times (N+1)$ 的矩阵 S^{pq} ，并且

$$S^{pq}(N-k:N, N-k+1:N+1) = \begin{bmatrix} \hat{b}_{N-k,0}^{pq} & \hat{b}_{N-k,1}^{pq} & \cdots & \hat{b}_{N-k,k}^{pq} \\ \hat{b}_{N-k+1,0}^{pq} & \hat{b}_{N-k+1,1}^{pq} & \cdots & \hat{b}_{N-k+1,k}^{pq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{b}_{N,0}^{pq} & \hat{b}_{N,1}^{pq} & \cdots & \hat{b}_{N,k}^{pq} \end{bmatrix}$$

其他位置的元素为 0。令

$$\bar{A}^{pq} = S^{pq} + \sum_{i=0}^{k+1} H_i^{pq}, A_{pq} = \bar{A}^{pq}(1:N, 2:N+1), \bar{a}^{pq} = h\bar{A}^{pq}(1:N, 1:1),$$

$$F = (f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_N))^T, G = (g(t_1), g(t_2), \dots, g(t_N))^T,$$

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_N), V = (V_1, V_2, \dots, V_N).$$

我们可以得到

$$\begin{bmatrix} I + hA_{11} & hA_{12} \\ hA_{21} & hA_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_0 \bar{a}_{11} + V_0 \bar{a}_{12} \\ U_0 \bar{a}_{21} + V_0 \bar{a}_{22} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

3. 可解性与收敛性分析

在这一节，我们讨论配置边值方法求解指标-1 型积分代数方程解的存在唯一性与收敛性。传统配置法通过迭代求得近似解，而配置边值方法的近似解是利用未计算的近似值，通过一个线性系统整体求解而来，因此我们需要对该方法的存在唯一性、收敛性进行新的讨论。

首先，我们讨论积分代数方程(2)中核 $K_{22}(t) = 1$ 这一特殊情况。配置边值方法求解这一特殊情况解的存在唯一性、收敛性理论有助于我们讨论配置边值方法解一般情况下方程(2)的解的存在唯一性、收敛性。

3.1. $K_{22}(t) = 1$

当 $K_{22}(t) = 1$ ，我们有

$$f(t_n) = u_h(t_n) + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{11}(t_n - (t_j + sh)) u_h(t_j + sh) ds + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{12}(t_n - (t_j + sh)) v_h(t_j + sh) ds, \tag{4}$$

$$g(t_n) = h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{21}(t_n - (t_j + sh)) u_h(t_j + sh) ds + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 v_h(t_j + sh) ds,$$

当 $n = N-1, N-1, \dots, 0$ 时， $g(t_{n+1}) - g(t_n)$ 有

$$\begin{aligned}
g(t_{n+1}) - g(t_n) &= h \sum_{j=0}^n \int_0^1 K_{21}(t_{n+1} - (t_j + sh)) u_h(t_j + sh) ds \\
&\quad - h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{21}(t_n - (t_j + sh)) u_h(t_j + sh) ds + h \int_0^1 v_h(t_n + sh) ds,
\end{aligned} \tag{5}$$

则方程(3)可以改写为

$$\begin{bmatrix} I + hA_{11} & hA_{12} \\ h\hat{A}_{21} & hB_N^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \hat{G} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_0 \bar{a}_{11} + V_0 \bar{a}_{12} \\ U_0 \hat{a}_{21} + V_0 \hat{a}_{22} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

当 $h \rightarrow 0$ 是对系数矩阵高斯消元有

$$\begin{bmatrix} I + hA_{11} & hA_{12} \\ h\hat{A}_{21} & hB_N^k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I + O(\mathbf{h}) & O(\mathbf{h}) \\ \mathbf{0} & hB_N^k \end{bmatrix}. \tag{7}$$

其中 $\hat{G} = [g(t_1) - g(t_0), \dots, g(t_N) - g(t_{N-1})]^T$,

$$\hat{a}^{21} = \bar{A}^{21}(1:N, 1:1) - \left[\mathbf{0} \left(\bar{A}^{21}(1:N-1, 1:1) \right)^T \right]^T,$$

$$\hat{a}^{22} = \left[h \int_0^1 \phi_0^k(s) ds, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0} \right]_{1 \times N}^T, \hat{A}_{21} = A_{21} - \left(\mathbf{0}, A_{21}(1:N, :) \right)^T.$$

$B_N^k = \begin{bmatrix} T_N^k & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & R_N^k \end{bmatrix}$, 其中 \mathbf{r} 是一个 $(N-k-1) \times (k+1)$ 矩阵, T_N^k 是一个由 Laurent 多项式

$\zeta_{N-k-1}^{22}(t) = \sum_{j=-k}^1 b_{1,1-i}^{22} t^j$ 定义的 $(N-k-1) \times (N-k-1)$ Toeplitz 矩阵,

$$R_N^k = \begin{bmatrix} \hat{b}_{N-k,0}^{21} & \hat{b}_{N-k,1}^{21} & \cdots & \hat{b}_{N-k,k}^{21} \\ \hat{b}_{N-k+1,0}^{21} & \hat{b}_{N-k+1,1}^{21} & \cdots & \hat{b}_{N-k+1,k}^{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{b}_{N,0}^{21} & \hat{b}_{N,1}^{21} & \cdots & \hat{b}_{N,k}^{21} \end{bmatrix}.$$

因此方程(4)有唯一解的充要条件是 T_N^k 和 R_N^k 可逆。现在我们讨论 T_N^k 与 R_N^k 的可逆性, 假设 Laurent 多项式 $d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n t^n$ 所定义的无穷维 Toeplitz 矩阵如下:

$$T[d] = \begin{bmatrix} b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \cdots \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & \cdots \\ b_2 & b_1 & b_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

令 \mathbf{T} 是复平面上的单位圆盘, t 在 \mathbf{T} 逆时针绕原点一圈时, $d(t)$ 绘制一条连续的封闭曲线。这条曲线绕原点逆时针旋转的次数表示 $d(t)$ 的圈数, 记作 \mathbf{Wind}_d 。特别地, 假设对于所有的 $t \in \mathbf{T}$, $d(t) \neq 0$, 且 $d(t)$ 的非零系数是可数的, 则我们有,

$$d(t) = \sum_{j=-r}^s d_j t^j,$$

进一步我们可以直接得到如下形式:

$$d(t) = t^{-r} b_s \prod_{j=1}^J (t - \delta_j) \prod_{i=1}^I (t - \mu_i) = t^{-r} \bar{d}(t),$$

又因为所有的 $t \in \mathbf{T}$, $d(t) \neq 0$, 所以 $T[d]$ 是一个可逆紧模算子, 则存在一个算子 D , 使得 $DT[d] - I$ 和 $T[d]D - I$ 是紧的[22]。基于此我们有如下结果。

引理 1 算子 $T[d]$ 是可逆的当且仅当对于所有的 $t \in \mathbf{T}$, $d(t) \neq 0$, 以及 $\mathbf{Wind}_d = 0$ 。

记 $T_n[d]$ 表示 $T[d](1:n, 1:n)$, 我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n[d] = T[d]$, $T_n[d]$ 的可逆性由 $T[d]$ 决定。

引理 2 设 $d(t)$ 属于 Wiener 代数。则,

当 $T[d]$ 可逆时, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(T_n[d])^{-1}\| < \infty$,

当 $T[d]$ 不可逆时, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(T_n[d])^{-1}\| = \infty$ 。

另一方面, 由于局部插值函数是线性无关的, 所以 R_N^k 是可逆的。因此, 当 $\zeta_{N-k-1}^{22}(t)$ 属于 Wiener 代数且 $\mathbf{Wind}_{\zeta_{N-k-1}^{22}} = 0$ 时, 方程(6)的系数矩阵是可逆的。

由绕圈数以及剩余理论, 我们将在下面的定理中给出配置边值方法求解指标-1 型积分代数方程解存在的条件和收敛阶。

定理 1 设方程(2)是指标-1 型积分代数方程, 假设 $f \in C^{k+1}([0, T])$, $g \in C^{k+2}([0, T])$ 且 $g(0) = 0$, $K_{21} \in C^{k+2}([0, T])$, $K_{22}(t) = 1$, $K_{1q} \in C^{k+1}([0, T])$, ($q = 1, 2$), 并且假设 $\zeta_{N-k-1}^{22}(t)$ 的绕圈数为 0, 则 $CBVM-k$ 有唯一解, 配置误差在配置节点有界且满足

$$\|u - u_h\|_\infty = O(h^{k+2}),$$

$$\|v - v_h\|_\infty = O(h^{k+1})$$

证明 因为 $\zeta_{N-k-1}^{22}(t)$ 的绕圈数为 0, 有引理 1 和引理 2 可知(7)式中 B_N^k 是可逆的, 因此方程(6)有唯一解, 即方程(3)有唯一解。

下面我们考虑 $CBVM-k$ 的收敛性。令 $e_h = u(t) - u_h(t)$, $\tilde{e}_h = v(t) - v_h(t)$, 我们可以得到误差方程

$$0 = e_h(t_n) + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{11}(t_n - (t_j + sh)) e_h(t_j + sh) ds + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{12}(t_n - (t_j + sh)) \tilde{e}_h(t_j + sh) ds,$$

$$0 = h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{21}(t_n - (t_j + sh)) e_h(t_j + sh) ds U_{j+i} + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 \tilde{e}_h(t_j + sh) ds,$$

利用对(5)同样的处理方式有

$$0 = h \sum_{j=0}^n \int_0^1 K_{21}(t_{n+1} - (t_j + sh)) e_h(t_j + sh) ds - h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{21}(t_n - (t_j + sh)) e_h(t_j + sh) ds + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 \tilde{e}_h(t_j + sh) ds,$$

由 Peano 核定理有, 当 $j = 0, 1, 2, \dots, N - k - 2$, 在 $t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+k+1}$ 处有

$$e_h(t_j + sh) = \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) e_h(t_{j+i}) + O(h^{k+2}), \tilde{e}_h(t_j + sh) = \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) \tilde{e}_h(t_{j+i}) + O(h^{k+2})$$

当 $j = N - k - 1, \dots, N - 1$ 时有

$$e_h(t_j + sh) = \sum_{i=0}^k \phi_i^{k-1}(s) e_h(t_{N-k+i}) + O(h^{k+1}), \tilde{e}_h(t_j + sh) = \sum_{i=0}^k \phi_i^{k-1}(s) \tilde{e}_h(t_{N-k+i}) + O(h^{k+1})$$

记 $E_i = e_h(t_i)$, $\tilde{E}_i = \tilde{e}_h(t_i)$, $E = [E_1, \dots, E_N]^T$, $\tilde{E} = [\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_N]^T$

有

$$\begin{bmatrix} I + hA_{11} & hA_{12} \\ h\hat{A}_{21} & hB_N^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \tilde{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = [O(h^{k+2}), \dots, O(h^{k+2})]_{1 \times N}^T$, B_N^k 与(6)中的一致。则由(7)有

$$\begin{bmatrix} I + O(h) & hA_{12} \\ \mathbf{0} & B_N^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \tilde{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \tilde{\mathbf{r}}_2 + \mathbf{r}_1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{\mathbf{r}}_2 = [O(h^{k+1}), \dots, O(h^{k+1})]_{1 \times N}^T$, 由引理 2 有, 当 $N \rightarrow \infty$ 时 B_N^k 是有界的, 所以

$$\|u - u_h\|_\infty = O(h^{k+2}),$$

$$\|v - v_h\|_\infty = O(h^{k+1}).$$

证毕。

3.2. 一般情况下的核函数 $K_{22}(t)$

在这一小节, 我们考虑一般情况下的核函数 $K_{22}(t)$, 且核函数可以表示为

$$K_{22}(t) = K_{22}(0) + t\bar{K}_{22}(t),$$

并且 $K_{22}(0) \neq 0$, 我们有以下的理论。

定理 2 设方程(2)是指标-1 型积分代数方程, 假设 $f \in C^{k+1}([0, T])$, $g \in C^{k+2}([0, T])$ 且 $g(0) = 0$, $K_{1q} \in C^{k+1}([0, T])$, $K_{2q} \in C^{k+2}([0, T])$, ($q=1, 2$), $K_{22}(0) \neq 0$, 并且假设 $\zeta_{N-k-1}^{22}(t)$ 的绕圈数为 0。则 CBVM- k 有唯一解, 配置误差在配置节点有界且满足

$$\|u - u_h\|_\infty = O(h^{k+2}),$$

$$\|v - v_h\|_\infty = O(h^{k+1}).$$

证明 当 $n=1, 2, \dots, N$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} f(t_n) &= u_h(t_n) + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{11}(t_n - (t_j + sh)) u_h(t_j + sh) ds \\ &\quad + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{12}(t_n - (t_j + sh)) v_h(t_j + sh) ds, \end{aligned} \quad (8)$$

$$g(t_n) = h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{21}(t_n - (t_j + sh)) u_h(t_j + sh) ds + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{22}(t_n - (t_j + sh)) v_h(t_j + sh) ds,$$

当 $n = N-1, N-1, \dots, 0$ 时, 由 $g(t_{n+1}) - g(t_n)$ 有

$$\begin{aligned} &g(t_{n+1}) - g(t_n) \\ &= h \sum_{j=0}^n \int_0^1 K_{21}(t_{n+1} - (t_j + sh)) u_h(t_j + sh) ds - h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{21}(t_n - (t_j + sh)) u_h(t_j + sh) ds \\ &\quad + h \sum_{j=0}^n \int_0^1 K_{22}(t_{n+1} - (t_j + sh)) v_h(t_j + sh) ds - h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{22}(t_n - (t_j + sh)) v_h(t_j + sh) ds, \end{aligned} \quad (9)$$

代入插值多项式, 由(8), (9)有

$$\begin{bmatrix} I + hA_{11} & hA_{12} \\ h\hat{A}_{21} & h\hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \hat{G} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_0 \bar{a}_{11} + V_0 \bar{a}_{12} \\ U_0 \hat{a}_{21} + V_0 \hat{a}_{22} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中

$$\hat{G} = [g(t_1) - g(t_0), \dots, g(t_N) - g(t_{N-1})]^T,$$

\hat{A}_{21} 的构造与(6)式中一致。则由高斯消元法有,

$$\begin{bmatrix} I + hA_{11} & hA_{12} \\ h\hat{A}_{21} & h\hat{A}_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I + O(\mathbf{h}) & hA_{12} \\ \mathbf{0} & h\hat{A}_{22} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

现在我们讨论 \hat{A}_{22} 的奇异性, 我们知道 \hat{A}_{22} 的构造方式与 \hat{A}_{21} 一致。

$$\text{记 } W_{i,j}^1 = \int_0^1 K_{21}(t_i - (t_j + sh))u_h(t_j + sh)ds, \quad W_{i,j}^2 = \int_0^1 K_{22}(t_i - (t_j + sh))v_h(t_j + sh)ds,$$

由(9)式有

$$\begin{aligned} & h \begin{bmatrix} W_{1,0}^1 & 0 & \dots & 0 & W_{1,0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ W_{2,0}^1 - W_{1,0}^1 & W_{2,1}^1 & \dots & 0 & W_{2,0}^2 - W_{1,0}^2 & W_{2,1}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N,0}^1 - W_{N-1,0}^1 & W_{N,1}^1 - W_{N-1,1}^1 & \dots & W_{N,N-1}^1 & W_{N,0}^2 - W_{N-1,0}^2 & W_{N,1}^2 - W_{N-1,1}^2 & \dots & W_{N,N-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} g(t_1) \\ g(t_2) - g(t_1) \\ \vdots \\ g(t_N) - g(t_{N-1}) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, $W_{i,j}^1 \rightarrow O(1)$, 由中值定理有, $W_{i,j-1}^2 - W_{i-1,j-1}^2 \rightarrow O(h)$, 则由高斯消元法有

$$h[\mathbf{W}^1 \quad \mathbf{W}^2] \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = [\tilde{G}],$$

其中 $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]_{1 \times N}^T$, $\tilde{G} = [g(t_1) - g(t_0) + O(h), \dots, g(t_N) - g(t_{N-1}) + O(h)]^T$,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^1 &= \begin{bmatrix} W_{1,0}^1 & 0 & \dots & 0 \\ W_{2,0}^1 - W_{1,0}^1 + O(h) & W_{2,1}^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N,0}^1 - W_{N-1,0}^1 + O(h) & W_{N,1}^1 - W_{N-1,1}^1 + O(h) & \dots & W_{N,N-1}^1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{W}^2 &= \begin{bmatrix} W_{1,0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ W_{2,0}^2 - W_{1,0}^2 + O(h) & W_{2,1}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{N,N-1}^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

而 $W_{j,j-1}^2 = K_{22}(0) \int_0^1 v_h(t_j + sh)ds + h \int_0^1 (1-s)K_{22}(h(1-s))v_h(t_j + sh)ds$ 。

所以 $\hat{A}_{22} = K_{22}(0)B_N^k + O(\mathbf{h})$, B_N^k 与(6)中的定义一致。我们可以把(10)改写为

$$\begin{bmatrix} I + O(\mathbf{h}) & O(\mathbf{h}) \\ \mathbf{0} & hK_{22}(0)B_N^k + h^2O(\mathbf{1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \hat{G} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_0\bar{a}_{11} + V_0\bar{a}_{12} \\ U_0\tilde{a}_{21} + V_0\tilde{a}_{22} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$\tilde{a}_{2q} = A_{2q}(1:N, 1:1), q=1,2$ 所以当 $h \rightarrow 0$ 时, 方程(10)有唯一解, 即方程(3)有唯一解。

接下来我们考虑配置误差 $e_h = u(t) - u_h(t)$, $\tilde{e}_h = v(t) - v_h(t)$ 。同样地, 其满足方程

$$\begin{aligned}
0 &= e_h(t_n) + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{11}(t_n - (t_j + sh)) e_h(t_j + sh) ds \\
&\quad + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{12}(t_n - (t_j + sh)) \tilde{e}_h(t_j + sh) ds,
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
0 &= h \sum_{j=0}^n \int_0^1 K_{21}(t_{n+1} - (t_j + sh)) e_h(t_j + sh) ds \\
&\quad - h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{21}(t_n - (t_j + sh)) e_h(t_j + sh) ds \\
&\quad + h \sum_{j=0}^n \int_0^1 K_{22}(t_{n+1} - (t_j + sh)) \tilde{e}_h(t_j + sh) ds \\
&\quad - h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 K_{22}(t_n - (t_j + sh)) \tilde{e}_h(t_j + sh) ds,
\end{aligned} \tag{14}$$

由 Peano 核定理有, 当 $j = 0, 1, 2, \dots, N-k-2$, 在 $t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+k+1}$ 处有

$$e_h(t_j + sh) = \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) e_h(t_{j+i}) + O(h^{k+2}), \tag{15}$$

$$\tilde{e}_h(t_j + sh) = \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) \tilde{e}_h(t_{j+i}) + O(h^{k+2}), \tag{16}$$

当 $j = N-k-1, \dots, N-1$ 时有

$$e_h(t_j + sh) = \sum_{i=0}^k \phi_i^{k-1}(s) e_h(t_{N-k+i}) + O(h^{k+1}), \tag{17}$$

$$\tilde{e}_h(t_j + sh) = \sum_{i=0}^k \phi_i^{k-1}(s) \tilde{e}_h(t_{N-k+i}) + O(h^{k+1}), \tag{18}$$

则将(15), (16), (17), (18)代入(13), (14)得到

$$\begin{bmatrix} I + hA_{11} & hA_{12} \\ h\hat{A}_{21} & h\hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \tilde{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

进一步有

$$\begin{bmatrix} I + O(\mathbf{h}) & O(\mathbf{h}) \\ \mathbf{0} & K_{22}(0)B_N^k + O(\mathbf{h}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \tilde{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \tilde{\mathbf{r}}_2 + \mathbf{r}_1 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

其中 B_N^k 与(6)中的定义一致, 则当 $N \rightarrow \infty$, 由引理 1、引理 2 可得, B_N^k 有界, 即

$$\begin{bmatrix} I + O(\mathbf{h}) & O(\mathbf{h}) \\ \mathbf{0} & K_{22}(0)B_N^k + O(\mathbf{h}) \end{bmatrix} \text{有界.}$$

所以

$$\|u - u_h\|_\infty = O(h^{k+2}),$$

$$\|v - v_h\|_\infty = O(h^{k+1}).$$

证毕。

4. 数值算例

为验证理论推导, 这一节我们用数值例子来支撑我们的理论结果。

例 1

$$\begin{cases} f(t) = u(t) + \int_0^t (t-s)u(s)ds + \int_0^t e^{t-s}v(s)ds, \\ g(t) = \int_0^t u(s)ds + \int_0^t e^{2(t-s)}v(s)ds. \end{cases}$$

$t \in T = [0,1]$, 该方程的解析解为 $u(t) = rte^{\beta t}$, $v(t) = \cos t$ 。

对例 1 使用 *CBVM-k* 如下:

- 1) 对区间均匀划分: $h = \frac{T}{N}$;
- 2) 取不同的 k 构造插值函数: $\phi_0^k(s) \cdots \phi_{k+2}^k(s)$;
- 3) 离散方程, 得到:

$$f(t_n) = u_h(t_n) + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 (t_n - (t_j + sh)) \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) ds U_{j+i} + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 e^{t_n - (t_j + sh)} \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) ds V_{j+i},$$

$$g(t_n) = h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) ds U_{j+i} + h \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 e^{2(t_n - (t_j + sh))} \sum_{i=0}^{k+1} \phi_i^k(s) ds V_{j+i}.$$

- 4) 整合离散方程得到: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$;
- 5) 求解线性方程组, 得到 $u(t)$, $v(t)$ 的近似解。

所有数值实验都是在 MATLAB 中实现的, 其中积分的计算采用的是 MATLAB 中自带的 `quadgk` 函数。

Table 1. Absolute errors and convergence rates of for example 1 of $u(t)$ ($r = 10, \beta = -1$)

表 1. 例 1 中 $u(t)$ 的绝对误差和收敛阶 ($r = 10, \beta = -1$)

	<i>CBVM-1</i>		<i>CBVM-2</i>		<i>CBVM-3</i>	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶
$N = 16$	4.78×10^{-5}	-	4.78×10^{-6}	-	1.88×10^{-9}	-
$N = 32$	7.18×10^{-6}	2.74	2.61×10^{-7}	4.20	5.00×10^{-9}	5.23
$N = 48$	2.25×10^{-6}	2.86	4.90×10^{-8}	4.13	7.09×10^{-10}	4.87
$N = 64$	9.76×10^{-7}	2.90	1.51×10^{-8}	4.09	1.74×10^{-10}	4.81
$N = 80$	5.08×10^{-7}	2.93	6.08×10^{-9}	4.07	5.84×10^{-11}	4.90
$N = 96$	2.97×10^{-7}	2.94	2.90×10^{-9}	4.06	2.38×10^{-11}	4.92
$N = 112$	1.88×10^{-7}	2.95	1.55×10^{-9}	4.05	1.11×10^{-11}	4.93
$N = 128$	1.27×10^{-7}	2.95	9.04×10^{-10}	4.05	5.75×10^{-12}	4.94

Table 2. Absolute errors and convergence rates of for example 1 of $v(t)$ ($r = 10, \beta = -1$)

表 2. 例 1 中 $v(t)$ 的绝对误差和收敛阶 ($r = 10, \beta = -1$)

	<i>CBVM-1</i>		<i>CBVM-2</i>		<i>CBVM-3</i>	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶
$N = 16$	2.10×10^{-3}	-	3.44×10^{-4}	-	2.39×10^{-5}	-
$N = 32$	5.75×10^{-4}	1.87	4.04×10^{-5}	3.09	1.43×10^{-6}	4.07

Continued

$N = 48$	2.61×10^{-4}	1.94	1.07×10^{-5}	3.05	2.78×10^{-7}	4.03
$N = 64$	1.49×10^{-4}	1.96	4.89×10^{-6}	3.09	8.73×10^{-8}	4.02
$N = 80$	9.58×10^{-5}	1.97	2.49×10^{-6}	3.03	3.56×10^{-8}	4.02
$N = 96$	6.68×10^{-5}	1.98	1.43×10^{-6}	3.02	1.71×10^{-8}	4.01
$N = 112$	4.93×10^{-5}	1.98	8.99×10^{-7}	3.02	9.24×10^{-9}	4.01
$N = 128$	3.78×10^{-5}	1.98	6.01×10^{-7}	3.02	5.41×10^{-9}	4.01

Table 3. Absolute errors and convergence rates of for example 1 of $u(t)$ ($r=1, \beta=-1$)**表 3.** 例 1 中 $u(t)$ 的绝对误差和收敛阶($r=1, \beta=-1$)

	CBVM-1		CBVM-2		CBVM-3	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶
$N = 16$	4.76×10^{-6}	-	4.86×10^{-7}	-	1.86×10^{-8}	-
$N = 32$	7.17×10^{-7}	2.73	2.63×10^{-8}	4.20	4.78×10^{-10}	5.23
$N = 48$	2.25×10^{-7}	2.86	4.93×10^{-9}	4.13	7.04×10^{-11}	4.81
$N = 64$	9.75×10^{-8}	2.90	1.52×10^{-9}	4.10	1.74×10^{-11}	4.87
$N = 80$	5.07×10^{-8}	2.93	6.10×10^{-10}	4.08	5.82×10^{-12}	4.90
$N = 96$	2.97×10^{-8}	2.94	2.91×10^{-10}	4.07	2.37×10^{-12}	4.92
$N = 112$	1.88×10^{-8}	2.95	1.56×10^{-10}	4.06	1.11×10^{-12}	4.93
$N = 128$	1.27×10^{-8}	2.96	9.07×10^{-11}	4.05	5.75×10^{-13}	4.93

Table 4. Absolute errors and convergence rates of for example 1 of $v(t)$ ($r=1, \beta=-1$)**表 4.** 例 1 中 $v(t)$ 的绝对误差的无穷范数和收敛阶($r=1, \beta=-1$)

	CBVM-1		CBVM-2		CBVM-3	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶
$N = 16$	5.10×10^{-4}	-	6.20×10^{-5}	-	1.20×10^{-6}	-
$N = 32$	1.30×10^{-4}	1.97	7.51×10^{-6}	3.04	7.36×10^{-8}	4.03
$N = 48$	5.81×10^{-5}	1.85	2.20×10^{-6}	3.03	1.45×10^{-8}	4.00
$N = 64$	3.28×10^{-5}	1.99	9.24×10^{-7}	3.02	4.59×10^{-9}	4.00
$N = 80$	2.10×10^{-5}	1.99	4.72×10^{-7}	3.02	1.88×10^{-9}	4.00
$N = 96$	1.46×10^{-5}	1.99	2.72×10^{-7}	3.01	9.07×10^{-10}	4.00
$N = 112$	1.07×10^{-5}	1.99	1.71×10^{-7}	3.01	4.90×10^{-10}	3.99
$N = 128$	8.23×10^{-6}	1.99	1.15×10^{-7}	3.01	2.87×10^{-10}	4.00

在这里, 误差表示为 E 与 \tilde{E} 的无穷范数, 收敛阶指

$$\frac{\log_2(\text{error}_{(i+1) \cdot 16}) - \log_2(\text{error}_{i \cdot 16})}{\log_2((i+1) \cdot 16) - \log_2(i \cdot 16)},$$

$i = 1, 2, \dots$, $error_N$ 指相应 N 下的误差。

见表 1~4, 分别取 $k = 1, 2, 3$, 对于不同的 N , 结果表明 $u(t)$ 的收敛阶达到了 3, 4, 5 阶, $v(t)$ 的收敛阶达到了 2, 3, 4 阶, 这一结果与我们定理 2 中结论一致。

5. 结论

本文介绍指标-1 型积分代数方程的配置边值方法, 分析了该方法的求解性和收敛性, 证明了该方法求解指标-1 型积分代数方程具有较高的收敛阶, 数值结果证明该方法求解指标-1 型积分代数方程是具有较高的收敛阶的, 得到了 $CBVM-k$ 求解指标-1 型积分代数方程可以达到 $k+2$ 阶。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11901133)。

参考文献

- [1] Gomilko, A.M. (2003) A Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation in a Semi-Infinite Strip. *Journal of Engineering Mathematics*, **46**, 253-268. <https://doi.org/10.1023/A:1025065714786>
- [2] Jumarhon, B., Lamb, W., McKee, S., et al. (1996) A Volterra Integral Type Method for Solving a Class of Nonlinear Initial-Boundary Value Problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, **12**, 265-281. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1098-2426\(199603\)12:2%3C265::AID-NUM8%3E3.0.CO;2-O](https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-2426(199603)12:2%3C265::AID-NUM8%3E3.0.CO;2-O)
- [3] Zenchuk, A.I. (2008) Combination of Inverse Spectral Transform Method and Method of Characteristics: Deformed Pohlmeier Equation. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **15**, 437-448. <https://doi.org/10.2991/jnmp.2008.15.s3.42>
- [4] Kafarov, V.V., Mayorga, B. and Dallos, C. (1999) Mathematical Method for Analysis of Dynamic Processes in Chemical Reactors. *Chemical Engineering Science*, **54**, 4669-4678. [https://doi.org/10.1016/S0009-2509\(99\)00277-8](https://doi.org/10.1016/S0009-2509(99)00277-8)
- [5] Gear, C.W. (1990) Differential Algebraic Equations, Indices, and Integral Algebraic Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **27**, 1527-1534. <https://doi.org/10.1137/0727089>
- [6] Gear, C.W. (1988) Differential-Algebraic Equation Index Transformations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **9**, 39-47. <https://doi.org/10.1137/0909004>
- [7] Kauthen, J.P. (2001) The Numerical Solution of Integral-Algebraic Equations of Index 1 by Polynomial Spline Collocation Methods. *Mathematics of Computation*, **70**, 1503-1514. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-00-01257-6>
- [8] Hadizadeh, M., Ghoreishi, F. and Pishbin, S. (2011) Jacobi Spectral Solution for Integral Algebraic Equations of Index-2. *Applied Numerical Mathematics*, **61**, 131-148. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2010.08.009>
- [9] Pishbin, S., Ghoreishi, F. and Hadizadeh, M. (2011) A Posteriori Error Estimation for the Legendre Collocation Method Applied to Integral-Algebraic Volterra Equations. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **38**, 327-346.
- [10] Farahani, M.S. and Hadizadeh, M. (2018) Direct Regularization for System of Integral-Algebraic Equations of Index-1. *Inverse Problems in Science and Engineering*, **26**, 728-743. <https://doi.org/10.1080/17415977.2017.1347169>
- [11] Liang, H. and Brunner, H. (2013) Integral-Algebraic Equations: Theory of Collocation Methods I. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **51**, 2238-2259. <https://doi.org/10.1137/120894567>
- [12] Liang, H. and Brunner, H. (2016) Integral-Algebraic Equations: Theory of Collocation Methods II. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **54**, 2640-2663. <https://doi.org/10.1137/15M1049300>
- [13] Sajjadi, S.A. and Pishbin, S. (2021) Convergence Analysis of the Product Integration Method for Solving the Fourth Kind Integral Equations with Weakly Singular Kernels. *Numerical Algorithms*, **86**, 25-54. <https://doi.org/10.1007/s11075-020-00877-x>
- [14] Pishbin, S. (2015) Optimal Convergence Results of Piecewise Polynomial Collocation Solutions for Integral-Algebraic Equations of Index-3. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **279**, 209-224. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.11.012>
- [15] Sohrabi, S. and Ranjbar, H. (2019) On Sinc Discretization for Systems of Volterra Integral-Algebraic Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **346**, 193-204. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.10.026>
- [16] Zhang, T., Liang, H. and Zhang, S. (2020) On the Convergence of Multistep Collocation Methods for Integral-Algebraic Equations of Index 1. *Computational and Applied Mathematics*, **39**, Article No. 294.

<https://doi.org/10.1007/s40314-020-01336-y>

- [17] Brugnano, L. and Trigiante, D. (1998) Solving Differential Problems by Multistep Initial and Boundary Value Methods. Gordon and Breach Science Publisher, Amsterdam.
- [18] Chen, H. and Zhang, C. (2011) Boundary Value Methods for Volterra Integral and Integro-Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 2619-2630. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.08.001>
- [19] Chen, H. and Zhang, C. (2012) Block Boundary Value Methods for Volterra Integral and Integro-Differential Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **236**, 2822-2837. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.01.018>
- [20] Ma, J. and Xiang, S. (2017) A Collocation Boundary Value Method for Linear Volterra Integral Equations. *Journal of Scientific Computing*, **71**, 1-20. <https://doi.org/10.1007/s10915-016-0289-3>
- [21] Liu, L. and Ma, J. (2021) Block Collocation Boundary Value Solutions of the First-Kind Volterra Integral Equations. *Numerical Algorithms*, **86**, 911-932. <https://doi.org/10.1007/s11075-020-00917-6>
- [22] Bottcher, A. and Grudsky, S. (2005) Spectral Properties of Banded Toeplitz Matrices. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. <https://doi.org/10.1137/1.9780898717853>