

食饵具有常数投放率的食饵-捕食模型的定性分析

王学蕾

山东农业大学信息科学与工程学院, 山东 泰安

收稿日期: 2022年4月11日; 录用日期: 2022年5月6日; 发布日期: 2022年5月17日

摘要

本文研究食饵具有常数投放率的食饵-捕食模型的定性性质, 通过线性近似给出了平衡点稳定的充分条件, 并用Dulac函数得出了无极限环的结论。通过构造环域境界线给出极限环存在的条件。最后用数值模拟验证结论的正确性。

关键词

平衡点, 存在性, 唯一性, 极限环

Qualitative Analysis of a Prey-Predator Model with a Constant Investment Rate of Prey Species

Xuelei Wang

College of Information Science and Engineering, Shandong Agricultural University, Tai'an Shandong

Received: Apr. 11th, 2022; accepted: May 6th, 2022; published: May 17th, 2022

Abstract

In this paper, the qualitative properties of the predator-prey model with constant investment rate are studied. The sufficient conditions for the stability of equilibrium points are obtained by linearization method; and the conclusion for no limit cycle is proved by Dulac function; by constructing boundary lines, the condition for the existence of a limit cycle is gained. Finally, numerical simulation is used to verify the correctness of the conclusion.

Keywords

Equilibrium Point, Existence, Uniqueness, Limit Cycle

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对于食饵具有常数投放率的食饵-捕食系统的研究, 较早期的工作有 [1, 2], 文献 [1]详细讨论了模型

$$\begin{cases} \dot{x} = bx^2(1 - \frac{x}{k}) - \beta xy + h, \\ \dot{y} = -cy + dxy. \end{cases}$$

的正平衡点及极限环的存在性和性态. 并对更一般的模型得到了分支存在的条件. 文献 [2]对捕食者有投放率的系统进行了定性分析. 文献 [3-5] 分别讨论不同模型下食饵具有常数投放率的全局性质. 其中文献 [3]考虑食饵种群具有常数投放率且有密度制约项的holling-IV型捕食系统

$$\begin{cases} \dot{x} = x(g(x) - \frac{y}{\beta+x^2}) + h, \\ \dot{y} = y(-a - by + \frac{cx}{\beta+x^2}). \end{cases}$$

的定性行为. 文献 [6-8]讨论两种群分别有常投放率和常收获率的食饵-捕食系统的定性性质. 上述工作, 模型右端函数大都是是全平面解析或化简完后是解析系统, 而本文研究的模型化简完以后不是全平面解析的. 讨论的困难在于模型的化简和高阶奇点类型的分析, 当系统出现零实部或零特征值时, 其稳定性不能由线性近似系统的稳定性得出. 需要进一步做变换判断.

本文考虑具有功能反应且食饵具有常数投放率的食饵-捕食模型

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx^{\frac{1}{2}}) - ycx^{\frac{1}{2}} + h, \\ \dot{y} = y(-d + cex^{\frac{1}{2}}). \end{cases} \quad (1)$$

其中 a, b, c, d, e, h 都是大于0的常数.

采取变换 $\bar{x} = x^{\frac{1}{2}}, \bar{y} = \frac{c}{a}y, \tau = \frac{a}{2}t$ (为方便起见, 我们仍采用符号 x, y, t), 模型(1)可化为

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \frac{b}{a}x) - y + \frac{h}{ax}, \\ \dot{y} = \bar{r}y(x - \bar{m}), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\bar{r} = \frac{2ce}{a}, \bar{m} = \frac{d}{ce}$.

为减少参数, 再令 $\tilde{x} = \frac{b}{a}x, \tilde{y} = \frac{b}{a}y$, 变换后, 我们仍然用符号 x, y 表示 \tilde{x}, \tilde{y} . 模型(2)可以简化为如下等价系统

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x) - y + \frac{I}{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = ry(x - m) = Q(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $I = \frac{bh}{a^3}, r = \frac{a\bar{r}}{b}, m = \frac{b\bar{m}}{a}$.

考虑实际生态意义, 仅在 $R_2^+ = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ 内讨论, 并记 $R_2^* = \{(x, y) | x > 0, y \geq 0\}$. 本文共分成三个部分: 第一部分用线性近似的方法讨论平衡点及其性态; 第二部分用相平面分析法给出极限环的存在性和不存在性的条件; 第三部分数值模拟, 验证结论的正确性.

2. 平衡点及其性态

解方程组

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

由 $Q(x, y) = 0$, 得 $y = 0$ 或 $x = m$. 把 $y = 0$ 代入 $P(x, y) = 0$, 得 $x^2(x - 1) = I$, 而 $x^2(x - 1) = I$ 只有一个正根, 设为 k , 则 $k > 1$. 把 $x = m$ 代入 $P(x, y) = 0$, 得 $y = m(1 - m) + \frac{I}{m}$, 记为 y^* . 记系统(3)的平衡点为 $E_1(k, 0), E_2(m, y^*)$.

从 $P(x, y)$ 中解出 y , 记为 $F(x)$: $F(x) = x(1 - x) + \frac{I}{x}$, $F'(x) = \frac{x^2 - 2x^3 - I}{x^2} \frac{H_1(x)}{x^2}$. 由 $H_1'(x) = -6x(x - \frac{1}{3})$, $x = \frac{1}{3}$ 为 $H_1(x)$ 唯一正的驻点. $H_1(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} - I$, 分析可知:

当 $I > \frac{1}{27}$ 时, $F(x)$ 严格单调递减.

当 $I = \frac{1}{27}$ 时, $F(x)$ 单调递减; 当 $0 < I < \frac{1}{27}$ 时, $F(x)$ 有两个驻点, 记为 m_1, m_2 , 则有 $0 < m_1 < \frac{1}{3} < m_2$. 在区间 $(0, m_1)$ 内, $F(x)$ 严格单调递减, 在区间 (m_1, m_2) 内, $F(x)$ 严格单调递增, 在区间 $(m_2 + \infty)$ 内, $F(x)$ 单调递减. 局部极小值 $F(m_1) > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$.

综上所述, 当 $0 < m < k$ 时, $E_2(m, y^*)$ 是唯一的正的平衡点. 系统(3)的Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2x - \frac{I}{x^2} & -1 \\ ry & r(x - m) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

定理 1 (i) 当 $m > k$ 时, $E_1(k, 0)$ 是稳定的结点; $0 < m < k$ 时, $E_1(k, 0)$ 是鞍点, $m = k$ 时, $E_1(k, 0)$ 是鞍结点.

(ii) 当 $0 < m < k$ 时, $E_2(m, y^*)$ 是唯一的正的平衡点.

情形1 当 $I \geq \frac{1}{27}$ 时, $E_2(m, y^*)$ 是稳定的焦点或结点.

情形2 在 $0 < I < \frac{1}{27}$ 条件下, 若 $m^2(1 - 2m) < I$, 则 $E_2(m, y^*)$ 是稳定焦点或结点. 若 $m^2(1 - 2m) = I$, 则 $E_2(m, y^*)$ 是中心. 若 $m^2(1 - 2m) > I$, 则 $E_2(m, y^*)$ 是不稳定焦点或结点.

证明 (i) 先分析平衡点 $E_1(k, 0)$ 的奇点类型及稳定性

考虑到 $k^2(k - 1) = I$, $E_1(k, 0)$ 对应的 Jacobi 矩阵

$$J_{E_1(k,0)} = \begin{pmatrix} 1 - 2k - \frac{I}{k^2} & -1 \\ 0 & r(k - m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3k & -1 \\ 0 & r(k - m) \end{pmatrix}$$

当 $m > k$ 时, Jacobi 矩阵有两个负的特征值, 所以 $E_1(k, 0)$ 是稳定的结点; $0 < m < k$ 时, Jacobi 矩阵有两个异号的特征值, 因此 $E_1(k, 0)$ 是鞍点.

$m = k$ 时, 有一个负特征值, 有一个零特征值, 把系统(3)平衡点 $E_1(k, 0)$ 平移到坐标原点处, 得系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (2 - 3k)x - y + (-1 + \frac{I}{k^3})x^2 + p_3(x, y), \\ \dot{y} = rxy, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $p_3(x, y)$ 是次数不低于三次的解析函数. 采用非退化的线性替换

$$\begin{cases} x = \xi + \eta, \\ y = (2 - 3k)\xi, \end{cases}$$

再令 $d\tau = -(3k - 2)dt$, 就可以把系统(7)转化成文献 [9] 定理7.1 的形式

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\frac{r}{3k-2}\xi^2 - \frac{r}{3k-2}\xi\eta = \psi(\xi, \eta), \\ \dot{\eta} = \eta + \frac{1}{3k-2}(1 - \frac{I}{k^3} + r)\xi^2 + \frac{1}{3k-2}(2 - \frac{2I}{k^3} + r)\xi\eta \\ \quad + \frac{1}{3k-2}(1 - \frac{I}{k^3} + r)\eta^2 + p_3(\xi, \eta) = \Phi(\xi, \eta), \end{cases} \quad (7)$$

为了从 $\Phi(\xi, \eta)$ 中解出 η , 令 $\eta = b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + \dots$, 比较同次项系数, 得 $b_2 = -\frac{1}{3k-2}(r + \frac{1}{k})$, 代入 $\psi(\xi, \eta)$, 解得 $m = 2$, $a_m = -\frac{r}{3k-2} < 0$, 由定理7.1 情形(iii)知, $E_1(k, 0)$ 是鞍结点.

(ii) 分析平衡点 $E_2(m, y^*)$ 的奇点类型及稳定性

注意到 $y^* = m(1 - m) + \frac{I}{m}$, 其对应的Jacobi 矩阵为

$$J_{E_1(k,0)} = \begin{pmatrix} 1 - 2m - \frac{I}{m^2} & -1 \\ ry^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2m - \frac{I}{m^2} & -1 \\ r[m(1 - m) + \frac{I}{m}] & 0 \end{pmatrix}$$

设其特征值为 λ_1, λ_2 , 则 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - 2m - \frac{I}{m^2} = F'(m)$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = r[m(1 - m) + \frac{I}{m}] > 0$.

情形1 由定理1前面的分析可知, 当 $I \geq \frac{1}{27}$ 时, 恒有 $F'(m) < 0$, 知有两个负的实特征值, 或两个实部小于零的共轭复根, 前者即是稳定的结点, 后者就是稳定的焦点.

情形2 当 $0 < I < \frac{1}{27}$ 且 $F'(m) > 0$ 时, 即 $m^2(1 - 2m) > I$ 时, 有两个正的实特征值, 或两个实部大于零的共轭复根, 前者即是不稳定的结点, 后者就是不稳定的焦点.

当 $0 < I < \frac{1}{27}$ 且 $F'(m) < 0$ 时, 即 $m^2(1 - 2m) < I$ 时, 有两个负的实特征值, 或两个实部小于零的共轭复根, 前者即是稳定的结点, 后者就是稳定的焦点. 当 $0 < I < \frac{1}{27}$ 且 $F'(m) = 0$ 时, 即 $m^2(1 - 2m) = I$ 时, 两个实部为零的共轭复根, 对应的奇点类型为中心.

3. 极限环的存在性

定理 2 (i) 当 $m > k$ 时, 系统 (3) 在第一象限内无极限环, $E_1(k, 0)$ 是稳定的且是全局稳定的.

(ii) 在 $0 < m < k$ 的条件下, 当 $I \geq \frac{1}{27}$ 时, 系统 (3) 在第一象限内无极限环, $E_2(m, y^*)$ 是稳定的且是全局稳定的.

证明 (i) 当 $m > k$ 时, 系统 (3) 在第一象限内无正的平衡点, $\frac{dy}{dt}|_{x=0} = -rym < 0$, 所以从 y 轴处出发的轨线是斜向下的, y 轴是无切线段, 且其上无平衡点. x 轴是轨线, 所以在第一象限内无奇异闭轨和闭轨线. 而平面上的轨线的 w 极限集只能是平衡点、闭轨线、奇异闭轨线. 因此从 R_2^* 内出发的轨线的 w 极限集只能是奇点. 由定理 1 情形(i)知, $E_1(k, 0)$ 是 R_2^* 内唯一的平衡点, 且是稳定的, 所以是全局稳定的.

(ii) 构造Dulac函数 $B(x, y) = y^{-1}$, 则 $D \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = \frac{1}{y} F'(x) \leq 0$, 且仅在 $x = \frac{1}{3}$ 时, $D = 0$, 由Bendixson-Dulac判别法 [10] 知, 在第一象限内, 无极限环. 结合定理1知, $E_2(m, y^*)$ 是稳定的, 因此是全局稳定的.

当有较大的投放率, 且捕食种群的自然死亡率小于某一个数值时, 两种群长期稳定在 $E_2(m, y^*)$ 附近, 没有周期振荡现象.

定理 3 在 $0 < m < k$ 的条件下, 当 $0 < I < \frac{1}{27}$ 且 $m^2(1 - 2m) > I$ 时, 系统 (3) 在第一象限内存在稳定的极限环.

证明 $E_2(m, y^*)$ 是不稳定的焦点或结点, 可取作环域的内境界线.

下面构造环域的外境界线.

设 $\alpha = \max_{m \leq x \leq k} \{F(x)\}$, 取 $x = \varepsilon_0$, 其中 ε_0 是充分小的正数, 比如可取为 0.0001, x 轴, 直线 $x = k$, 曲线 $L_1: \dot{x} = \alpha - y, \dot{y} = ry(x - m)$ 的轨线, 初始点为 $A(k, \alpha)$, 终点为 $B(m, \beta)$ 的一段, 其中 β 为轨线与直线 $x = m$ 的交点的纵坐标; 曲线 $L_2: y = \beta$, 记 L_2 与 $x = \varepsilon_0$ 的交点为 $C(\varepsilon_0, \beta)$. 环域外境界线即为 OE_1ABCO .

因 $\frac{dx}{dt}|_{x=\varepsilon_0} > 0$, $\frac{dy}{dt}|_{x=\varepsilon_0} = -ry(\varepsilon_0 - m) < 0$, 所以从 $x = \varepsilon_0$ 处出发的轨线是斜向右下进入环域的; x 轴是轨线; 因 $\frac{dx}{dt}|_{x=k} = -y < 0$, $\frac{dy}{dt}|_{x=k} = ry(k - m) > 0$, 自直线 $x = k$ 出发的轨线, 是从右下方进入区域的; 因 $\dot{x}|_{(3)} < \dot{x}|_{L_1} < 0$, $\dot{y}|_{(3)} = \dot{x}|_{L_1} > 0$. 故从 L_1 出发的轨线是从右下方进入左上方的; 因 $\dot{y}|_{L_2} < 0$, 因此自 L_2 出发的轨线是自上而下进入环域的. 由poincare-Bendixson定理知, 在环域内部有稳定的极限环.

4. 数值模拟

我们分别对定理2和定理3中的参数取具体数值, 通过matlab软件来检验结论的正确性.

图 1(a): $m > k$ 的情形, 取 $I = 4, r = 1, m = 3$, 经计算 $k = 2$, 对应的 R_2^* 的平衡点只有 $E_1(2, 0)$, 此时 $E_1(2, 0)$ 是全局稳定的结点. 无极限环. 对应定理2中的情形 (i).

图 1(b): 在 $0 < m < k$ 的条件下, $0 < I < \frac{1}{27}$ 且 $m^2(1 - 2m) > I$ 的情形, 取 $I = 0.02, r = 1, m = 0.25$, 对应的平衡点 $E_1(1.0193, 0)$ 是鞍点, $E_2(0.25, 0.2675)$ 是不稳定的焦点或结点. 存在极限环. 对应定理3中的情形.

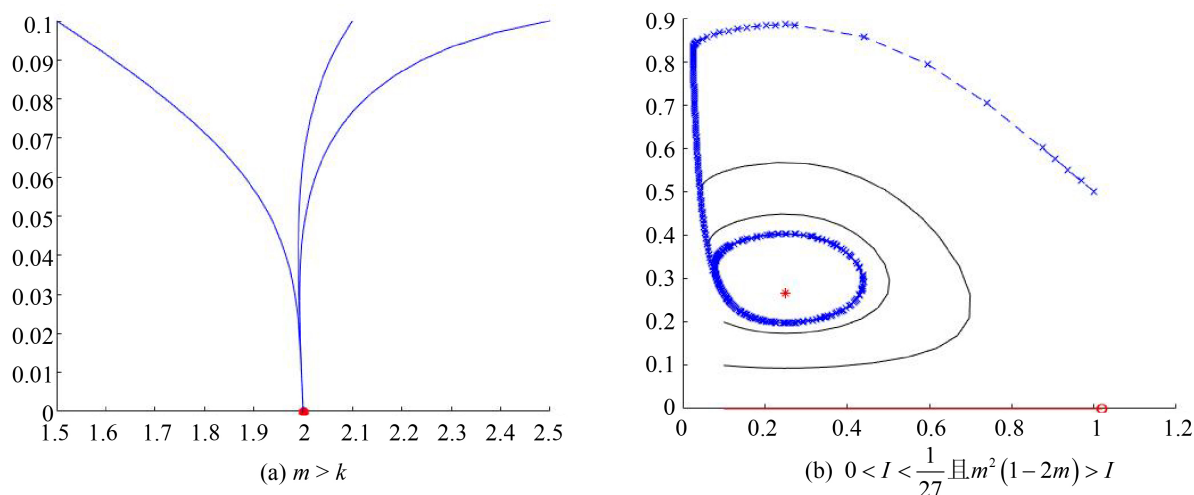


Figure 1. Trajectory with different parameter values

图 1. 不同参数值下的轨线

从图 1(a)可以看出, 当捕食者的自然死亡率大于一个数值时, 最终会灭绝. 食饵最终稳定在数值 k 附近. 这与模型的生物学意义一致.

从图 1(b)可以看出, 当捕食者的自然死亡率和食饵的投放率在一个合理的范围内时(即定理3中的条件满足), 食饵与捕食者的数量稳定在极限环的充分小邻域内, 产生周期振荡.

5. 结论

研究具有投放或收获的食饵-捕食者模型对生态系统的保护和持续发展具有重要的理论价值和实际指导意义. 因此本文对食饵具有常数投放率的两种群模型进行分析, 应用线性化方法, 讨论平衡

点的类型及其稳定性, 对于零特征值的情形, 采用级数展开把平衡点移到坐标原点进行讨论, 并采用适当的变换分析其类型. 对于极限环, 本文采用构造环域境界线的方式判断其存在性, 极限环存在的条件也就是两种群系统产生周期振荡的条件. 通过适当选取参数和设置初始条件, 运用Matlab 绘制了相应的轨线图, 进一步验证了结论的正确性.

参考文献

- [1] 陆忠华, 陈兰孙. 食饵种群具有常数投放率的捕食-食饵模型分支问题[J]. 数学杂志, 1994(4): 541-548.
- [2] 李传荣, 杨亚炜. 一类捕食者有投放率系统的定性分析[J]. 西安交通大学学报, 1995(8): 117-122.
- [3] 王清娟. 食饵具有常数投放率的Holling-IV类捕食系统的定性分析[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2018, 44(3): 213-216+228.
- [4] 王清娟. 食饵具常投放率的捕食-食饵模型的定性分析[J]. 宁夏大学学报(自然科学版), 2019, 40(2): 97-101.
- [5] 王清娟. 具常数投放率的捕食者-食饵模型的定性分析[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2017, 43(4): 339-343.
- [6] 梁桂珍, 张秦, 丰莹莹. 一类食饵具有投放率和捕食者具有捕获率的非自治捕食系统的全局分析[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(7): 288-292.
- [7] 张敬, 高文杰, 周莉. 两种群分别有常投放率和常收获率的Holling-IV类捕食系统[J]. 吉林大学学报(理学版), 2011, 49(1): 11-15.
- [8] Si, C.B. (2015) The Existence of Three Limit Cycles for Lotka-Volterra Systems with Two Species Both Having a Constant Harvest Rate or Investment Rate. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, **226**, 410-418.
- [9] 张芷芬, 丁同仁, 黄文造, 董镇喜. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985: 130-136.
- [10] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性方法与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 158-160.