Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(5), 2719-2729
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.115288

Hans汉斯

两个相位的非局部等周问题的基态解的存在性

黄帅飞

上海理工大学，上海

收稿日期：2022年4月23日；录用日期：2022年5月17日；发布日期：2022年5月24日

摘　要

本文主要研究了具有幂律势的两个相位的非局部等周问题。利用集中紧性原理，证明了具有两个相位的非局部等周问题基态解的存在性。本文是在泛函的极小值的存在性的背景下，研究了两个相位的非局部等周问题的基态解的存在性，主要运用集中紧性方法，证明了紧性成立，从而证明基态解的存在性。

关键词

非局部等周问题，基态，幂律势

Existence of Ground States Solutions for a Nonlocal Isoperimetric Problem with Two Phases

Shuaifei Huang

University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 23rd, 2022; accepted: May 17th, 2022; published: May 24th, 2022

Abstract

A nonlocal isoperimetric problem of two phases with power-law potentials is investigated. Using the concentration-compactness lemma, we prove the existence of ground states for the nonlocal isoperimetric problem with two phases. In this paper, the existence of the ground state solution of the nonlocal isoperimetric problem with two phases is investigated in the context of the existence of the minimal value of the generalized function, and the existence of the ground state solution is proved by proving that the compactness holds, using the method of concentration-compactness lemma.

文章引用: 黄帅飞. 两个相位的非局部等周问题的基态解的存在性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(5): 2719-2729.
DOI: 10.12677/aam.2022.115288

Keywords

Nonlocal Isoperimetric Problem, Ground States, Power-Low Potentials

1. 引言

两种或两种以上相互作用的物种的模型被广泛应用于许多科学领域，如物理、数学、化学、生物、力学等方向众多分支当中。如物理化学中的纳米粒子自组装、生物菌落的形成、两个物种群体共识问题和行人动力学问题等。所有这些模型的基本特征都是存在相互竞争的力量，目的是推动两个阶段走向不同的形状。结合数学的知识，我们就将其转化为考虑两个受交叉和自吸引相互作用的物种的变分模型。

2015 年，Choksi，Fetecau 和 Topaloglu 等人[1]建立了由幂律势组成的一类能量函数的全局最小值的存在，即他们考虑如下的能量函数的基态：

$$E(\rho)=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)\rho(x)\rho(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在限制条件

$$\mathcal{A}:=\left\{\rho\in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)\cap L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right):\rho\ge 0,\|\rho\|_{L^\infty}\le M,\int_{\mathbb{R}^N}\rho(x)\mathrm{d}x=m\right\}$$

下的极小值，这里 $K(x)=\frac{1}{p}|x|^{-p}-\frac{1}{q}|x|^{-q}$，对于 $q<p<N$ 且 $p,q\neq 0$，证明该泛函在 $\mathcal{A}$ 下存在一个极小值。

2019年，Zhang guoqing，Geng xiaoqian [2]研究了如下形式的泛函：

$$E(u)=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)u(x)u(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u(x)\mathrm{d}x$$

在 $\mathcal{A}$ 限制下

$$\mathcal{A}:=\left\{u:BV\left(\mathbb{R}^N;\{0,1\}\right),\int_{\mathbb{R}^N}u\mathrm{d}x=m\right\}$$

极小值的存在性。其中 $N>2$，幂律势 $K(x)=\frac{1}{p}|x|^{-p}-\frac{1}{q}|x|^{-q}$， $q<p<N$。

2. 预备知识和基本引理

本文研究了如下泛函的基态

$$\begin{aligned}E(f_1,f_2)=&\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla f_1|+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla f_2|+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)f_1(x)f_1(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)f_2(x)f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f_1(x)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f_2(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.1}$$

在约束 $\mathcal{A}_{m_1,m_2}$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{m_1,m_2}:=&\left\{(f_1,f_2)\in BV\left(\mathbb{R}^N;\{0,1\}\right)\times BV\left(\mathbb{R}^N;\{0,1\}\right):\right.\\&\left.\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}f_i(x)\mathrm{d}x=m_i,i=1,2,\ f_1(x)+f_2(x)\le 1,\text{ for a.e. }x\in\mathbb{R}^N\right\}\end{aligned}\tag{2.2}$$

上极小值的存在性。其中，$N>2$，$K(x)=\frac{1}{p}|x|^{-p}-\frac{1}{q}|x|^{-q}$，$q<p<N$。外部势能$V(x)$满足一些适当的条件，$E(f_1,f_2)$中的第一项和第二项是计算函数$(f_1,f_2)$的总变分，

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla f_i|=\sup\left\{\int_{\mathbb{R}^N} f_i div\phi \mathrm{d}x:\phi\in C_0^1\left(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N\right),|\phi|\le 1,i=1,2\right\} \tag{2.3}$$

因此，由(2.3)，问题(2.1)可以被看作是如下有限周长集合上的最小化问题：

$$\min\left\{P(E_1)+P(E_2)+\int_{E_1}\int_{E_1}K(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{E_2}\int_{E_2}K(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right.$$
$$\left.-\int_{E_1}V(x)\mathrm{d}x-\int_{E_2}V(x)\mathrm{d}x:|E_i|=m_i,i=1,2\right\}$$

其中$|E_i|$表示$E_i(i=1,2)$的 Lebesgue 测度，$E_1\cap E_2=\varnothing$，且$P(E_i)$表示他的周长。

现在，定义如下的$e(m_1,m_2)$：

$$e(m_1,m_2):=\inf\left\{E(f_1,f_2):(f_1,f_2)\in BV\left(\mathbb{R}^N;\{0,1\}\right)\times BV\left(\mathbb{R}^N;\{0,1\}\right)\right.$$
$$\left.\int_{\mathbb{R}^N} f_i\mathrm{d}x=m_i,f_1(x)+f_2(x)\le 1\right\}$$

此外，我们还通过定义了无穷远处的最小值问题$e_0(m_1,m_2)$：

$$e_0(m_1,m_2):=\inf\left\{E_0(f_1,f_2):(f_1,f_2)\in BV\left(\mathbb{R}^N;\{0,1\}\right)\times BV\left(\mathbb{R}^N;\{0,1\}\right):\right.$$
$$\left.\int_{\mathbb{R}^N} f_i(x)\mathrm{d}x=m_i,i=1,2,f_1(x)+f_2(x)\le 1\right\}$$

其中

$$E_0(f_1,f_2)=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla f_1|+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla f_2|+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)f_1(x)f_1(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)f_2(x)f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

引理 2.1

假设$\{F_n\}$和$\{E_n\}$是$R^{\mathbb{N}}$中具有一致有界测度的可测集序列，且对所有的n成立$|F_n\cap E_n|=0$。我们定义$F_n\to F$ （全局)，若$|F_n\Delta F|\to 0$，$F_n\to F$ （局部)，如果对任一紧集$K\subset R^{\mathbb{N}}$，$|(F_n\Delta F)\cap K|\to 0$。假设对于一些可测集$F$

$$F_n\to F\ \text{(全局的)和}\ E_n\to 0\ \text{(局部的)}$$

对于一些可测集F，那么我们有

$$I(F_n\cup E_n)=I(F_n)+I(E_n)+o(1) \tag{2.4}$$

和

$$I(F_n)=I(F)+o(1) \tag{2.5}$$

这里$I(A)=\int_A\int_A D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D(x)\in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$，$\lim_{|x|\to\infty}D(x)=0$，$A$是$\mathbb{R}^N$的一个可测集。

证明：首先我们注意到

$$\left|I(F_n,E_n)-I(F,E_n)\right|\le\left|I(F_n\Delta F,E_n)\right|=\left|\int_{F_n\Delta F}\int_{E_n}D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\to 0 \tag{2.6}$$

当$n\to\infty$，其中$F_n\Delta F:=(F_n\setminus F)\cup(F\setminus F_n)$。现在，我们断言当$n\to\infty$，

$$I(F_n,E_n)=\int_{F_n}\int_{E_n}D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\to 0$$

实际上，对任给 $\varepsilon>0$，我们选择 $R>0$，使得

$$\left|\int_F D(x-y)\mathrm{d}y\right|\le\varepsilon$$

对任何 $|x|\ge R$。我们有

$$\begin{aligned}\left|I(F,E_n)\right|&=\left|I(F,E_n\cap B_R)+I(F,E_n\setminus B_R)\right|\\&\le\int_F\int_{E_n\cap B_R}D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\varepsilon\left|E_n\setminus B_R\right|\end{aligned}$$

这里的 B_R 表示以 $0\in\mathbb{R}^N$ 为圆心半径为 R 的开球。因为当 $n\to\infty$， $E_n\to 0$ (局部的)，我们有当 $\left|E_n\cap B_R\right|\to 0$，由(2.6)，我们得到，当 $n\to\infty$

$$I(F_n,E_n)=\int_{F_n}\int_{E_n}D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\to 0$$

也就是说，

$$I(F_n\cup E_n)=I(F_n)+I(E_n)+o(1)$$

类似于(2.4)的证明，我们可以得到(2.5)。

引理2.2

若 $0<q<p<N$，

$$\begin{aligned}E_0(f_1,f_2)=&\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla f_1|+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)f_1(x)f_1(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla f_2|+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)f_2(x)f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

那么，我们有

$$e(m_1,m_2)\le e(m_{10},m_{20})+e_0(m_{11},m_{21})+e_0(m_1-m_{10}-m_{11},m_2-m_{20}-m_{21})\tag{2.7}$$

其中 $0\le m_{i0}+m_{i1}\le m\,(i=1,2)$。

证明：首先，我们证明下面的不等式

$$e(m_1,m_2)\le e(m_{10},m_{20})+e_0(m_{11},m_{21}),m_i=m_{i0}+m_{i1},(i=1,2)\tag{2.8}$$

实际上，不等式(8)可以通过以下的过程得到：对任给 $\varepsilon>0$，存在一对有界集 Ω_{i0} 和 $\Omega_{i1}\,(i=1,2)$ 成立

$$E_0(\chi_{\Omega_{10}},\chi_{\Omega_{20}})\le e_0(m_{10},m_{20})+\varepsilon \text{ 和 } E_0(\chi_{\Omega_{11}},\chi_{\Omega_{21}})\le e_0(m_{11},m_{21})+\varepsilon\tag{2.9}$$

因此，我们可以选择 $R>0$ 使得 $\Omega_{i0},\Omega_{i1}\subset B_R(0)(i=1,2)$。我们定义 $\tilde{\Omega}_i=\Omega_{i0}+(d+\Omega_{i1})$，其中 d 是一个位移矢量，且 $|d|>2R$，因此，$\left|\tilde{\Omega}_i\right|=\left|\Omega_{i0}\right|+\left|\Omega_{i1}\right|=m_{i0}+m_{i1}(i=1,2)$。注意到对于 $x\in\Omega_{i0}$ 和 $y\in d+\Omega_{i1}$，我们有

$$0<|d|-2R\le|x-y|\le|d|+2R\tag{2.10}$$

具体来说，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\chi_{\tilde{\Omega}_i}\right|=\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\chi_{\Omega_{i0}}\right|+\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\chi_{\Omega_{i1}}\right|\tag{2.11}$$

和

$$\begin{aligned}E\left(\chi_{\tilde{\Omega}_1},\chi_{\tilde{\Omega}_2}\right)=&\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\chi_{\tilde{\Omega}_1}\right|+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)\chi_{\tilde{\Omega}_1}(x)\chi_{\tilde{\Omega}_1}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\chi_{\tilde{\Omega}_2}\right|+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)\chi_{\tilde{\Omega}_2}(x)\chi_{\tilde{\Omega}_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&-\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\chi_{\tilde{\Omega}_2}(x)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\chi_{\tilde{\Omega}_1}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.12}$$

和

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\chi_{\tilde{\Omega}_1}\right|+\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\chi_{\tilde{\Omega}_2}\right|=\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\chi_{\Omega_{10}}\right|+\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\chi_{\Omega_{11}}\right|+\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\chi_{\Omega_{20}}\right|+\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\chi_{\Omega_{21}}\right| \tag{2.13}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)\chi_{\tilde{\Omega}_1}(x)\chi_{\tilde{\Omega}_1}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)\chi_{\Omega_{10}}(x)\chi_{\Omega_{10}}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)\chi_{\Omega_{10}}(x)\chi_{\Omega_{11}+d}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)\chi_{\Omega_{11}+d}(x)\chi_{\Omega_{11}+d}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{2.14}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)\chi_{\tilde{\Omega}_2}(x)\chi_{\tilde{\Omega}_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)\chi_{\Omega_{20}}(x)\chi_{\Omega_{20}}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)\chi_{\Omega_{20}}(x)\chi_{\Omega_{21}+d}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)\chi_{\Omega_{21}+d}(x)\chi_{\Omega_{21}+d}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{2.15}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\chi_{\tilde{\Omega}_1}(x)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\chi_{\tilde{\Omega}_2}(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\chi_{\Omega_{10}}(x)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\chi_{\Omega_{20}}(x)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\chi_{\Omega_{11}+d}(x)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\chi_{\Omega_{21}+d}(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.16}$$

结合(2.11)~(2.16)，我们得到

$$\begin{aligned}e(m_1,m_2)&\le E\left(\chi_{\tilde{\Omega}_1},\chi_{\tilde{\Omega}_2}\right)\\&=E\left(\chi_{\Omega_{10}},\chi_{\Omega_{20}}\right)+E_0\left(\chi_{\Omega_{11}},\chi_{\Omega_{21}}\right)\\&\quad+2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)\chi_{\Omega_{10}}(x)\chi_{\Omega_{11}+d}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)\chi_{\Omega_{20}}(x)\chi_{\Omega_{21}+d}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad-\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\chi_{\Omega_{11}+d}(x)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\chi_{\Omega_{21}+d}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由(2.9)和(2.10)，

$$\begin{aligned}e(m_1,m_2)\le\ & e(m_{10},m_{20})+e_0(m_{11},m_{21})+2\varepsilon+\frac{2}{p}m_{10}m_{11}(|d|-2R)^{-p}\\&+\frac{2}{q}m_{10}m_{11}(|d|+2R)^{-q}+\frac{2}{p}m_{20}m_{21}(|d|-2R)^{-p}+\frac{2}{q}m_{20}m_{21}(|d|+2R)^{-q}\\&+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\chi_{d+\Omega_{11}}\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\chi_{d+\Omega_{21}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

当$|d|\to\infty$和$\varepsilon\to 0$，我们得到(2.8).

接下来，我们证明下面的不等式

$$e_0(m_1,m_2)\le e_0(m_{10},m_{20})+e_0(m_{11},m_{21}),\ m_i=m_{i0}+m_{i1}\ (i=1,2) \tag{2.17}$$

同(2.8)的证明一样，假设Ω_{i0}和Ω_{i1}是有界的集合，且

$$E_0\left(\chi_{\Omega_{10}},\chi_{\Omega_{20}}\right)\le e_0(m_{10},m_{20})+\varepsilon \text{ 和 } E_0\left(\chi_{\Omega_{11}},\chi_{\Omega_{21}}\right)\le e_0(m_{11},m_{21})+\varepsilon \tag{2.18}$$

通过考虑 $\tilde{\Omega}_i = \Omega_{i0} + (d + \Omega_{i1})$，其中 d 是一个位移矢量，我们有

$$\begin{aligned} E_0\left(\chi_{\tilde{\Omega}_1}, \chi_{\tilde{\Omega}_2}\right) = &\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla \chi_{\tilde{\Omega}_1}\right| + \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla \chi_{\tilde{\Omega}_2}\right| \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} K(x-y)\chi_{\tilde{\Omega}_1}(x)\chi_{\tilde{\Omega}_1}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} K(x-y)\chi_{\tilde{\Omega}_2}(x)\chi_{\tilde{\Omega}_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{2.19}$$

结合(2.19)和(2.12)~(2.15)，我们有

$$\begin{aligned} e_0(m_1, m_2) &\le E_0\left(\chi_{\tilde{\Omega}_1}, \chi_{\tilde{\Omega}_2}\right) \\ &= E_0\left(\chi_{\Omega_{10}}, \chi_{\Omega_{20}}\right) + E_0\left(\chi_{\Omega_{11}}, \chi_{\Omega_{21}}\right) \\ &\quad + \frac{2}{p} m_{10} m_{11} \left(|d| - 2R\right)^{-p} + \frac{2}{q} m_{10} m_{11} \left(|d| + 2R\right)^{-q} \\ &\quad + \frac{2}{p} m_{20} m_{21} \left(|d| - 2R\right)^{-p} + \frac{2}{q} m_{20} m_{21} \left(|d| + 2R\right)^{-q} \end{aligned}$$

由(2.10)和(2.18)，我们得到，当 $|d| \to \infty$ 和 $\varepsilon \to 0$，(2.17)仍然成立。
结合(2.8)和(2.17)，我们有

$$e(m_1, m_2) \le e(m_{10}, m_{20}) + e_0(m_{11}, m_{21}) + e_0(m_1 - m_{10} - m_{11}, m_2 - m_{20} - m_{21})$$

这样就完成了引理2.2的证明。

3. 主要结果及证明

本文的主要结果如下：

定理3.1 [3]

假设 $0 < q < p < N$， $K(x) = \frac{1}{p}|x|^{-p} - \frac{1}{q}|x|^{-q}$， $V(x)$ 满足(L1)和(L2)，

(L1) $V \ge 0$ 和 $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$，

(L2) $\lim_{|x| \to \infty} V(x) = 0$ 。

那么对任意 $m_i > 0\ (i = 1, 2)$，问题(2.1)在 $\mathcal{A}_{m_1, m_2}$ 上存在一个基态解。

证明：当 $0 < q < p < N$，因为 $\lim\limits_{|x| \to \infty} K(x) = 0$ 和 $\lim\limits_{|x| \to 0} K(x) = +\infty$，我们得出

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} K(x) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \text{ 和 } K(x) \ge \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

由(L1)和(L2)，我们选择 $R > 0$ 使得 $V(x) \le 1$，对 $|x| \ge R$，我们有

$$\begin{aligned} E(f_1, f_2) = &\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_1| + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} K(x-y) f_1(x) f_1(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f_1(x)\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_2| + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} K(x-y) f_2(x) f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f_2(x)\mathrm{d}x \\ \ge &\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f_1(x) f_1(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\{|x| \ge R\}} f_1(x)\mathrm{d}x - \int_{\{|x| < R\}} V(x) f_2(x)\mathrm{d}x \\ &+ \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f_2(x) f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\{|x| \ge R\}} f_2(x)\mathrm{d}x - \int_{\{|x| < R\}} V(x) f_1(x)\mathrm{d}x \\ \ge &\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\left(m_1^2 + m_2^2\right) - 2\|V\|_{L^1(B_R)} - (m_1 + m_2) \end{aligned}$$

这表明 $e(m_1,m_2)$ 是下有界的。

由以上可得问题(2.1)存在一个极小化序列 (f_{1n},f_{2n})，因为 $(f_{1n},f_{2n})\subset BV(\mathbb{R}^N;\{0,1\})\times BV(\mathbb{R}^N;\{0,1\})$，$\int_{\mathbb{R}^N} f_{in}(x)\mathrm{d}x=m_i$，由[4]我们得极小化序列有一致有界的周长。为了简化证明，我们定义有限周长集 $\{\Omega_{in}\}\subset\mathbb{R}^N$ 满足 $\chi_{\Omega_{in}}=f_{in}$，且对所有的 $n\in N$ 有 $|\Omega_{in}|=m_i$。利用[5]中的推论(12.27)，存在一个子序列 $\{f_{in}\}$ 和有限周长集 $\Omega_i^0\subset\mathbb{R}^N$ 满足在 $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ 中有 $f_{in}\to\chi_{\Omega_i^0}$。

将证明过程分为如下5步

结论1. 在以下四种情况下：

情况 1：$0<m_{10}<m_1$，$0<m_{20}<m_2$。

情况 2：$0<m_{10}=m_1$，$0<m_{20}<m_2$。

情况 3：$0<m_{10}<m_1$，$0=m_{20}<m_2$。

情况 4：$0<m_{10}=m_1$，$0=m_{20}<m_2$。

都成立下面的不等式

$$e(m_1,m_2)\geq e(m_{10},m_{20})+e_0(m_{11},m_{21})+e_0(m_1-m_{10}-m_{11},m_2-m_{20}-m_{21}) \tag{3.1}$$

其中 $0<m_{10}+m_{11}\leq m_1$ 和 $0<m_{20}+m_{21}\leq m_2$ $(i=1,2)$。

现在，我们将不等式(3.1)分为以下四种情况证明。

情况 1：$0<m_{10}<m_1$，$0<m_{20}<m_2$。

第一步：为了证明不等式(3.1)成立，实际上，我们假设 $0<|\Omega_i^0|<m_i$ $(i=1,2)$。由[6]的引理 2.2 知，存在一个序列 $\{r_{in}\}$ $(i=1,2)$，使得有如下的集合

$$G_{in}^0=\Omega_{in}\cap B_{r_n} \text{ 和 } H_{in}^0=\Omega_{in}\cap\left(\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_{r_n}}\right)$$

然后我们令 $r_n=\max\{r_{1n},r_{2n}\}$，使得

$$G_{in}^0=\Omega_{in}\cap B_{r_n} \text{ 和 } H_{in}^0=\Omega_{in}\cap\left(\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_{r_n}}\right)$$

满足

$$\lim_{n\to\infty}\left(P(\Omega_{in})-P(G_{in}^0)-P(H_{in}^0)\right)=0$$

和

$$G_{in}^0\to\Omega_i^0 \text{ (全局的)和 } H_{in}^0\to\varnothing \text{ (局部的)}$$

特别地，

$$\lim_{n\to\infty}|G_{in}^0|=|\Omega_i^0|=m_{i0} \text{ 和 } \liminf_{n\to\infty}P(G_{in}^0)\geq P(\Omega_i^0)$$

我们表示 $g_{in}^0=\chi_{G_{in}^0}$，$g_i^0=\chi_{\Omega_i^0}$，$\Omega_{in}^0=H_{in}^0$ 和 $f_{in}^0=\chi_{\Omega_{in}^0}$ $(i=1,2)$，由[7]，使得在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中 $f_{in}=g_{in}^0+f_{in}^0=g_i^0+f_{in}^0+o(1)$，在 $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ 中 $f_{in}^0\to 0$。由[8]的引理 4，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^N}Vf_{in}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}V(g_{in}^0+f_{in}^0)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}Vg_i^0\mathrm{d}x+o(1)$$

由引理2.1，我们得到

$$\begin{aligned}E(f_{1n},f_{2n})&=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla f_{1n}|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla f_{2n}|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)f_{1n}(x)f_{1n}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x-y)f_{2n}(x)f_{2n}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^N}Vf_{1n}\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}Vf_{2n}\mathrm{d}x\\&\geq E(g_{1n}^0,g_{2n}^0)+E_0(f_{1n}^0,f_{2n}^0)+o(1)\end{aligned}$$

第二步：正如第一步的证明，我们用 $\{f_{in}^0\}$ 替代 $\{f_{in}\}$，$\{\Omega_{in}^0\}$ 替代 $\{\Omega_{in}\}$。由[9]，很容易知道在 $L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ 中 $f_{in}^0=\chi_{\Omega_{in}^0}\to 0$ 和 $|\Omega_{in}^0|=m_i-m_{i0}+o(1)$，由[10]的命题 2.1，我们得到存在集合 $\{\Omega_i^1\}$，$0<|\Omega_i^1|<m_i-m_{i0}$ 和序列 $\{x_{in}\}\subset\mathbb{R}^N\ (i=1,2)$ 使得 $\chi_{\Omega_{in}^0-x_{in}}\to\chi_{\Omega_i^1}$（局部的）。

注意到由[11]，得在 $L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ 中 $\chi_{\Omega_{in}^0}\to 0$，我们有当 $n\to\infty$ 时，$x_{in}\to\infty$。而且，通过类似的论证，我们还得到了集合 $\{\Omega_{in}^0-x_{in}\}=\{G_{in}^1\}\cup\{H_{in}^1\}$ 满足

$$\text{在 } L^1(\mathbb{R}^N) \text{ 中 } \chi_{G_{in}^1}\to\chi_{\Omega_i^1} \text{ 和在 } L_{loc}^1(\mathbb{R}^N) \text{ 中 } \chi_{H_{in}^1}\to 0$$

再一次，我们有

$$E(f_{1n}^0,f_{2n}^0)=E_0(f_{1n}^0,f_{2n}^0)+o(1)\ge E_0(g_1^1,g_2^1)+E_0(f_{1n}^1,f_{2n}^1)+o(1)$$

其中 $g_i^1=\chi_{\Omega_i^1}$，$f_{in}^1=\chi_{H_{in}^1+x_{in}}$ 和 $|H_{in}^1|=|H_{in}^0|-m_{i1}+o(1)$，我们令 $\Omega_{in}^1=H_{in}^1+x_{in}$，$f_{in}^1(x)=\chi_{H_{in}^1+x_{in}}(x)$。因此，我们有

$$\begin{aligned}E(f_{1n},f_{2n})&\ge E(g_1^0,g_2^0)+E_0(f_{1n}^0,f_{2n}^0)+o(1)\\&\ge E(g_1^0,g_2^0)+E_0(g_1^1,g_2^1)+E_0(f_{1n}^1,f_{2n}^1)+o(1)\end{aligned}$$

且 $m_i=m_{i0}+m_{i1}+|\Omega_{in}^1|+o(1)$。由[12]的引理 4.8 得到

$$e(m_1,m_2)\ge e(m_{10},m_{20})+e_0(m_{11},m_{21})+e_0(m_1-m_{10}-m_{11},m_2-m_{20}-m_{21})$$

情况 2：$0<m_{10}=m_1$，$0<m_{20}<m_2$。由情况 1 的第一步，有下面的结论

$$E(f_{1n},f_{2n})\ge E(g_1^0,g_2^0)+E_0(f_{1n}^0,f_{2n}^0)+o(1)$$

当 $m_{10}=m_1$，则 $m_{11}=m_1-m_{10}=0$。由 $g_{1n}^1=\chi_{G_{1n}^1}$，$g_1^1=\chi_{\Omega_1^1}$，使得 $g_1^1=\chi_{\Omega_1^1}=|\Omega_1^1|$ 和 $\lim_{n\to\infty}|G_{1n}^1|=|\Omega_1^1|=m_{11}=0$，我们可以得到

$$E(f_{1n}^0,f_{2n}^0)=E_0(f_{1n}^0,f_{2n}^0)\ge E_0(0,g_2^1)+E_0(f_{1n}^1,f_{2n}^1)+o(1)$$

因此，这表明

$$\begin{aligned}E(f_{1n},f_{2n})&\ge E(g_1^0,g_2^0)+E_0(f_{1n}^0,f_{2n}^0)+o(1)\\&\ge E(g_1^0,g_2^0)+E_0(0,g_2^1)+E_0(f_{1n}^1,f_{2n}^1)+o(1)\end{aligned}$$

且我们有

$$E(f_{1n},f_{2n})\ge E(g_1^0,g_2^0)+E_0(g_1^1,g_2^2)+E_0(f_{1n}^1,f_{2n}^1)+o(1)$$

所以，我们得到

$$e(m_1,m_2)\ge e(m_{10},m_{20})+e_0(m_{11},m_{21})+e_0(m_1-m_{10}-m_{11},m_2-m_{20}-m_{21})$$

情况3与情况4可同理得到。

因此，我们得到

$$e(m_1,m_2)\ge e(m_{10},m_{20})+e_0(m_{11},m_{21})+e_0(m_1-m_{10}-m_{11},m_2-m_{20}-m_{21})$$

综上，我们证明了对以上四种情况(3.1)是成立的。

结论 2. 我们要证明 $\left|\Omega_i^0\right| \neq 0$，即消逝性是不成立的。

事实上，若 $\left\{f_{in}^1\right\} = \left\{f_{in}\right\}$。我们定义一个序列为 $\left\{g_{in}\right\} = \left\{f_{in}\left(x + x_{in}\right)\right\}$，且

$$\text{在 } L^1\left(R^{\mathbb{N}}\right) \text{ 中 } \chi_{G_{in}^1} \to \chi_{\Omega_i^1} \text{ 和在 } L_{loc}^1\left(R^{\mathbb{N}}\right) \text{ 中 } \chi_{H_{in}^1} \to 0$$

因此，由[13]的引理 4 和 $E\left(f_1, f_2\right)$ 中前四项的平移不变性，我们推出

$$E\left(g_{1n}, g_{2n}\right) - E\left(f_{1n}, f_{2n}\right) = -\int_{\mathbb{R}^N} V \chi_{\Omega_1^1} \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} V \chi_{\Omega_2^1} \mathrm{d}x < 0$$

又因为 $E\left(g_{1n}, g_{2n}\right) - E\left(f_{1n}, f_{2n}\right) > 0$，这是一个矛盾，所以我们得出 $\left|\Omega_i^0\right| \neq 0$。

结论 3. 证明 $e\left(m_{10}, m_{20}\right) = E\left(g_1^0, g_2^0\right)$ 和 $e_0\left(m_{11}, m_{21}\right) = E_0\left(g_1^1, g_2^1\right)$ 成立。实际上，由引理 2.2，我们有

$$e\left(m_1, m_2\right) \leq e\left(m_{10}, m_{20}\right) + e_0\left(m_{11}, m_{21}\right) + e_0\left(m_1 - m_{10} - m_{11}, m_2 - m_{20} - m_{21}\right)$$

且由(3.1)，得出

$$\begin{aligned} & e\left(m_{10}, m_{20}\right) + e_0\left(m_{11}, m_{21}\right) + e_0\left(m_1 - m_{10} - m_{11}, m_2 - m_{20} - m_{21}\right) \\ & \geq e\left(m_1, m_2\right) \geq E\left(g_1^0, g_2^0\right) + E_0\left(g_1^1, g_2^1\right) + \liminf_{n \to \infty} E_0\left(f_{1n}^1, f_{2n}^1\right) \\ & \geq e\left(m_{10}, m_{20}\right) + e_0\left(m_{11}, m_{21}\right) + e_0\left(m_1 - m_{10} - m_{11}, m_2 - m_{20} - m_{21}\right) \end{aligned}$$

因此，这表明

$$\begin{aligned} E\left(f_{1n}, f_{2n}\right) & \geq E\left(g_1^0, 0\right) + E_0\left(f_{1n}^0, f_{2n}^0\right) + o(1) \\ & \geq E\left(g_1^0, 0\right) + E_0\left(g_1^1, g_2^1\right) + E_0\left(f_{1n}^1, f_{2n}^1\right) + o(1) \end{aligned}$$

所以，$E\left(g_1^0, g_2^0\right) = e\left(m_{10}, m_{20}\right)$ 和 $E_0\left(g_1^1, g_2^1\right) = e_0\left(m_{11}, m_{21}\right)$ 成立。

结论 4. 我们断言 $\left|\Omega_i^0\right| = m_i\ (i = 1, 2)$

由[14]中极小值的正则性，存在 $R > 0$ 使得 $\Omega_i^0, \Omega_i^1 \subset B_R(0)\ (i = 1, 2)$。令 $a \in S^{N-1}$ 是任一单位向量，这里 S^{N-1} 表示 $R^{\mathbb{N}}$ 中的单位球。对充分大的 t，有 $\Omega_i^0 \cap \left(\Omega_i^1 + ta\right) = \varnothing\ (i = 1, 2)$。现在，定义

$$h_{i1}(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p}|x - y|^{-p} - \frac{1}{q}|x - y|^{-q}\right) g_i^0(x) g_i^1(y - ta) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

和

$$h_{i2}(t) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x) g_i^1(x - ta) \mathrm{d}x$$

因为对充分大的 $|x|$，$K(x) < 0$，所以对充分大的 t，

$$h_{i1}(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p}|x - y|^{-p} - \frac{1}{q}|x - y|^{-q}\right) g_i^0(x) g_i^1(y - ta) \mathrm{d}x \mathrm{d}y < 0$$

和

$$h_{i2}(t) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x) g_i^1(x - ta) \mathrm{d}x > 0$$

因此，对任给 $\varepsilon > 0$，选择 $t_0 > 0$ 使得

$$h_{i1}\left(t_0\right) - h_{i2}\left(t_0\right) < -\varepsilon < 0$$

且存在一个紧集 $G_i = G_i(\varepsilon)$，$\left|G_i\right| = m_i - m_{i0} - m_{i1}$ 使得

$$E_0\left(\chi_{G_1}, \chi_{G_2}\right) < e_0\left(m_1 - m_{10} - m_{11}, m_2 - m_{20} - m_{21}\right) + \frac{\varepsilon}{3}$$

DOI: 10.12677/aam.2022.115288

和

$$-\frac{\varepsilon}{3}<\int_{\Omega_i^1+ta}\int_{G_{i\tau}}K(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0$$

由测试函数 $g_i(x)=g_i^0(x)+g_i^1(x-t_0a)+\chi_{G_{i\tau}}$，且对 $e(m_1,m_2)$ 是可容许的，由引理 2.1，得

$$\begin{aligned}e(m_1,m_2)\le E(g_1,g_2)\\&=E(g_1^0,g_2^0)+E_0(g_1^1,g_2^1)+E_0(\chi_{G_{1\tau}},\chi_{G_{2\tau}})+2h_{11}(t_0)\\&\quad+2h_{21}(t_0)+2\int_{\Omega_1^0}\int_{G_{1\tau}}K(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\int_{\Omega_2^0}\int_{G_{2\tau}}K(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+2\int_{\Omega_1^1+ta}\int_{G_{1\tau}}K(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\int_{\Omega_2^1+ta}\int_{G_{2\tau}}K(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\le e(m_{10},m_{20})+e_0(m_{11},m_{21})+e_0(m_1-m_{10}-m_{11},m_2-m_{20}-m_{21})-\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

所以，它与(3.1)矛盾。即 $\left|\Omega_i^0\right|=m_i\ (i=1,2)$。

结论 5. 问题(2.1)在 $\mathcal{A}_{m_1,m_2}$ 上存在基态解。

事实上，$\{f_{in}\}_{n\in N}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中是局部收敛的，即存在一个子序列在 $\mathbb{R}^N$ 中几乎处处收敛。此外，因为

$$\|f_{in}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}=\left\|\chi_{\Omega_i^0}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}=m_i\ (i=1,2)$$

我们得到，在 $L^1(\mathbb{R}^N)$ 中

$$(f_{1n},f_{2n})\to\left(\chi_{\Omega_1^0},\chi_{\Omega_2^0}\right)$$

因为 $\left|\Omega_i^0\right|=m_i\ (i=1,2)$，由 Brezis-Lieb 引理，[12]中的命题 4.29 的弱下半连续性和引理 2.1，我们得出问题(2.1)在 $\mathcal{A}_{m_1,m_2}$ 上存在一个基态解。

由结论 1、结论 2、结论 3、结论 4 和结论 5，定理 3.1 得证。

本文得到了非局部等周问题的存在性，我们也可以考虑这个问题在 $q=-2$ 的情况下，该结论是否还是成立的，这是一个很值得我们去思考的问题。

参考文献

[1] Choksi, R., Fetecau, R.C. and Topaloglu, I. (2015) On Minimizers of Interaction Functionals with Competing Attractive and Repulsive Potentials. *Annales de L'institut Henri Poincaré Analyse non Linéaire*, **32**, 1283-1305. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2014.09.004

[2] Zhang, G. and Geng, X. (2019) On an Isoperimetric Problem with Power-Law Potentials and External Attraction. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **482**, Article ID: 123521. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123521

[3] Alama, S., Bronsard, L., Choksi, R. and Topaloglu, I. (2017) Ground-States for the Liquid Drop and TFDW Models with Long-Range Attraction. *Journal of Mathematical Physics*, **58**, Article ID: 103503. https://doi.org/10.1063/1.4999495

[4] Burchard, A., Choksi, R. and Topaloglu, I. (2018) Nolocal Shape Optimization via Interactions of Attractive and Repulsive Potentials. *Indiana University Mathematics Journal*, **67**, 375-395. https://doi.org/10.1512/iumj.2018.67.6234

[5] Maggi, F. (2012) Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Journey. Cambridge University Press, Cambridge.

[6] Frank, R.L. and Lieb, E.H. (2015) A Compactness Lemma and Its Application to the Existence of Minimizers for the Liquid Model. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **47**, 4436-4450. https://doi.org/10.1137/15M1010658

[7] Bonacini, M., Knüphr, H. and Röger, M. (2016) Optimal Distribution of Oppositely Charged Phase: Perfect Screening and Other Properties. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **48**, 1128-1154. https://doi.org/10.1137/15M1020927

[8] Lu, J. and Otto, F. (2015) An Isoperimetric Problem with Coulomb Repulsion and Attraction to a Background Nucleus. https://arxiv.org/abs/1508.07172

[9] Bonacini, M. and Cristorferi, R. (2014) Local and Global Minimality Results for a Nonlocal Isoperimetric Problem. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **46**, 2310-2349. https://doi.org/10.1137/130929898

[10] Cicalese, M., Luca, L.D. and Novaga, M. (2014) Ground States of a Two Phase Model with Cross and Self Attractive Interactions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **48**, 3412-3443. https://doi.org/10.1137/15M1033976

[11] Milbers, Z. and Schuricht, F. (2011) Some Special Aspects Related to the 1-Laplace Operator. *Advances in Calculus of Variations*, **4**, 101-126. https://doi.org/10.1515/acv.2010.021

[12] Castro, A.D., Novaga, M., Ruffini, B. and Valdinoci, E. (2015) Nonlocal Quantitative Isoperimetric Inequalities. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **54**, 2421-2464. https://doi.org/10.1007/s00526-015-0870-x

[13] Chang, K.C. (2009) The Spectrum of the 1-Laplace Operator. *Communications in Contemporary Mathematics*, **11**, 865-894. https://doi.org/10.1142/S0219199709003570

[14] Carlen, E.A., Carvalho, M., Esposito, R., Lebowitz, J.L. and Marra, R. (2003) Free Energy Minimizers for a Two-Species Model with Segregation and Liquid-Vapor Transition. *Nonlinearity*, **16**, 1075-1105. https://doi.org/10.1088/0951-7715/16/3/316