Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(5), 2927-2932**
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.115311

Hans汉斯

一类非线性SDE的解的存在唯一性及其显式解

邹　峰，陈　倩，连保胜

武汉科技大学理学院数学与统计系，湖北　武汉

收稿日期：2022年4月25日；录用日期：2022年5月19日；发布日期：2022年5月27日

摘　要

本文运用Holder不等式、Gronwall不等式等基础工具，从简单的常系数线性随机微分方程出发，通过取积分因子，将非线性随机微分方程变成确定性的微分方程，再经过适当变换，得到它的解，以此证明解的存在性和唯一性。

关键词

非线性随机微分方程，解的存在性和唯一性，Holder不等式，Gronwall不等式，显式解

Existence and Uniqueness of Solutions for a Class of Nonlinear SDE and Their Explicit Solutions

Feng Zou, Qian Chen, Baosheng Lian

Department of Mathematics and Statistics, College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan Hubei

Received: Apr. 25th, 2022; accepted: May 19th, 2022; published: May 27th, 2022

Abstract

This paper uses Holder inequality, Gronwall inequality and other basic tools, starting from a simple linear stochastic differential equation with constant coefficients, by taking the integral factor, the nonlinear stochastic differential equation is transformed into a deterministic differential equation, and then through appropriate transformation, we get its solution, so as to prove the existence and uniqueness of the solution.

文章引用：邹峰，陈倩，连保胜．一类非线性 SDE 的解的存在唯一性及其显式解[J]．应用数学进展，2022，11(5): 2927-2932. DOI: 10.12677/aam.2022.115311

Keywords

Nonlinear Stochastic Differential Equations, Existence and Uniqueness of Solutions, Holder Inequality, Gronwall Inequality, Explicit Solution

1. 前言

随机微分方程最早出现在 20 世纪初期，其概念最早以布朗运动形式，由爱因斯坦提出，而后，其严格数学定义由伊藤清和 Stratonovich 完成。今天，随机微分方程在物理、化学、经济与金融、控制理论等诸多领域有着广泛应用[1] [2]。

随机微分方程的解的存在性与唯一性[3] [4] [5] [6] [7]，存在定理的证明，常使用 Picard 迭代[3] [4]，亦可使用不动点定理[3] [5] [6]，二者各有优点，其中，[6]利用非线性映射 Schauder-Tychonov 型不动点定理证明有界 Lipschitz 条件下非线性 SDE 解的存在性，[7]使用了比 Picard 迭代更有效的 Caratheodory 近似建立了存在唯一性理论。在一般方程中，一致 Lipschitz 条件，线性增长条件均难以满足[1] [3]，且迭代、近似过程繁复，本文仅以常系数线性方程为引，通过取积分因子，将非线性随机微分方程变成确定性的微分方程，以求解的方式证明解的存在性，从而避免了复杂的迭代过程，证明过程简练，可使我们方便理解，而且，如文中此类具有一定特征的非线性方程，一般均可采取此种方法将非线性随机微分方程变成确定性的微分方程，从而求解。

2. 预备知识

2.1. 定义 1

若 R^d 值随机过程 $X(t)$ 满足以下条件：

i) $X(t)$ 是连续适应过程

ii) $f(t,X(t))\in L^1(J,R^d)$，$g(t,X(t))\in L^2(J,R^{d\times m})$

iii) $X(t)$ 满足如下随机积分方程

$$X(t)=X_0+\int_{t_0}^{t} f(s,X(s))\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t} g(s,X(s))\mathrm{d}B(s)$$

则称 $X(t)$ 是随机微分方程的解，若 $X(t)$ 与随机微分方程的任何其它解 $\bar{X}(t)$ 无差别，即

$$P(X(t)=\bar{X}(t))=1$$

则说 $X(t)$ 是随机微分方程的唯一解。

2.2. 伊藤等距

假设 $g(t),t\in[0,T]$ 满足平方可积条件 $\int_0^t g^2(t)\mathrm{d}t<\infty$，对形如 $I(t)=\int_0^t g(s)\mathrm{d}B(s)$ 的伊藤积分，有

$$E\left[I^2(t)\right]=E\int_0^t g^2(s)\mathrm{d}s\text{。}$$

2.3. Holder 不等式

如果 $p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,f\in L^p,g\in L^q$，则 $fg\in L^1$，并且

$$\int\left|f(x)g(x)\right|\mathrm{d}x\le\left(\int\left|f(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int\left|g(x)\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

其中，等号在且只在 $|f|^p$ 和 $|g|^q$ 相差一个常数因子时成立。

2.4. Gronwall 不等式

设 $\varphi(t)$ 是 J 上的有界非负 Borel 可测函数，k,β 是非负常数，如果

$$\varphi(t)\le k+\beta\int_0^t\varphi(s)\mathrm{d}s,\quad 0\le t\le T$$

那么 $\varphi(t)\le k\exp(\beta t)$，$0\le t\le T$。

3. 随机微分方程解的存在唯一性

3.1. 线性随机微分方程

已知 $r(0)=r_0$，刻画利率 $r(t)$ 变动的 Wasicek 模型，即如下 SDE：

$$\mathrm{d}r(t)=(\alpha-\beta(t))\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t),\quad 0\le t\le T$$

其中，α,β,σ 均是大于 0 的常数，证明其解为：

$$r(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}r_0+\frac{\alpha}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta t}\right)+\mathrm{e}^{-\beta t}\sigma\int_0^t\mathrm{e}^{\beta s}\mathrm{d}B(s)$$

证明：先证唯一性，由定义 1，方程的解可以表示为

$$r(t)=r_0+\int_0^t(\alpha-\beta r(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma\mathrm{d}B(s)$$

和

$$\bar{r}(t)=\bar{r}_0+\int_0^t(\alpha-\beta\bar{r}(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma\mathrm{d}B(s)$$

两式相减，由幂平均不等式、Holder 不等式得

$$\begin{aligned}E\left(\left|r(t)-\bar{r}(t)\right|^2\right)&=E\left(r_0-\bar{r}_0+\beta\int_0^t(\bar{r}(s)-r(s))\mathrm{d}s\right)^2\\&\le 2E(r_0-\bar{r}_0)^2+2\beta^2E\left(\int_0^t(\bar{r}(s)-r(s))\mathrm{d}s\right)^2\\&\le 2E(r_0-\bar{r}_0)^2+2\beta^2E\left(\int_0^t1\mathrm{d}s\right)\cdot E\left(\int_0^t(\bar{r}(s)-r(s))^2\mathrm{d}s\right)\\&\le 2E(r_0-\bar{r}_0)^2+2\beta^2tE\left(\int_0^t(\bar{r}(s)-r(s))^2\mathrm{d}s\right)\\&\le 2E(r_0-\bar{r}_0)^2+2\beta^2T\cdot E\left(\int_0^t(\bar{r}(s)-r(s))^2\mathrm{d}s\right)\end{aligned}$$

据 Gronwall 不等式

$$\begin{aligned}E\left(\left|r(t)-\bar{r}(t)\right|^2\right)&\le 2E(r_0-\bar{r}_0)^2\cdot\exp\left(2\beta^2T\cdot\int_0^t1\mathrm{d}s\right)\\&=2E(r_0-\bar{r}_0)^2\cdot\exp\left(2\beta^2Tt\right)\end{aligned}$$

假定 $r_0 = \overline{r}_0$，则 $E\left(\left|r(t)-\overline{r}(t)\right|^2\right)=0$ 对任意 $t \ge 0$ 成立，因此

$$P\left(r(t)-\overline{r}(t)=0\right)=1$$

由 $t \to r(t)-\overline{r}(t)$ 的连续性[8]得

$$P\left(r(t,\omega)-\overline{r}(t,\omega)=0\right)=1$$

唯一性得证

下证存在性：假设 $X(t)=\mathrm{e}^{\beta t}r(t)$，据伊藤乘法法则[2]有：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{\beta t}r(t)\right]&=\mathrm{e}^{\beta t}\mathrm{d}r(t)+r(t)\mathrm{d}\mathrm{e}^{\beta t}\\&=\alpha\mathrm{e}^{\beta t}\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{e}^{\beta t}\mathrm{d}B(t)\end{aligned}$$

此时，右侧不再含有 $r(t)$ 项，两边同时积分可得：

$$\mathrm{e}^{\beta t}r(t)-r_0=\alpha\int_0^t \mathrm{e}^{\beta s}\mathrm{d}s+\sigma\int_0^t \mathrm{e}^{\beta s}\mathrm{d}B(s)$$

因此

$$r(t)=e^{-\beta t}r_0+\frac{\alpha}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta t}\right)+\mathrm{e}^{-\beta t}\sigma\int_0^t \mathrm{e}^{\beta s}\mathrm{d}B(s)$$

因为方程的解存在，所以存在性得证。

3.2. 非线性随机微分方程

几何均值回复过程 $X(t)$ 定义为如下随机过程

$$\mathrm{d}X(t)=k\left[\alpha-\ln X(t)\right]X(t)\mathrm{d}t+\sigma X(t)\mathrm{d}B(t),\quad 0\le t\le T$$

的解，这里 k,α,σ 均是正常数，这个过程被 Tvedt 用于模拟海运中的运费率[9]。

证明：先证唯一性，由定义 1，方程的解可以表示为

$$X(t)=X(0)+k\int_0^t\left[\alpha-\ln X(s)\right]X(s)\mathrm{d}s+\sigma\int_0^t X(s)\mathrm{d}B(s)$$

和

$$\overline{X}(t)=\overline{X}(0)+k\int_0^t\left[\alpha-\ln \overline{X}(s)\right]\overline{X}(s)\mathrm{d}s+\sigma\int_0^t \overline{X}(s)\mathrm{d}B(s)$$

两式相减，由幂平均不等式、Holder 不等式、伊藤等距得

$$\begin{aligned}&E\left(\left|X(t)-\overline{X}(t)\right|^2\right)\\&=E\left\{X(0)-\overline{X}(0)+k\int_0^t\left[\left(\alpha-\ln X(s)\right)X(s)-\left(\alpha-\ln\overline{X}(s)\right)\overline{X}(s)\right]\mathrm{d}s+\sigma\int_0^t\left(X(s)-\overline{X}(s)\right)\mathrm{d}B(s)\right\}^2\\&\le 3E\left(X(0)-\overline{X}(0)\right)^2+3k^2E\left\{\int_0^t\left[\left(\alpha-\ln X(s)\right)X(s)-\left(\alpha-\ln\overline{X}(s)\right)\overline{X}(s)\right]\mathrm{d}s\right\}^2\\&\quad+3\sigma^2E\left\{\int_0^t\left(X(s)-\overline{X}(s)\right)\mathrm{d}B(s)\right\}^2\\&\le 3E\left(X(0)-\overline{X}(0)\right)^2+3k^2tE\int_0^t\left[\left(\alpha-\ln X(s)\right)X(s)-\left(\alpha-\ln\overline{X}(s)\right)\overline{X}(s)\right]^2\mathrm{d}s\\&\quad+3\sigma^2E\int_0^t\left[\left(X(s)-\overline{X}(s)\right)\right]^2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

由绝对值的性质有

$$
\begin{aligned}
&\left|\left[(\alpha-\ln X(s))X(s)-(\alpha-\ln \bar{X}(s))\bar{X}(s)\right]\right| \\
&\le \left|\alpha\left(X(s)-\bar{X}(s)\right)-\left(X(s)\ln X(s)-\bar{X}(s)\ln \bar{X}(s)\right)\right| \\
&\le \alpha\left|X(s)-\bar{X}(s)\right|
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
E\left(\left|X(t)-\bar{X}(t)\right|^2\right) &\le 3E\left(X(0)-\bar{X}(0)\right)^2+3k^2tE\int_0^t\alpha^2\left[X(s)-\bar{X}(s)\right]^2\mathrm{d}s \\
&\quad +3\sigma^2E\int_0^t\left[\left(X(s)-\bar{X}(s)\right)\right]^2\mathrm{d}s \\
&= 3E\left(X(0)-\bar{X}(0)\right)^2+3\left(k^2\alpha^2t+\sigma^2\right)E\int_0^t\left[\left(X(s)-\bar{X}(s)\right)\right]^2\mathrm{d}s \\
&\le 3E\left(X(0)-\bar{X}(0)\right)^2+3\left(k^2\alpha^2T+\sigma^2\right)E\int_0^t\left[\left(X(s)-\bar{X}(s)\right)\right]^2\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

据 Gronwall 不等式

$$
E\left(\left|X(t)-\bar{X}(t)\right|^2\right)\le 3E\left(X(0)-\bar{X}(0)\right)^2\cdot\exp 3\left(k^2\alpha^2T+\sigma^2\right)t
$$

假定 $X(0)=\bar{X}(0)$，则 $E\left(\left|X(t)-\bar{X}(t)\right|^2\right)=0$ 对任意 $t\ge 0$ 成立，因此

$$
P\left(X(t)-\bar{X}(t)=0\right)=1
$$

由 $t\to X(t)-\bar{X}(t)$ 的连续性得

$$
P\left(X(t,\omega)-\bar{X}(t,\omega)=0\right)=1
$$

唯一性得证

下证存在性：令 $F(t)=\exp\left(-\int_0^t\sigma\mathrm{d}B(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\sigma^2\mathrm{d}s\right)=\exp\left(-\sigma B(t)+\frac{1}{2}\sigma^2t\right)$

则 $\mathrm{d}F(t)X(t)=F(t)\cdot k\left[\alpha-\ln X(t)\right]X(t)\mathrm{d}t$

令 $Y(t)=F(t)X(t)$

则

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}&=F(t)\cdot k\left[\alpha-\ln F^{-1}(t)Y(t)\right]\cdot F^{-1}(t)Y(t) \\
&=kY(t)\left(\alpha+\ln F(t)-\ln Y(t)\right)
\end{aligned}
$$

也即是

$$
\frac{\mathrm{d}Y(t)}{Y(t)}=k\left(\alpha+\ln F(t)-\ln Y(t)\right)\mathrm{d}t
$$

对每个给定的 $\omega\in\Omega$, 这是关于函数 $t\to Y(t,\omega)$ 的确定性的微分方程，所以

$$
\mathrm{d}\ln Y(t)=k\left(\alpha+\ln F(t)-\ln Y(t)\right)\mathrm{d}t
$$

记 $Z(t)=\ln Y(t)$

则上式化为

$$\mathrm{d}Z(t) = k\left(\alpha + \ln F(t) - Z(t)\right)\mathrm{d}t$$

解此关于 $Z(t)$ 的微分方程得

$$Z(t) = \mathrm{e}^{-kt}\left[\int_0^t k\mathrm{e}^{ks}\left(\alpha - \sigma B(s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s\right)\mathrm{d}s + Z(0)\right]$$

所以

$$\begin{aligned} X(t) &= F^{-1}(t)Y(t) = F^{-1}(t)\mathrm{e}^{Z(t)} \\ &= \exp\left[\mathrm{e}^{-kt}\ln X(0) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2k}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) + \sigma \mathrm{e}^{-kt}\int_0^t \mathrm{e}^{ks}\mathrm{d}B(s)\right] \end{aligned}$$

因为方程的解存在，所以存在性得证。

4. 结束语

通过对具体随机微分方程的讨论，证明了解的存在性与唯一性，存在性的证明过程，其实也是解随机微分方程的常用方法，所作变换，可应用于类似方程中，有一定借鉴意义，对于更一般的方程，可以直接套用公式。此文证明方法简单明了，对于初学者有一定的启发。

参考文献

[1] 冉启康. 金融随机数学基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 2017: 191-197.

[2] 冯玲, 方杰. 随机方程及其在金融中的应用[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2020: 199-206, 222-229.

[3] 胡适耕, 黄乘明, 吴付科. 随机微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 35-58, 85-89.

[4] Mao, X.R. (2007) Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd Edition, Horwood Publishing Limited, Chichester, 51-59.

[5] 周德云, 方学毅, 译. 随机微分对策理论与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2017: 20-23.

[6] 李朋林, 陈生瑞. 非线性随机微分方程解的存在唯一性[J]. 工程数学学报, 1997(3): 62-66.

[7] Mao, X.R. (1994) Exponential Stability of Stochastic Differential Equations. Marcel Dekker, New York, 94-132.

[8] 蒲兴成, 张毅. 随机微分方程及其在数理金融中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 6-8.

[9] Tvedt, J. (2003) Shipping Market Models and the Specification of Freight Rate Processes. *Maritime Economics and Logistics*, **5**, 327-346. https://doi.org/10.1057/palgrave.mel.9100085