Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(1), 231-239**
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.121026

分数阶Navier-Stokes方程在齐次Sobolev空间中解的爆破准则

徐郜婷，孙小春*，吴育联

西北师范大学，甘肃 兰州

收稿日期：2022年12月28日；录用日期：2023年1月24日；发布日期：2023年1月31日

摘　要

本文在最大时间 T_ν^* 有限时，利用Fourier变换的性质，齐次Sobolev空间中的插值结果以及乘积定理，研究了分数阶三维不可压缩Navier-Stokes方程在齐次Sobolev空间 $\dot{H}^s$ 中解的爆破性和 L^2 范数的衰减性，以及解关于 $\dot{H}^{2-\alpha}$ 范数、$\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}$ 范数和 $\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}$ 范数的有界性，是对Benameur J的经典Navier-Stokes方程结论的推广。

关键词

分数阶Navier-Stokes方程，衰减性，爆破准则

On the Blow-Up Criterion for Solutions of 3D Fractional Navier-Stokes Equations in Homogeneous Sobolev Spaces

Gaoting Xu, Xiaochun Sun*, Yulian Wu

Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 28th, 2022; accepted: Jan. 24th, 2023; published: Jan. 31st, 2023

Abstract

In this paper, when the maximum time T_ν^* is finite, the blow-up of the solutions to the fractional

*通讯作者。

文章引用: 徐郜婷, 孙小春, 吴育联. 分数阶 Navier-Stokes 方程在齐次 Sobolev 空间中解的爆破准则[J]. 应用数学进展, 2023, 12(1): 231-239. DOI: 10.12677/aam.2023.121026

3D incompressible Navier-Stokes equations in $\dot{H}^s$ spaces and the decay in L^2 norm and the boundedness of the solution with respect to $\dot{H}^{2-\alpha}$ norm, $\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}$ norm and $\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}$ norm are studied, via using the property of Fourier transform, interpolation results and product law in the homogeneous Sobolev spaces. It's a generalization of the classical Navier-Stokes equations conclusion of Benameur J.

Keywords

Fractional Navier-Stokes Equation, Decay, Blow-Up Criterion

1. 引言

本文研究分数阶不可压缩 Navier-Stokes 方程的初值问题

$$\begin{cases} \partial_t u + \nu(-\Delta)^{\alpha} u + (u\cdot\nabla)u = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(0) = u^0, \end{cases} \tag{1.1}$$

在最大存在时间附近解的性质以及在齐次 Sobolev 空间的爆破性。其中 ν 为流体的粘性系数，$\alpha > 0$ 表示“耗散强度”。向量函数 $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$ 表示流体在 $(t,x)\in R^+\times R^3$ 的未知速度，$u^0 = (u_1^0(t,x), u_2^0(t,x), u_3^0(t,x))$ 是给定的初始速度，标量函数 $p = p(t,x)$ 表示流体在 $(t,x)\in R^+\times R^3$ 所受的未知压力，$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$ 是关于空间变量 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 的 Laplacian 微分算子。

对于经典不可压缩 Navier-Stokes 方程，Kato T 在文献[1]和 Leray J 在文献[2]中研究了解的局部存在性和唯一性。Benameur J 在文献[3]中研究了非齐次 Sobolev 空间中解的爆破准则，即 $\|u(t)\|_{H^s} \ge (T_\nu^* - t)^{-\frac{s}{3}}\left(s > \frac{5}{2}\right)$，其中 T_ν^* 是最大存在时间。Robinson JC，Sadowski W，Silva RP 在文献[4]中证明了 $\|u(t)\|_{\dot{H}^s} \ge (T_\nu^* - t)^{-\frac{2s-1}{4}}\left(\frac{1}{2} < s < \frac{5}{2}, s \ne \frac{3}{2}\right)$，$\|u(t)\|_{\dot{H}^s} \ge (T_\nu^* - t)^{-\frac{2s}{5}}\left(s > \frac{5}{2}\right)$。Cortissoz C，Montero JA，Pinilla CE 在文献[5]中研究了解的 $\dot{H}^{\frac{3}{2}}$ 范数和 $\dot{H}^{\frac{5}{2}}$ 范数的下界。Cheskidov A，Zaya K 在文献[6]中证明了解在 $\dot{H}^{\frac{3}{2}}$ 空间的强爆破估计。Benameur J 在文献[7]中研究了解在 $\dot{H}^{\frac{5}{2}}$ 空间的爆破准则。

本文研究分数阶不可压缩 Navier-Stokes 方程(1.1)的解在 $\dot{H}^s$ 空间中的爆破和 L^2 范数衰减，以及解关于 $\dot{H}^{2-\alpha}$ 范数和 $\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}$ 范数和 $\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}$ 范数的有界性，是对 Benameur J 文献[3] [7]中结论的推广。主要结果如下：

定理 1 设 $\alpha > 1$，$s > \max\left\{\alpha - 1, \frac{3}{2}\right\}$，$\limsup_{t\to T_\nu^*} \|u(t)\|_{\dot{H}^s}^2 = \infty$ 且 $u \in C\left(\left[0, T_\nu^*\right); \dot{H}^s\right)$ 是方程(1.1)的极大解，若 $T_\nu^* < \infty$，则有

$$\frac{c\nu^{\frac{s}{3}}}{(T_\nu^* - t)^{\frac{s}{3}}} \le \|u(t)\|_{L^2}^{\frac{2s}{3}-1} \|u(t)\|_{\dot{H}^s}.$$

定理 2 设 $1<\alpha<2$，$\limsup_{t\to T_\nu^*}\|u(t)\|_{\dot H^{2-\alpha}}^2=\infty$ 且 $u\in C\left(\left[0,T_\nu^*\right);\dot H^{2-\alpha}\right)$ 是方程(1.1)的极大解，若 $T_\nu^*<\infty$，则有

$$\frac{c\sqrt{\nu}}{\sqrt{T_\nu^*-t}}\le\|\nabla u\|_{\dot H^{1-\alpha}}.$$

定理 3 设 $1<\alpha<\frac{5}{2}$，$u\in C\left(\left[0,T_\nu^*\right);\dot H^{\frac{5}{2}-\alpha}\right)$ 是方程(1.1)的极大解，若 $T_\nu^*<\infty$，则有

$$\frac{c\sqrt{\nu}}{\sqrt{T_\nu^*-t}}\le\|u(t)\|_{\dot H^{\frac{5}{2}-\alpha}}.$$

定理 4 设 $1<\alpha<\frac{7}{2}$，$u\in C\left(\left[0,T_\nu^*\right);\dot H^{\frac{7}{2}-\alpha}\right)$ 是方程(1.1)的极大解，若 $T_\nu^*<\infty$，则有

$$\frac{c(\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha+1}}}{\left(T_\nu^*-t\right)^{\frac{2}{\alpha+1}}}\le\|u(t)\|_{\dot H^{\frac{7}{2}-\alpha}}.$$

2. 预备知识

1) [7] Fourier 变换定义为：

$$\mathcal{F}(f)(\xi)=\hat f(\xi)=\int_{R^3}\exp(-ix\cdot\xi)f(x)\mathrm{d}x,\ \xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in R^3,\ f\in L^1\left(R^3\right).$$

2) 分数阶 Laplacian 微分算子通过 Fourier 变换定义为：

$$\mathcal{F}\left((-\Delta)^\alpha u\right)(t,\xi)=|\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}u(t,\xi).$$

关于 $(-\Delta)^\alpha$ 的更多详细描述见文献[8]。

3) [7] R^3 上函数 $f(x),g(x)$ 定义其卷积为：

$$f*g(x)=\int_{R^3}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y=\int_{R^3}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y.$$

4) [7]若 $f=(f_1,f_2,f_3)$ 和 $g=(g_1,g_2,g_3)$ 是两个向量场，则

$$f\otimes g:=(g_1f,g_2f,g_3f),$$

$$\mathrm{div}(f\otimes g):=\left(\mathrm{div}(g_1f),\mathrm{div}(g_2f),\mathrm{div}(g_3f)\right).$$

5) [7]齐次 Sobolev 空间定义为：$\dot H^s\left(R^3\right)=\left\{f\in S'\left(R^3\right),\hat f\in L^1_{loc},|\xi|^s\hat f\in L^2\left(R^3\right)\right\}$，其范数为

$$\|f\|_{\dot H^s}=\left(\int_{R^3}|\xi|^{2s}\left|\hat f(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

6) [7] Lei-Lin 空间定义为：$\chi^\sigma\left(R^3\right)=\left\{f\in S'\left(R^3\right),\hat f\in L^1_{loc},|\xi|^\sigma\hat f\in L^1\left(R^3\right)\right\}$，其范数为

$$\|f\|_{\chi^\sigma}=\int_{R^3}|\xi|^\sigma\left|\hat f(\xi)\right|\mathrm{d}\xi.$$

引理 1 [9]对于 $s>\frac{3}{2}$，有

$$\|\hat u\|_{L^1}\le C\|u\|_{L^2}^{1-\frac{3}{2s}}\|u\|_{\dot H^s}^{\frac{3}{2s}}.$$

其中 $C=2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(\left(\frac{2s}{3}-1\right)^{\frac{3}{4s}}+\left(\frac{2s}{3}-1\right)^{-1+\frac{3}{4s}}\right)$。

引理 2 [10]设 $s,s'\in R$ 且 $s<1$， $s+s'>0$，则存在常数 $C=C(s,s')$，使得 $f,g\in\dot{H}^{s}\cap\dot{H}^{s'}$，有

$$\|fg\|_{\dot{H}^{s+s'-1}}\le C\left(\|f\|_{\dot{H}^{s}}\|g\|_{\dot{H}^{s'}}+\|f\|_{\dot{H}^{s'}}\|g\|_{\dot{H}^{s}}\right).$$

若 $s,s'<1$， $s+s'>0$，则存在常数 $C=C(s,s')$，使得 $f\in\dot{H}^{s},g\in\dot{H}^{s'}$，有

$$\|fg\|_{\dot{H}^{s+s'-1}}\le C\|f\|_{\dot{H}^{s}}\|g\|_{\dot{H}^{s'}}.$$

引理 3 [11]设 $s,s'\in R$ 且 $s<\frac{3}{2}$， $s+s'>0$，则存在常数 $C=C(s,s')$，使得 $f,g\in\dot{H}^{s}\cap\dot{H}^{s'}$，

$$\|fg\|_{\dot{H}^{s+s'-\frac{3}{2}}}\le C\left(\|f\|_{\dot{H}^{s}}\|g\|_{\dot{H}^{s'}}+\|f\|_{\dot{H}^{s}}\|g\|_{\dot{H}^{s'}}\right).$$

若 $s,s'<\frac{3}{2}$， $s+s'>0$，则存在常数 $C=C(s,s')$，

$$\|fg\|_{\dot{H}^{s+s'-\frac{3}{2}}}\le C\|f\|_{\dot{H}^{s}}\|g\|_{\dot{H}^{s'}}.$$

引理 4 [7]对于 $s\ge 0$，若 $f\in\dot{H}^{s}\cap\chi^{1}$，则存在常数 $C>0$，

$$\left|\langle f\cdot\nabla f\rangle_{\dot{H}^{s}}\right|\le C\|f\|_{\chi^{1}}\|f\|_{\dot{H}^{s}}^{2}.$$

引理 5 [12] Gronwall 不等式(微分形式)设 $y(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负绝对连续函数， $h(t)$， $g(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负可积函数，且满足

$$y'(t)\le h(t)y(t)+g(t),\ \text{a.e. } t\in[0,T].$$

那么

$$y(t)\le \mathrm{e}^{\int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\tau}\left[y(0)+\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau\right].$$

引理 6 对于 $f\in\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}$，存在常数 $C>0$，使得 $0<a<b<\infty$，有

$$\|f\|_{\chi^{1}}\le C\sqrt{4\pi}\left[a^{\frac{5}{2}}\|u\|_{L^2}+\sqrt{\frac{b^{2\alpha-2}}{\alpha-1}}\|u\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}+\frac{1}{b}\|u\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}}}\right].$$

证明：设 $0<a<b<\infty$

$$\|f\|_{\chi^{1}}=\int|\xi|\left|\hat{f}(\xi)\right|\mathrm{d}\xi=I_a+J_{a,b}+K_b,$$

$$I_a=\int_{|\xi|<a}|\xi|\left|\hat{f}(\xi)\right|\mathrm{d}\xi\le\left(\int_{|\xi|<a}|\xi|^{2}\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2}\le\sqrt{\frac{4\pi}{5}}a^{\frac{5}{2}}\|f\|_{L^2}.$$

$$J_{a,b}=\int_{a<|\xi|<b}|\xi|\left|\hat{f}(\xi)\right|\mathrm{d}\xi\le\left(\int_{a<|\xi|<b}|\xi|^{2\alpha-5}\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}$$
$$\le\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha-1}}\sqrt{b^{2\alpha-2}-a^{2\alpha-2}}\|f\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\le\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha-1}}\sqrt{b^{2\alpha-2}}\|f\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}.$$

$$K_b=\int_{|\xi|>b}|\xi|\left|\hat{f}(\xi)\right|\mathrm{d}\xi\le\left(\int_{|\xi|>b}|\xi|^{-5}\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}}}\le\sqrt{2\pi}\frac{1}{b}\|f\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}}}.$$

3. 定理 1 的证明

证明：方程(1.1)在 $\dot{H}^s$ 空间下与 u 取内积

$$\left\langle \partial_t u, u \right\rangle_{\dot{H}^s} + \nu \left\langle (-\Delta)^\alpha u, u \right\rangle_{\dot{H}^s} + \left\langle u \cdot \nabla u, u \right\rangle_{\dot{H}^s} = \left\langle -\nabla p, u \right\rangle_{\dot{H}^s},$$

则有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t \|u\|_{\dot{H}^s}^2 + \nu \|\Lambda^\alpha u\|_{\dot{H}^s}^2 &\le \left| \left\langle u \cdot \nabla u, u \right\rangle_{\dot{H}^s} \right| \\
&= \int_{R^3} |\xi|^{2s} \widehat{u \cdot \nabla u} \cdot \hat{u} \, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{R^3} |\xi|^{2s+1} \widehat{u \otimes u} \cdot \hat{u} \, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{R^3} |\xi|^{s-\alpha+1} \widehat{u \otimes u} |\xi|^s \widehat{\Lambda^\alpha u} \, \mathrm{d}\xi \\
&\le \left(\int_{R^3} |\xi|^{2(s-\alpha+1)} \widehat{u \otimes u}^2 \, \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{R^3} |\xi|^{2s} \widehat{\Lambda^\alpha u}^2 \, \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u \otimes u\|_{\dot{H}^{s-\alpha+1}} \|\Lambda^\alpha u\|_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
\|u \otimes u\|_{\dot{H}^{s-\alpha+1}}^2 &= \int_{R^3} |\xi|^{2(s-\alpha+1)} |\hat{u} * \hat{u}|^2 \, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{R^3} |\xi|^{2(s-\alpha+1)} \left| \int_{R^3} \hat{u}(\eta) \hat{u}(\xi - \eta) \, \mathrm{d}\eta \right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\le \int_{R^3} |\xi|^{2(s-\alpha+1)} \left(\int_{R^3} |\hat{u}(\eta)| |\hat{u}(\xi - \eta)| \, \mathrm{d}\eta \right)^2 \mathrm{d}\xi \\
&\le \int_{R^3} \left(\int_{R^3} |\xi|^{s-\alpha+1} |\hat{u}(\eta)| |\hat{u}(\xi - \eta)| \, \mathrm{d}\eta \right)^2 \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}
|\xi|^{s-\alpha+1} &= |\xi - \eta + \eta|^{s-\alpha+1} \le \left(|\xi - \eta| + |\eta| \right)^{s-\alpha+1} \le \left(2 \max\left(|\xi - \eta|, |\eta| \right) \right)^{s-\alpha+1} \\
&\le 2^{s-\alpha+1} \left(|\xi - \eta|^{s-\alpha+1} + |\eta|^{s-\alpha+1} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u \otimes u\|_{\dot{H}^{s-\alpha+1}}^2 &\le \int_{R^3} \left(\int_{R^3} 2^{s-\alpha+1} |\xi - \eta|^{s-\alpha+1} |\hat{u}(\eta)| |\hat{u}(\xi - \eta)| \, \mathrm{d}\eta \right)^2 \mathrm{d}\xi \\
&\quad + \int_{R^3} \left(\int_{R^3} 2^{s-\alpha+1} |\eta|^{s-\alpha+1} |\hat{u}(\eta)| |\hat{u}(\xi - \eta)| \, \mathrm{d}\eta \right)^2 \mathrm{d}\xi \\
&= 2^{2(s-\alpha+1)+1} \int_{R^3} \left(\int_{R^3} |\eta|^{s-\alpha+1} |\hat{u}(\eta)| |\hat{u}(\xi - \eta)| \, \mathrm{d}\eta \right)^2 \mathrm{d}\xi \\
&= 2^{2(s-\alpha+1)+1} \int_{R^3} \left(\left(|\cdot|^{s-\alpha+1} |\hat{u}| \right) * |\hat{u}| \right)^2 \mathrm{d}\xi \\
&= 2^{2(s-\alpha+1)+1} \left\| \left(|\cdot|^{s-\alpha+1} |\hat{u}| \right) * |\hat{u}| \right\|_{L^2}^2 \\
&\le 2^{2(s-\alpha+1)+1} \left\| \left(|\cdot|^{s-\alpha+1} |\hat{u}| \right) \right\|_{L^2}^2 \|\hat{u}\|_{L^1}^2 \\
&= 2^{2(s-\alpha+1)+1} \|u\|_{\dot{H}^{s-\alpha+1}}^2 \|\hat{u}\|_{L^1}^2.
\end{aligned}$$

则有

$$\frac{1}{2}\partial_t\|u\|_{\dot H^s}^2+\nu\|\Lambda^\alpha u\|_{\dot H^s}^2\le 2^{s-\alpha+\frac{3}{2}}\|u\|_{\dot H^{s-\alpha+1}}\|\hat u\|_{L^1}\|\Lambda^\alpha u\|_{\dot H^s}$$
$$\le 2^{2s-2\alpha+3}\nu^{-1}\|u\|_{\dot H^{s-\alpha+1}}^2\|\hat u\|_{L^1}^2+\frac{\nu}{2}\|\Lambda^\alpha u\|_{\dot H^s}^2 .$$

则

$$\partial_t\|u\|_{\dot H^s}^2+\nu\|\Lambda^\alpha u\|_{\dot H^s}^2\le C\nu^{-1}\|u\|_{\dot H^{s-\alpha+1}}^2\|\hat u\|_{L^1}^2\le C\nu^{-1}\|u\|_{\dot H^s}^2\|\hat u\|_{L^1}^2 .$$

由引理 5，对 $0\le a\le t<T_\nu^*$

$$\|u(t)\|_{\dot H^s}^2\le\|u(a)\|_{\dot H^s}^2\,\mathrm{e}^{c\nu^{-1}\int_a^t\|\hat u\|_{L^1}^2\mathrm{d}\tau} .$$

因为 $\limsup_{t\to T_\nu^*}\|u(t)\|_{\dot H^s}^2=\infty$，所以 $\int_a^{T_\nu^*}\|\hat u\|_{L^1}^2\,\mathrm{d}\tau=\infty$。

由引理 1，$\|\hat u\|_{L^1}\le C\|u\|_{L^2}^{1-\frac{3}{2s}}\|u\|_{\dot H^s}^{\frac{3}{2s}}$

$$\frac{\|\hat u\|_{L^1}^{\frac{4s}{3}}}{C\|u\|_{L^2}^{\frac{4s}{3}-2}}\le\|u\|_{\dot H^s}^2\le\|u(a)\|_{\dot H^s}^2\,\mathrm{e}^{c\nu^{-1}\int_a^t\|\hat u\|_{L^1}^2\mathrm{d}\tau},$$

$$\|\hat u\|_{L^1}^{\frac{4s}{3}}\le C\|u\|_{L^2}^{\frac{4s}{3}-2}\|u(a)\|_{\dot H^s}^2\,\mathrm{e}^{c\nu^{-1}\int_a^t\|\hat u\|_{L^1}^2\mathrm{d}\tau},$$

$$\|\hat u\|_{L^1}^2\,\mathrm{e}^{-c\nu^{-1}\int_a^t\|\hat u\|_{L^1}^2\mathrm{d}\tau}\le C\|u\|_{L^2}^{2-\frac{3}{s}}\|u(a)\|_{\dot H^s}^{\frac{3}{s}} .$$

在 $[a,T]$ 上对上式积分有

$$1-\mathrm{e}^{-c\nu^{-1}\int_a^t\|\hat u\|_{L^1}^2\mathrm{d}\tau}\le C\nu^{-1}(T-a)\|u\|_{L^2}^{2-\frac{3}{s}}\|u(a)\|_{\dot H^s}^{\frac{3}{s}} .$$

当 $T\to T_\nu^*$ 时，有

$$1\le C\nu^{-1}\left(T_\nu^*-a\right)\|u\|_{L^2}^{2-\frac{3}{s}}\|u(a)\|_{\dot H^s}^{\frac{3}{s}}$$

$$\frac{C\nu^{\frac{s}{3}}}{\left(T_\nu^*-t\right)^{\frac{s}{3}}}\le\|u(t)\|_{L^2}^{\frac{2s}{3}-1}\|u(t)\|_{\dot H^s} .$$

从而结论得证。

4. 定理 2 的证明

证明：方程(1.1)在 $\dot H^{2-\alpha}$ 空间下与 u 取内积

$$\langle\partial_t u,u\rangle_{\dot H^{2-\alpha}}+\nu\left\langle(-\Delta)^\alpha u,u\right\rangle_{\dot H^{2-\alpha}}+\langle u\cdot\nabla u,u\rangle_{\dot H^{2-\alpha}}=\langle-\nabla p,u\rangle_{\dot H^{2-\alpha}} ,$$

则有

$$\frac{1}{2}\partial_t\|u\|_{\dot H^{2-\alpha}}^2+\nu\|\Lambda^\alpha u\|_{\dot H^{2-\alpha}}^2\le\left|\langle u\cdot\nabla u,u\rangle_{\dot H^{2-\alpha}}\right|$$
$$=\int_{R^3}|\xi|^{5-2\alpha}\,\widehat{u\otimes u}\cdot\hat u\,\mathrm{d}\xi$$
$$=\int_{R^3}|\xi|^{3-2\alpha}\,\widehat{u\otimes u}\,|\xi|^{2-\alpha}|\xi|^\alpha\,\hat u\,\mathrm{d}\xi$$
$$\le\|u\otimes u\|_{\dot H^{3-2\alpha}}\|\Lambda^\alpha u\|_{\dot H^{2-\alpha}} .$$

由引理 2 及不等式 $ab \le \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$ 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t \|u\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 + \nu \|\Lambda^\alpha u\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 &\le C\|u\|_{\dot{H}^{2-\alpha}} \|u\|_{\dot{H}^{2-\alpha}} \|\Lambda^\alpha u\|_{\dot{H}^{2-\alpha}} \\ &\le C\nu^{-1}\|u\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^4 + \frac{\nu}{2}\|\Lambda^\alpha u\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 .\end{aligned}$$

则

$$\partial_t \|u\|_{\dot{H}^s}^2 + \nu\|\Lambda^\alpha u\|_{\dot{H}^s}^2 \le C\nu^{-1}\|u\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^4 .$$

由引理 5，对于 $0 \le a \le t < T_\nu^*$，

$$\|u(t)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 \le \|u(a)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 \mathrm{e}^{C\nu^{-1}\int_a^t \|u(\tau)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 \mathrm{d}\tau} .$$

因为 $\limsup_{t\to T_\nu^*}\|u(t)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 = \infty$，所以 $\int_a^{T_\nu^*}\|u(t)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 = \infty$。

$$\|u\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 \mathrm{e}^{-C\nu^{-1}\int_a^t \|u(\tau)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 \mathrm{d}\tau} \le \|u(a)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 .$$

在 $[a,T]$ 上对上式积分有

$$1-\mathrm{e}^{-C\nu^{-1}\int_a^T \|u(\tau)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 \mathrm{d}\tau} \le C\nu^{-1}(T-a)\|u(a)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 .$$

当 $T \to T_\nu^*$ 时，有

$$1 \le C\nu^{-1}\left(T_\nu^*-a\right)\|u(a)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}}^2 ,$$

$$\frac{c\sqrt{\nu}}{\sqrt{T_\nu^*-t}} \le \|u(t)\|_{\dot{H}^{2-\alpha}} .$$

$$\frac{c\sqrt{\nu}}{\sqrt{T_\nu^*-t}} \le \|\nabla u\|_{\dot{H}^{1-\alpha}} .$$

从而结论得证。

5. 定理 3 的证明

证明：方程(1.1)在 $\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}$ 空间下与 u 取内积

$$\langle \partial_t u, u\rangle_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}} + \nu\left\langle (-\Delta)^\alpha u, u\right\rangle_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}} + \langle u\cdot\nabla u, u\rangle_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}} = \langle -\nabla p, u\rangle_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}} ,$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t \|u\|_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}}^2 + \nu\|u\|_{\dot{H}^{\frac{5}{2}}}^2 &\le \left|\langle u\cdot\nabla u, u\rangle_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}}\right| \\ &= \int_{R^3}|\xi|^{6-2\alpha}\, \widehat{u\otimes u}\cdot \hat{u}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{R^3}|\xi|^{\frac{7}{2}-2\alpha}\, \widehat{u\otimes u}\,|\xi|^{\frac{5}{2}}\hat{u}\mathrm{d}\xi \\ &\le \|u\otimes u\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-2\alpha}}\|u\|_{\dot{H}^{\frac{5}{2}}} .\end{aligned}$$

由引理 3 及不等式 $ab \le \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$ 有

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}} + \nu \|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{5}{2}}} \le C\|u\|_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}} \|u\|_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}} \|u\|_{\dot{H}^{\frac{5}{2}}} \le C\nu^{-1}\|u\|^4_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}} + \frac{\nu}{2}\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{5}{2}}}.$$

$$\partial_t \|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}} \le C\nu^{-1}\|u\|^4_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}}.$$

在$\left[t,T_\nu^*\right)\subset\left[0,T_\nu^*\right)$上对上式积分有

$$\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}} \le C\nu^{-1}\left(T_\nu^* - t\right)\|u\|^4_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}},$$

$$\frac{c\sqrt{\nu}}{\sqrt{T_\nu^* - t}} \le \|u(t)\|_{\dot{H}^{\frac{5}{2}-\alpha}}.$$

从而结论得证。

6. 定理 4 的证明

证明：方程(1.1)在$\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}$空间下与$u$取内积

$$\langle \partial_t u, u\rangle_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} + \nu\left\langle (-\Delta)^\alpha u, u\right\rangle_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} + \langle u\cdot\nabla u, u\rangle_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} = \langle -\nabla p, u\rangle_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}},$$

则有

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} + \nu\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}}} \le \left|\langle u\cdot\nabla u, u\rangle_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\right|.$$

由引理 4，

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} + \nu\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}}} \le c\|u\|_{\chi^1}\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}.$$

由引理 6，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t \|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} + \nu\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}}} &\le c\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\left[a^{\frac{5}{2}}\|u\|_{L^2} + \sqrt{\frac{b^{2\alpha-2}}{\alpha-1}}\|u\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} + \frac{1}{b}\|u\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}}}\right]\\ &\le c\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\left[a^{\frac{5}{2}}\|u\|_{L^2} + \sqrt{\frac{b^{2\alpha-2}}{\alpha-1}}\|u\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\right] + \frac{c}{\nu b^2}\|u\|^4_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} + \frac{\nu}{2}\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}}}.\end{aligned}$$

则有

$$\partial_t \|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} \le c\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\left[a^{\frac{5}{2}}\|u\|_{L^2} + \sqrt{\frac{b^{2\alpha-2}}{\alpha-1}}\|u\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} + \frac{1}{\nu b^2}\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\right].$$

取$t_0 = \inf\left\{t\in\left[0,T_\nu^*\right), \|u\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} = 2\|u^0\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\right\}$，对上式积分有

$$\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} - \|u^0\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} \le cT_\nu^*\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\left[a^{\frac{5}{2}}\|u\|_{L^2} + \sqrt{\frac{b^{2\alpha-2}}{\alpha-1}}\|u\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} + \frac{1}{\nu b^2}\|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\right],$$

$$3\|u^0\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} \le cT_\nu^*\|u^0\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\left[a^{\frac{5}{2}}\|u\|_{L^2} + \sqrt{\frac{b^{2\alpha-2}}{\alpha-1}}\|u^0\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} + \frac{1}{\nu b^2}\|u^0\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\right],$$

$$1 \le cT_\nu^*\left[a^{\frac{5}{2}}\|u\|_{L^2} + \sqrt{\frac{b^{2\alpha-2}}{\alpha-1}}\|u^0\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}} + \frac{1}{\nu b^2}\|u^0\|^2_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\right].$$

取 $a=\left\|u^0\right\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}^{\frac{2}{5}}<b=\sqrt{\left\|u^0\right\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}}$，

$$1\le cT_\nu^*\left[\left\|u^0\right\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\left\|u\right\|_{L^2}+\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\sqrt{\left\|u^0\right\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}^{\alpha-1}}\left\|u^0\right\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}+\frac{1}{\nu}\left\|u^0\right\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\right],$$

$$1\le cT_\nu^*\left\|u^0\right\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\left[\left\|u\right\|_{L^2}+\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\sqrt{\left\|u^0\right\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}^{\alpha-1}}+\frac{1}{\nu}\right].$$

设 $t_1\in\left[0,T_\nu^*\right)$ 有

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\sqrt{\left\|u^0\right\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}^{\alpha-1}}\ge 2\left(\left\|u\right\|_{L^2}+\frac{1}{\nu}\right).$$

则

$$1\le c\left(T_\nu^*-t_1\right)\left\|u\left(t_1\right)\right\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\sqrt{\left\|u\left(t_1\right)\right\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}^{\alpha-1}}.$$

用任意的 $t\in\left[t_1,T_\nu^*\right)$ 替换 t_1 有

$$\frac{c\left(\alpha-1\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}{\left(T_\nu^*-t\right)^{\frac{2}{\alpha+1}}}\le\left\|u\left(t\right)\right\|_{\dot{H}^{\frac{7}{2}-\alpha}}.$$

因此结论得证。

参考文献

[1] Kato, T. (1975) Quasi-Linear Equations of Evolution, with Applications to Partial Differential Equations. In: Everitt, W.N., Ed., *Spectral Theory and Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 448, Springer, Berlin, Heidelberg, 25-70. https://doi.org/10.1007/BFb0067080

[2] Leray, J. (1934) Sur le movement d'un liquid visqueux emplissant l'espace. *Acta Mathematica*, **63**, 193-248. https://doi.org/10.1007/BF02547354

[3] Benameur, J. (2010) On the Blow-Up Criterion of 3D Navier-Stokes Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **371**, 719-727. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.06.007

[4] Robinson, J.C., Sadowski, W. and Silva, R.P. (2012) Lower Bounds on Blow Up Solutions of the Three-Dimensional Navier-Stokes Equations in Homogeneous Sobolev Spaces. *Journal of Mathematical Physics*, **53**, 115618. https://doi.org/10.1063/1.4762841

[5] Cortissoz, C., Montero, J.A. and Pinilla, C.E. (2014) On Lower Bounds for Possible Blow-Up Solutions to the Periodic Navier-Stokes Equation. *Journal of Mathematical Physics*, **55**, 033101. https://doi.org/10.1063/1.4867616

[6] Cheskidov, A. and Zaya, K. (2016) Lower Bounds of Potential Blow-Up Solutions of Three-Dimentional Navier-Stokes Equations in $\dot{H}^{\frac{3}{2}}$. *Journal of Mathematical Physics*, **57**, 023101. https://doi.org/10.1063/1.4941035

[7] Benameur, J. (2019) On the Blow-Up Criterion of 3D Navier-Stokes Equation in $\dot{H}^{\frac{5}{2}}$. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **42**, 6972-6986. https://doi.org/10.1002/mma.5803

[8] Stein, E. (1970) Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, Princeton. https://doi.org/10.1515/9781400883882

[9] Benameur, J. (2014) On the Exponential Type Explosion of Navier-Stokes Equations. *Nonlinear Analysis*, *Theory*, *Methods and Applications*, **103**, 87-97. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.03.011

[10] Benameur, J. and Blel, M. (2012) Long-Time Decay to the Global Solution of the 2D Dissipative Quasigeostrophic Equation. *Abstract and Applied Analysis*, **2012**, Article ID 627813. ttps://doi.org/10.1155/2012/627813

[11] Jacques-Louis, L. (1995) Navier-Stokes Equations. *Séminaire Bourbaki*, **5**, 223-238.

[12] 陈国旺. 索伯列夫空间导论[M]. 北京: 科学出版社, 2013.