Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(10), 4189-4194
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1210412

Hans汉斯

泊松过程在新疆新型冠状肺炎分析中的应用

卢芸潇

伊犁师范大学教育科学学院，新疆 伊宁

收稿日期：2023年9月11日；录用日期：2023年10月5日；发布日期：2023年10月13日

摘 要

本文利用具有恒定速率λ的泊松过程，以2020年7月16日至2020年8月17日新疆新型冠状肺炎阳性患者的每日病例数为例，对新疆冠状肺炎病例数进行统计分析。结果表明，在此期间新疆没有新疆新型冠状肺炎阳性患者的概率极小，利用复合泊松过程建立了新疆新型冠状肺炎阳性患者相关花费的数学模型，所得结果可为新疆各级部门对新疆新型冠状病毒的管控和预防提供一定的参考价值。

关键词

泊松过程，复合泊松过程，新型冠状肺炎

Application of Poisson Process in Covid-19 Analysis of Xinjiang

Yunxiao Lu

School of Educational Science, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Sep. 11th, 2023; accepted: Oct. 5th, 2023; published: Oct. 13th, 2023

Abstract

In this paper, the Poisson process with constant rate λ was used to statistically analyze the number of coronavirus cases in Xinjiang by taking the number of daily cases of Xinjiang COVID-19 positive patients on July 16, 2020 solstice and August 17, 2020 as an example. The results showed that the probability of no COVID-19 positive patients in Xinjiang was very small during this period. The mathematical model of COVID-19 positive patients in Xinjiang was established by using the compound Poisson process. The results can provide certain reference value for Xinjiang departments at all levels to control and prevent novel coronavirus in Xinjiang.

文章引用: 卢芸潇. 泊松过程在新疆新型冠状肺炎分析中的应用[J]. 应用数学进展, 2023, 12(10): 4189-4194.
DOI: 10.12677/aam.2023.1210412

Keywords

Poisson Process, Compound Poisson Process, COVID-19

1. 引言

2020 年 7 月新疆爆发二轮疫情。此次疫情以新疆乌鲁木齐为中心。自 2020 年 7 月 16 日以来，新疆乌鲁木齐新增新型冠状肺炎阳性患者，引起了公众和政府相关部门的广泛关注。2020 年 7 月 16 日新疆第一例新增新型冠状肺炎阳性患者至 2020 年 8 月 18 日再无新增的阳性患者，新疆各级政府部门的有效管控和各方面的防控措施为新疆疫情的防治做出了重大贡献。

自疫情爆发以来国内外学者纷纷对新型冠状肺炎疫情相关情况进行大量研究。Munandar [1]利用非齐次泊松过程对以“新型冠状病毒”为关键词的推文进行预测并计算了网民发布有关“新型冠状病毒”的推文数量的概率；Xiaolei Zhang 等[2]采用分段泊松模型来分析七国集团六个西方国家每日“新型冠状病毒”新增病例数据并对转折点、持续时间和发病率进行统计预测；Y Ma，X Liu 等[3]使用中国武汉以外的城市的案例数据建立了一个泊松线性混合效应模型用于估计武汉潜在病例数。

本文对泊松过程及复合泊松过程的基本特性进行介绍，利用泊松过程对 2020 年 7 月 16 日至 2020 年 8 月 17 日期间新疆新型冠状肺炎阳性患者病例数进行计算分析，基于复合泊松过程建立阳性患者相关花费的数学模型。本文所得结论对新疆相关部门今后如何科学地投资医疗资源，合理地实行疫情防控管理等问题提供一定的参考依据。

2. 预备知识

定义 1.1 [4]称计数过程$\{N(t),t\ge 0\}$，为具有参数$\lambda>0$的泊松过程，如果$\{N(t),t\ge 0\}$满足下列条件：

1) $N(0)=0$。
2) $N(t)$是独立增量过程。
3) $N(t)$是平稳增量过程，并且$P\{N(t+s)-N(s)=n\}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$，$n=1,2,\cdots$。

定理 1.1 [5]强度为λ的泊松过程$\{N(t),t\ge 0\}$，它的到达事件的间隔序列$\{X_n,n\ge 1\}$是相互独立的随机变量序列，则$X_n(n=1,2,\cdots)$是独立同分布的均值为$\dfrac{1}{\lambda}$的指数分布。

定理 1.2 [6]设$\{W_n,n\ge 1\}$是与泊松过程$\{N(t),t\ge 0\}$对应的一个等待时间序列，其中$W_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$，则W_n服从参数为n和λ的伽玛分布。

定义 1.2 [5]设$\{N(t),t\ge 0\}$是参数为λ的泊松过程，若$Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}X_n,t\ge 0$其中$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$为独立同分布随机变量序列且与$\{N(t),t\ge 0\}$独立，则称$\{Y(t),t\ge 0\}$为复合泊松过程。

3. 主要结论

定理 2.1 设$\{N(t),t\ge 0\}$是参数为$\lambda>0$的泊松过程，则：

1) 均值函数为 $E\left[N(t)\right]=\lambda t$。

2) 方差函数为 $Var\left[N(t)\right]=\lambda t$。

证明：1) $E\left[N(t)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-\lambda t\frac{(\lambda t)^n}{n!}}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{(\lambda t)^n}{n!}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\lambda t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\lambda t\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j^{n-1}}{j!}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\lambda t\mathrm{e}^{\lambda t}=\lambda t$，

用同样的方法可以得到 $E\left[N(t)^2\right]=(\lambda t)^2+\lambda t$。

2) $Var\left[N(t)\right]=E\left[N(t)^2\right]-\left(E\left[N(t)\right]\right)^2=(\lambda t)^2+\lambda t-(\lambda t)^2=\lambda t$。

定理 2.2 若 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程，且 $E\left(X_1^2\right)<\infty$，则复合泊松过程 $Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}X_n,t\ge 0$ 具有如下数字特征：

1) 特征函数为 $g_{Y(t)}(u)=\exp\left\{\lambda t\left[g_X(u)-1\right]\right\}$，其中 $g_X(u)$ 是随机变量 X_1 的特征函数；λ 表示速率。

2) 均值函数为 $E\left[Y(t)\right]=\lambda tE\left(X_1\right)$。

3) 方差函数为 $D\left[Y(t)\right]=\lambda tE\left(X_1^2\right)$。

证明：1) $g_{Y(t)}(u)=E\left[\mathrm{e}^{iuY(t)}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[\frac{\mathrm{e}^{iuY(t)}}{N(t)=n}\right]\cdot P\{N(t)=n\}=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[\frac{\exp\left(iu\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}{N(t)=n}\right]\cdot\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$，

由于 $\{N(t)\ge 0,t\ge 0\}$ 与 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$，是相互独立的，则：

$$\sum_{n=0}^{\infty}E\left[\frac{\exp\left(iu\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}{N(t)=n}\right]\bullet\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[\exp\left(iu\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\right]\bullet\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[g_X(u)\right]^n\bullet\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda tg_X(u)\right]^n}{n!}=\exp\left\{\lambda t\left[g_X(u)-1\right]\right\}$$

2) 由特征函数与矩的关系可得数学期望为：

$$E\left[Y(t)\right]=-j\frac{\mathrm{d}g_Y(u)}{\mathrm{d}u}\bigg|_{u=0}=-j\lambda t\frac{\mathrm{d}g_X(u)}{\mathrm{d}u}\mathrm{e}^{\lambda t\left[g_X(u)-1\right]}\bigg|_{u=0},$$

因为 $-j\frac{\mathrm{d}g_Y(u)}{\mathrm{d}u}\bigg|_{u=0}=E\left[X_1\right],g_Y(0)=1$，所以 $E\left[Y(t)\right]=\lambda tE\left[X_1\right]$。

3) 均方值为

$$\begin{aligned}E\left[Y^2(t)\right]&=-\frac{\mathrm{d}^2g_Y(u)}{\mathrm{d}u^2}\bigg|_{u=0}\\&=-\left\{\left[\lambda t\frac{\mathrm{d}g_X(u)}{\mathrm{d}u}\right]^2\mathrm{e}^{\lambda t\left[g_X(u)-1\right]}+\lambda t\frac{\mathrm{d}^2g_X(u)}{\mathrm{d}u^2}\mathrm{e}^{\lambda t\left[g_X(u)-1\right]}\right\}\bigg|_{u=0}\\&=(\lambda t)^2E^2\left[X\right]+\lambda tE\left[X^2\right]\end{aligned}$$

故 $\mathrm{var}\left[Y(t)\right]=E^2\left[Y(t)\right]+\lambda tE\left[Y^2(t)\right]=\lambda tE\left[X_1^2\right]$。

4. 实证分析

4.1. 数据统计

本研究从新疆维吾尔自治区卫生健康委员会官方网站收集了 2020 年 7 月 16 日至 2020 年 8 月 17 日新型冠状肺炎的每日患病数据(本文使用的数据暂不考虑 2020 年 7 月 15 日之前的病例)，并利用 Excel 绘制统计图如图 1：

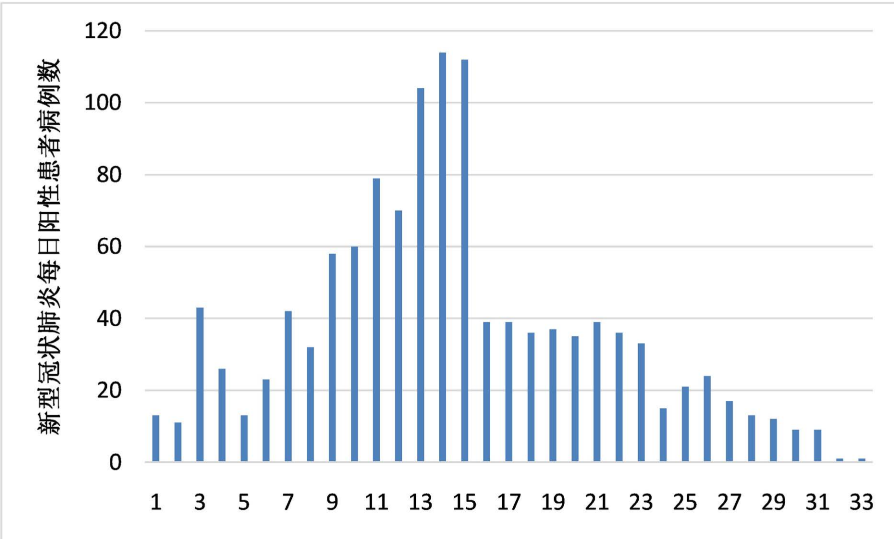

Figure 1. Daily number of COVID-19 positive patients in Xinjiang
图 1. 新疆新型冠状肺炎每日阳性患者病例数

根据图 1 可以发现新疆新型冠状肺炎阳性患者的病例数有较大的波动，在 2020 年 7 月 28 日(第 13 天)新疆新型冠状肺炎阳性患者人数明显增加达到 104 人，在 7 月 31 日(第 16 天)新型冠状肺炎患者大幅减少，达到 39 人。

表 1 列出了新疆 2020 年 7 月 16 日至 8 月 17 日新疆新型冠状肺炎患者的描述性统计数据：

Table 1. Descriptive statistics of daily cases of COVID-19 positive patients
表 1. 新型冠状肺炎阳性患者每日病例的描述性统计量

均值	最小值	最大值	标准偏差
36.8484	1	114	29.54208

根据表 1，2020 年 7 月 16 日至 8 月 17 日新疆新型冠状肺炎阳性患者的平均每日病例数约为 37 人。新型冠状肺炎阳性患者病例最多人数发生在 7 月 29 日。多达 114 人，在此之后每日的病例数逐渐减少。

4.2. 新疆新型冠状肺炎阳性患者每日病例数的泊松过程

新疆每日阳性患者病例遵循泊松过程。由泊松过程的特性计算得到每日阳性患者的发生率为：

$$\lambda=\frac{\sum_{i=1}^{33}X_i}{t}=\frac{13+11+\cdots+1}{33}=36.84848\text{ 人每天。}$$

也就是说在 2020 年 7 月 16 日至 2020 年 8 月 17 日期间新疆平均每天大约会有 37 名新型冠状肺炎阳性患者。

从 2020 年 7 月 16 日至 2020 年 8 月 17 日新疆每日的新型冠状肺炎阳性患者病例数的期望和方差分别为：

$$E\left[N(t)\right]=\lambda t=36.84848\times 33=1216.$$

$$Var\left[N(t)\right]=\lambda t=36.84848\times 33=1216.$$

从 2020 年 7 月 16 日至 2020 年 8 月 17 日，新疆新型冠状肺炎阳性患者的平均人数为 1216 人，方差为 1216。从 2020 年 7 月 16 日至 2020 年 8 月 17 日新疆新型冠状肺炎阳性患者病例数为 1216 人。利用泊松过程的特性我们得到，从 2020 年 7 月 16 日至 2020 年 8 月 17 日新疆没有新型冠状肺炎阳性患者病例的概率为：

$$P_n(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

$$P(x=0)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=\mathrm{e}^{-1216}\frac{(1216)^0}{0!}.$$

由此可见，从 2020 年 7 月 16 日至 2020 年 8 月 17 日新疆没有新型冠状肺炎阳性患者病例的概率是非常小的。

4.3. 新疆新型冠状肺炎阳性患者每日花费的复合泊松过程

令 $X=X_i, i=1,2,\cdots,N(t)$ 表示每位新型冠状肺炎阳性患者的花费(包括医疗费及餐食，住宿等)，则从 2020 年 7 月 16 日至 2020 年 8 月 17 日期间新疆新型冠状肺炎阳性患者的总花费可看成一个复合泊松过程 $Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}X(n)$。

由复合泊松过程的特性可得：$E\left[Y(t)\right]=\lambda tE(X_1)$。

因此，利用所得结论我们可以得到从 2020 年 7 月 16 日到 2020 年 8 月 17 日为止新疆新型冠状肺炎阳性患者的平均花费。

4.4. 小结

从 2020 年 7 月 16 日起新疆出现新增新型冠状肺炎阳性患者到 2020 年 8 月 17 日为止新疆无新增病例。在此期间，新疆新型冠状肺炎阳性患者的平均病例数约为 37 人，且没有新型冠状肺炎阳性患者的概率非常小。因此，公众应该始终意识到新型冠状病毒的传播。

5. 结束语

本文对泊松过程和复合泊松过程的相关知识进行介绍，应用泊松过程和复合泊松过程的知识对新疆 2020 年 7 月的新型冠状肺炎阳性患者病例数及花费情况进行分析。计算出了在此期间新疆新型冠状肺炎阳性患者病例数的平均病例 λ，得到相应的新型冠状肺炎阳性患者花费的数学模型。根据文章的分析，帮助政府及相关部门实施不同的防控措施以有效减少新型冠状病毒的传播。

参考文献

[1] Munandar, D., Supian, S. and Subiyanto, S. (2020) Probability Distributions of COVID-19 Tweet Posted Trends Uses

a Nonhomogeneous Poisson Process. *International Journal of Quantitative Research and Modeling*, **1**, 229-238. https://doi.org/10.46336/ijqrm.v1i4.74

[2] Zhang, X., Ma, R. and Wang, L. (2020) Predicting Turning Point, Duration and Attack Rate of COVID-19 Outbreaks in Major Western Countries. *Chaos Solitons & Fractals*, **135**, Article ID: 109829. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109829

[3] Ma, Y., Liu, X., Tao, W., *et al*. (2020) Estimation of the Outbreak Severity and Evaluation of Epidemic Prevention Ability of COVID-19 by Province in China. *American Journal of Public Health*, **110**, 1837-1843. https://doi.org/10.2105/AJPH.2020.305893

[4] S.M.劳斯. 随机过程[M]. 北京: 中国统计出版社, 1997.

[5] 孙荣恒. 随机过程及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

[6] 王梓坤. 随机过程论[M]. 北京: 科学出版社, 1978.