Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(11), 4654-4660**
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1211456

辅助函数法解扩展的BBM方程

李蕴好*，**汪　颖**

大连交通大学理学院，辽宁　大连

收稿日期：2023年10月15日；录用日期：2023年11月8日；发布日期：2023年11月17日

摘　要

扩展的BBM方程是一个含有非线性项的偏微分方程。在物理学中，用非线性偏微分方程来描述物理模型非常普遍；在数学中，非线性偏微分方程可以用来证明Poincaré猜想和Calabi猜想的合理性。利用辅助方程，通过行波变换转化为常微分方程后，借助辅助方程来求解转化后的常微分方程，进而可以得到偏微分方程的精确解。为此，通过行波变换及辅助方程的求解思路对BBM方程进行了研究，并得到了该方程双曲正切函数及三角函数形式的精确解。据此可推广应用至其他类似的非线性偏微分方程中。

关键词

非线性偏微分方程，辅助函数法，BBM方程，精确解

Auxiliary Function Method for Solving Extended BBM Equations

Yunhao Li*, **Ying Wang**

College of Science, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

Received: Oct. 15th, 2023; accepted: Nov. 8th, 2023; published: Nov. 17th, 2023

Abstract

Extended BBM Equations are partial differential equations with nonlinear terms. In physics, it is very common to use nonlinear partial differential equation to describe physical models; in mathematics, nonlinear partial differential equation can be used to prove the rationality of Poincar é conjecture and Calabi conjecture. The auxiliary equation can be transformed into Ordinary differential equation by traveling wave transformation, and then the transformed Ordinary differential equation can be solved by the auxiliary equation, and then the exact solution of partial differential

*通讯作者。

文章引用: 李蕴好, 汪颖. 辅助函数法解扩展的 BBM 方程[J]. 应用数学进展, 2023, 12(11): 4654-4660.
DOI: 10.12677/aam.2023.1211456

equation can be obtained. For this reason, the BBM equation is studied through traveling wave transformation and the idea of solving auxiliary equations, and the exact solutions of the equation in the form of hyperbolic tangent function and Trigonometric functions are obtained. Therefore, it can be extended to other similar nonlinear partial differential equation.

Keywords

Nonlinear Partial Differential Equation, Auxiliary Function Method, BBM Equation, Exact Solution

1. 引言

在应用科学的各个分支的研究中，人们都不可避免地遇到大量的非线性问题，而这些非线性问题都可以通过转化后用偏微分方程这个数学模型来解决，因此偏微分方程在各个领域都扮演着重要的角色。而其的精确解对于研究这些问题的本质至关重要，越来越多的数学工作者致力于非线性偏微分方程精确解的研究。在过去的几十年中，人们研究出很多方法来求解方程的精确解，如反散射变换法[1]、双线性法[2]、Cole-Hopfe 变换法[3]、Darboux 变换法[4]、对称约化方法[5]、混合指数法[6]、齐次平衡法[7]、推广的 tanh 法[8]、Exp-函数法[9]、辅助函数法[10]等，本文将利用辅助函数法求解扩展的非线性 BBM 方程。

$$u_t + \alpha u_x + \beta u u_t - A u_{xx} = 0 \tag{1}$$

2. 辅助函数法

第一步：将偏微分方程转化为常微分方程对于给定的偏微分方程

$$p\left(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt} \cdots\right) = 0$$

函数 $u = u(x,t)$ 包含两个自变量 x、t，引入一个波变换[2]，$u(x,t) = \varphi(\xi), \xi = kx - ct$ 使其转化为如下形式的常微分方程：

$$p\left(\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''' \cdots\right) = 0$$

第二步：求出常微分方程的形式解

假设式(3)的形式解：

$$\varphi(\xi) = \sum_{i=0}^{m} a_i f(\xi)^i$$

其中，m 为幂级数的最高次幂数，可通过平衡常微分方程的最高阶导数项和非线性项来确定 a_i 为待定系数，$f(\xi)$ 满足有 7 组解的辅助方程：

$$f(\xi)' = f(\xi)^2 + \lambda f(\xi) + \mu$$

将形式解与辅助函数方程代入到由偏微分方程转换成的常微分方程中，可以得到一个关于形式解各项系数的非线性代数方程组。利用消元法及 maple 等计算工具求解代数方程组，从而可确定形式解的各

项系数，将求出的各项系数代入形式解可以得形式解的的具体形式。

第三步：确定偏微分方程的精确解

将辅助方程的解代入常微分方程的形式解中，即可得到偏微分方程的精确解。

3. 解扩展的 BBM 方程

第一步：将偏微分方程转化为常微分方程：引入一个波变换，使得

$$u(x,t)=\varphi(\xi),\xi=kx-ct \tag{2}$$

其中 k,c 为非零常数。

将方程(2)代入到方程(1)中：

$$u_t=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}=-c\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}=-c\varphi'$$

$$u_x=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}=k\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}=k\varphi'$$

$$u_{xx}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\right)=k^2\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\xi^2}=k^2\varphi''$$

式(1)可化为一个常微分方程：

$$-c\varphi'+\alpha k\varphi'-\beta c\varphi\varphi'-Ak^2\varphi''=0 \tag{3}$$

第二步：求出常微分方程的形式解

假设式(3)的精确解的形式：

$$\varphi(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_i f(\xi)^i \tag{4}$$

其中，m 为幂级数的最高次幂，a_i 为待定系数，$f(\xi)$ 满足辅助方程：

$$f(\xi)'=f(\xi)^2+\lambda f(\xi)+\mu \tag{5}$$

平衡常微分方程的最高阶导数项与非线性项可知

$$m+m+1=m+2$$

$$m=1$$

方程的形式解式(4)可写成

$$\varphi(\xi)=a_0+a_1 f(\xi) \tag{6}$$

辅助方程(5)的解 $f(\xi)$ 有以下七种情况

I. 当 $\lambda=0,\mu=0$ 时：

$$f(\xi)=\frac{1}{C_0-\xi} \tag{7}$$

II. 当 $\lambda=0,\mu>0$ 时：

$$f(\xi)=\sqrt{\mu}\tan\left[(\xi+C_0)\sqrt{\mu}\right] \tag{8}$$

$$f(\xi)=-\sqrt{\mu}\cot\left[(\xi+C_0)\sqrt{\mu}\right] \tag{9}$$

III. 当 $\lambda=0,\mu<0$ 时：

$$f(\xi)=-\sqrt{-\mu}\tanh\left[(\xi+C_0)\sqrt{-\mu}\right] \tag{10}$$

$$f(\xi)=-\sqrt{-\mu}\coth\left[(\xi+C_0)\sqrt{-\mu}\right] \tag{11}$$

IV. 当 $\lambda\neq0,\mu=0$ 时：

$$f(\xi)=\frac{\lambda}{C_0\lambda e^{-\lambda\xi}-1} \tag{12}$$

V. 当 $\lambda\neq0,\mu\neq0,\lambda^2-4\mu>0$ 时：

$$f(\xi)=-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{(\xi+C_0)\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\right]\sqrt{\lambda^2-4\mu} \tag{13}$$

$$f(\xi)=-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\coth\left[\frac{(\xi+C_0)\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\right]\sqrt{\lambda^2-4\mu} \tag{14}$$

VI. 当 $\lambda\neq0,\mu\neq0,\lambda^2-4\mu=0$ 时：

$$f(\xi)=-\frac{\lambda\xi+C_0\lambda+2}{2(\xi+C_0)} \tag{15}$$

VII. 当 $\lambda\neq0,\mu\neq0,\lambda^2-4\mu<0$ 时：

$$f(\xi)=-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\tan\left[\frac{(\xi+C_0)\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\right]\sqrt{4\mu-\lambda^2} \tag{16}$$

$$f(\xi)=-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\cot\left[\frac{(\xi+C_0)\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\right]\sqrt{4\mu-\lambda^2} \tag{17}$$

其中，C_0 为积分常数。

将式(6)代入式(3)中：

$$-ca_1f'(\xi)+\alpha ka_1f'(\xi)-\beta c\left(a_0+a_1f(\xi)\right)\left(a_1f'(\xi)\right)-Ak^2a_1f''(\xi)=0 \tag{18}$$

将式(5)代入式(18)后合并 $f(\xi)$ 的同次幂项系数，可以得到一个非线性方程组如下：

$$\begin{cases}\alpha k\mu a_1-c\mu a_1-\beta c\mu a_0a_1-Ak^2\lambda\mu a_0a_1=0\\ \alpha k\lambda a_1-c\lambda a_1-\beta c\lambda a_0a_1-Ak^2\lambda^2a_1-\beta c\mu a_1{}^2-2Ak^2\mu a_1=0\\ \alpha ka_1-ca_1-\beta ca_0a_1-Ak^2\lambda^2a_1-\beta c\lambda a_1{}^2-3Ak^2\lambda a_1=0\\ -\beta ca_1{}^2-2Ak^2a_1=0\end{cases}$$

本文仅考虑 $A=1$ 的情况，求解方程组可得：

$$\begin{cases}a_1=\dfrac{2\beta ka_0+2k}{\beta\lambda k-\alpha\beta}\\ c=\dfrac{\lambda k^2-\alpha k}{-\beta a_0-1}\end{cases} \tag{19}$$

其中 a_0 与 k 为任意常数。

将式(9)代入式(6)中得到方程的形式解：

$$\varphi(\xi) = a_0 + \frac{2\beta k a_0 + 2k}{\beta\lambda k - \alpha\beta} f(\xi) \tag{20}$$

第三步：得到常微分方程的精确解

将式(11)~式(21)代入到式(10)中可获得如下 7 组方程的精确解：

解 1：

当 $\lambda = 0, \mu = 0$ 时：

$$u(x,t) = a_0 + \frac{2\beta k a_0 + 2k}{-\alpha\beta(c_0 - \xi)} \tag{21}$$

其中 $\xi = kx - \frac{\alpha k}{\beta a_0 + 1} t$，$k$，$a_0$ 为任意常数。

解 2：

当 $\lambda = 0, \mu > 0$ 时：

$$u(x,t) = a_0 + \left(\frac{2\beta k a_0 + 2k}{-\alpha\beta}\right)\sqrt{\mu}\tan\left[(\xi + C_0)\sqrt{\mu}\right] \tag{22}$$

$$u(x,t) = a_0 + \left(\frac{2\beta k a_0 + 2k}{\alpha\beta}\right)\sqrt{\mu}\cot\left[(\xi + C_0)\sqrt{\mu}\right] \tag{23}$$

其中 $\xi = kx - \frac{\alpha k}{\beta a_0 + 1} t$，$k$，$a_0$ 为任意常数。

解 3：

当 $\lambda = 0, \mu < 0$ 时：

$$u(x,t) = a_0 + \left(\frac{2\beta k a_0 + 2k}{\alpha\beta}\right)\sqrt{-\mu}\tanh\left[(\xi + C_0)\sqrt{-\mu}\right]\text{，见图 1} \tag{24}$$

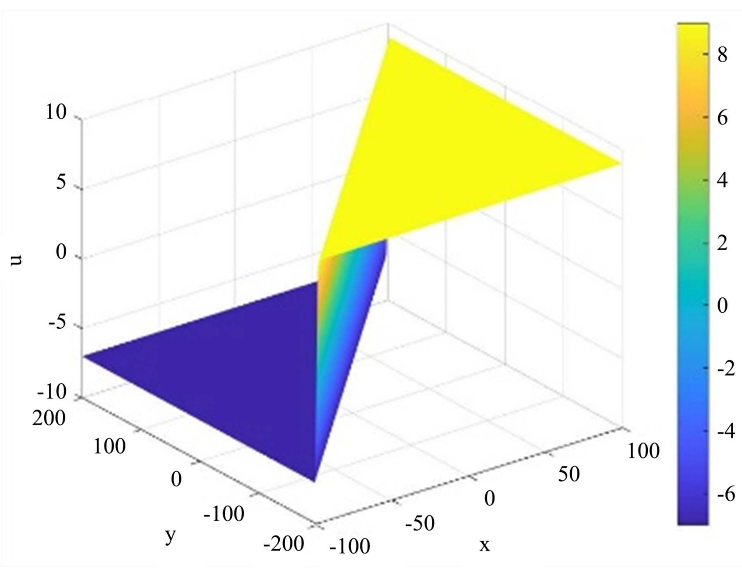

Figure 1. The exact solution image of equation (24)

图 1. 式(24)的精确解

$$u(x,t)=a_0+\left(\frac{2\beta ka_0+2k}{\alpha\beta}\right)\sqrt{-\mu}\coth\left[(\xi+C_0)\sqrt{-\mu}\right]，\text{见图 2} \tag{25}$$

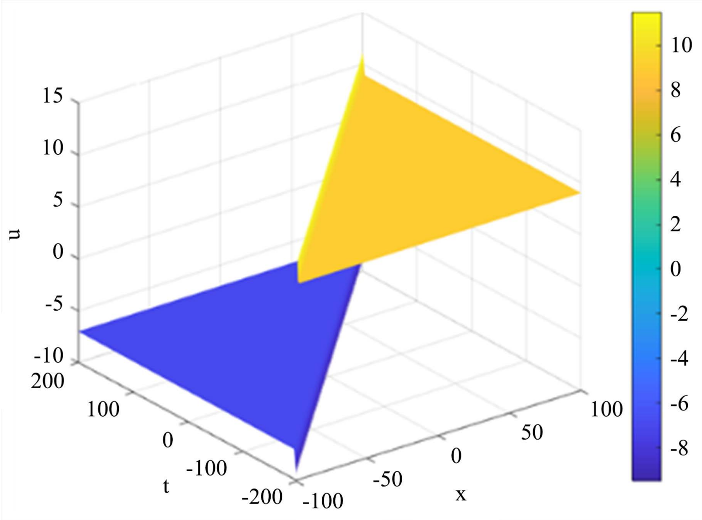

Figure 2. The exact solution image of equation (25)
图 2. 式(25)的精确解

其中 $\xi=kx-\dfrac{\alpha k}{\beta a_0+1}t$， k， a_0 为任意常数。

解 4：

当 $\lambda\neq 0,\mu=0$ 时：

$$u(x,t)=a_0+\left(\frac{2\beta ka_0+2k}{\beta\lambda k-\alpha\beta}\right)\left(\frac{\lambda}{C_0\lambda e^{-\lambda\xi}-1}\right) \tag{26}$$

其中 $\xi=kx-\dfrac{\alpha k-\lambda k^2}{\beta a_0+1}t$， k， a_0 为任意常数。

解 5：

当 $\lambda\neq 0,\mu\neq 0,\lambda^2-4\mu>0$ 时：

$$u(x,t)=a_0+\left(\frac{2\beta ka_0+2k}{\beta\lambda k-\alpha\beta}\right)\left\{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{(\xi+C_0)\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\right]\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right\} \tag{27}$$

$$u(x,t)=a_0+\left(\frac{2\beta ka_0+2k}{\beta\lambda k-\alpha\beta}\right)\left\{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\coth\left[\frac{(\xi+C_0)\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\right]\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right\} \tag{28}$$

其中 $\xi=kx-\dfrac{\alpha k-\lambda k^2}{\beta a_0+1}t$， k， a_0 为任意常数。

解 6：

当 $\lambda\neq 0,\mu\neq 0,\lambda^2-4\mu=0$ 时：

$$u(x,t)=a_0-\left(\frac{2\beta ka_0+2k}{\beta\lambda k-\alpha\beta}\right)\left[\frac{\lambda(\xi+C_0)+2}{2(\xi+C_0)}\right] \tag{29}$$

其中 $\xi = kx - \dfrac{\alpha k - \lambda k^2}{\beta a_0 + 1} t$， k， a_0 为任意常数。

解 7：

当 $\lambda \neq 0, \mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ 时：

$$u(x,t) = a_0 + \left(\frac{2\beta k a_0 + 2k}{\beta\lambda k - \alpha\beta}\right)\left\{-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\tan\left[\frac{(\xi + C_0)\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\right]\sqrt{4\mu - \lambda^2}\right\} \tag{30}$$

$$u(x,t) = a_0 + \left(\frac{2\beta k a_0 + 2k}{\beta\lambda k - \alpha\beta}\right)\left\{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}\cot\left[\frac{(\xi + C_0)\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\right]\sqrt{4\mu - \lambda^2}\right\} \tag{31}$$

4. 结语

本文主要研究一个扩展的非线性 BBM 方程精确解的求法，其中扩散项是文章的创新点，本文在参考相关文献的基础上对求解方法进行了改进，并且提出了针对扩散项问题的一种新的求解方法，与参考文献中的求解方法相比更加具有广泛性并且能够更加方便、系统的求解扩散项相关问题。本文通过引入波变换将其转化为一个可求解的常微分方程，进而可得辅助函数系数取值不同情况下的精确解，并且在解决扩散项问题时，均可根据第三节中给出的 $\lambda = 0, \mu < 0$ 时 BBM 方程解的图像来对函数进行求解，此方法针有较高的适用性，大部分非线性 BBM 方程均适用本文中的解法。

基金项目

辽宁省教育厅高校基本科研项目资助(编号：LJKMZ20220832)。

参考文献

[1] 郭峰毅. 几类非线性偏微分方程的反散射变换及其解析解的研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 中国矿业大学, 2022. https://doi.org/10.27623/d.cnki.gzkyu.2022.000884

[2] 刘俊荣. 应用双线性方法求两类非线性偏微分方程的一些精确解[D]: [博士学位论文]. 西安: 西北大学, 2016.

[3] 张静. 辅助函数法和 Cole-Hope 变换法求 STO 方程的精确解[J]. 淮阴师范学院学报(自然科学版), 2021, 20(2): 100-104. https://doi.org/10.16119/j.cnki.issn1671-6876.2021.02.002

[4] Matveev, V.B. and Salle, M.A. (1991) Darboux Transformation and Solitons. *Journal of Neurochemistry*, **42**, 1667-1676. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00922-2

[5] Olver, P.J. (2000) Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer Science & Business Media, Berlin.

[6] Hereman, W. and Takaoka, M. (1990) Solitary Wave Solutions of Nonlinear Evolution and Wave Equations Using a Direct Method and MACSYMA. *Journal of Physics A Mathematical & General*, **23**, 4805-4822. https://doi.org/10.1088/0305-4470/23/21/021

[7] Wang, M., Zhou, Y. and Li, Z. (1996) Application of a Homogeneous Balance Method to Exact Solutions of Nonlinear Equations in Mathematical Physics. *Physics Letters A*, **216**, 67-75. https://doi.org/10.1016/0375-9601(96)00283-6

[8] Fan, E. (2000) Extended Tanh-Function Method and Its Applications to Nonlinear Equations. *Physics Letters A*, **277**, 212-218. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00725-8

[9] He, J.H. and Wu, X.H. (2006) Exp-Function Method for Nonlinear Wave Equations. *Chaos Solitons & Fractals*, **30**, 700-708. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.020

[10] Jiong, S. (2003) Auxiliary Equation Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equation. *Physics Letters A*, **309**, 387-396. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(03)00196-8