Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(11), 4679-4685
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1211460

一类椭变曲线

李湘江[1]**，李爱玲**[2*]

[1]长沙理工大学工程教育学院，湖南 长沙
[2]航天工程大学士官学校，北京

收稿日期：2023年10月15日；录用日期：2023年11月8日；发布日期：2023年11月17日

摘 要

对圆按一定方向一定比例做压缩或拉伸变换可以得到椭圆。本文提出一类参数方程，通过绘图实验和分析，发现是一种对椭圆进行压拉变换，可得到卵圆和心形线，并获得了这类曲线的面积、质心坐标、转动惯量、旋转卵形体的体积等重要公式。

关键词

H变换，椭变曲线，卵圆，心脏线

A Kind of Elliptic Transform Curves

Xiangjiang Li[1]**, Ailing Li**[2*]

[1]School of Engineering Education, Changsha University of Science & Technology, Changsha Hunan
[2]School of Non-Commissioned Officer, Space Engineering University, Beijing

Received: Oct. 15th, 2023; accepted: Nov. 8th, 2023; published: Nov. 17th, 2023

Abstract

The ellipse can also be regarded as a figure obtained by compressing or stretching a circle in a certain direction in a certain proportion. In this paper, a kind of parametric equation is presented. Through drawing experiment and analysis, it is a transformation of compression and stretching of ellipse to obtain oval and cardioid. The important formulas of the area, centroid coordinate, moment of inertia and volume of rotating oval ball are calculated.

Keywords

***H* Transformation, Elliptic Transformation Curve, Oval, Cardioid**

[*]通讯作者。

文章引用: 李湘江, 李爱玲. 一类椭变曲线[J]. 应用数学进展, 2023, 12(11): 4679-4685.
DOI: 10.12677/aam.2023.1211460

1. 引言

关于圆[1]和椭圆[2]，人们对其定义、几何性质、物理意义及其成因已有非常丰富的认识[3]。而对卵圆和卵形曲线的认识和研究相对滞后，对卵形线的深入研究很有必要。

对圆按一定方向一定比例作压缩或拉伸变换可以得到椭圆[4]。本文对椭圆进行一种纵向上压下拉变换，得到一类由椭圆变换成的曲线，简称为椭变曲线。对椭变曲线进行绘图实验和定形分析，发现它其实是卵圆或心形线，并推导出这类椭变曲线所围图形的面积、所围图形的质心、所围图形转动惯量、所围图形的旋转卵形体的体积等重要公式。

2. 定义

定义 1：设

$$e>0, c>0, k>0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} x = c\cos t \\ y = e(1-k\sin t)\sin t \end{cases}, \ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] \tag{2}$$

则称(2)的图形曲线 L 为椭变曲线，称坐标系原点 O 为 L 的中心，三个参数 e，c，k 分别称为 L 的轴半径、对称半径、定形系数，当 $0<k\le 0.5$ 时称 L 为椭变卵圆，当 $k>0.5$ 时称 L 为椭变心形线。

3. 椭变曲线的定形分析

通过对(2)中的参数e，c，k的数值有规律的改变，得到其曲线 L 的不同图形。通过绘图实验，得到曲线不同参数下的形状和变化趋势，分析总结曲线的形状及其性质。

先限定轴半径 e 和对称半径 c，而定形系数 k 则从 0 不断增大，来观察(2)曲线 L 的图形变化。

现取 $e=4$， $c=3$， 而 k 分别取三组数值进行绘图实验：

① $k=0.1,\ k=0.2,\ k=0.3,\ k=0.5$， 曲线形状变化情况如图 1 所示；

② $k=0.6,\ k=0.7,\ k=0.8,\ k=0.9$， 曲线形状变化情况如图 2 所示；

③ $k=1,\ k=1.3,\ k=1.7,\ k=2$， 曲线形状变化情况如图 3 所示。

当 $k=0$ 时，则(2)变成

$$\begin{cases} x = c\cos t \\ y = e\sin t \end{cases}, \ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] \tag{3}$$

显然(3)为长半轴为 e，短半轴为 c 的椭圆方程。

由图 1 可以发现，随着 k 值的增大，曲线图形整体逐渐下移，曲线顶端上凸曲率逐渐变小，曲线形状呈卵圆形，当 $k=0.5$ 时，曲线顶端局部呈直线状。

由图 2 可以发现， $k>0.5$ 后，曲线图形继续整体下移，曲线顶端形状发生凹陷，随着 k 值的增大，曲线顶端凹陷越来越明显，曲线形状呈心形状。

由图 3 可以发现，当 $k>1$ 后，曲线形状还是呈心形状，曲线顶端凹陷的谷底越过 x 轴，随着 k 值的增大，曲线整体被向下拉长。

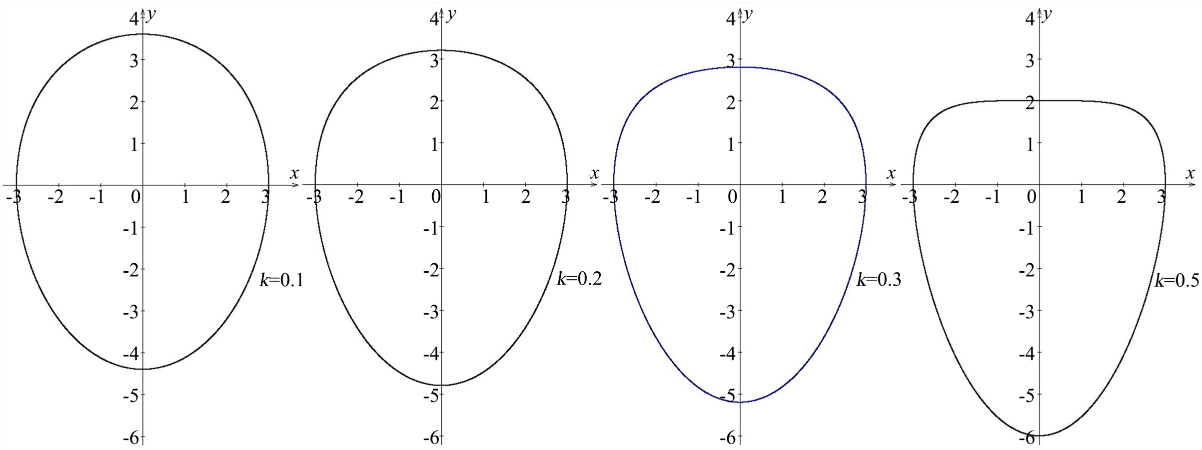

Figure 1. Limited axis radius $e = 4$, symmetric radius $c = 3$, shaping coefficient $k = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$, curve shape change
图 1. 限定轴半径 $e = 4$，对称半径 $c = 3$，定形系数 $k = 0.1$，0.2，0.3，0.5，曲线形状变化情况

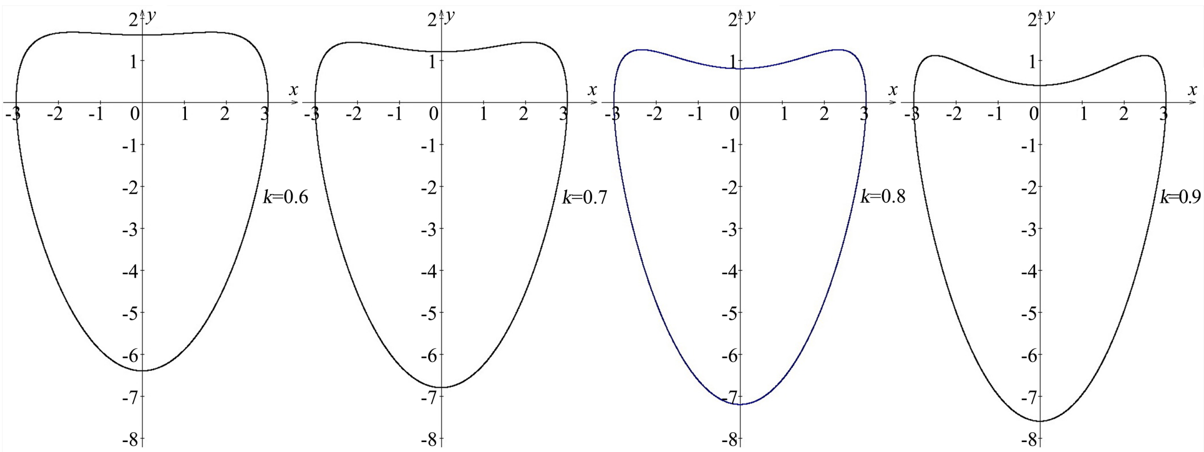

Figure 2. Limited axis radius $e = 4$, symmetric radius $c = 3$, shaping coefficient $k = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$, curve shape change
图 2. 限定轴半径 $e = 4$，对称半径 $c = 3$，定形系数 $k = 0.6$，0.7，0.8，0.9，曲线形状变化情况

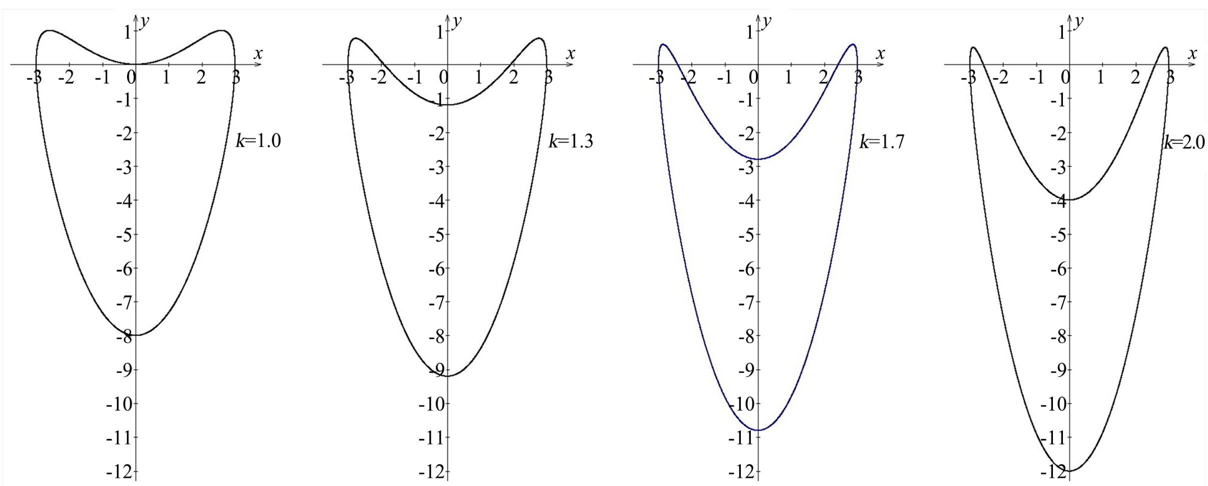

Figure 3. Limited axis radius $e = 4$, symmetric radius $c = 3$, shaping coefficient $k = 1.0, 1.3, 1.7, 2.0$, curve shape change
图 3. 限定轴半径 $e = 4$，对称半径 $c = 3$，定形系数 $k = 1.0$，1.3，1.7，2.0，曲线形状变化情况

通过绘图实验可以总结出，椭变曲线(2)可通过对椭圆(3)按定形系数 k 的纵向上压下拉法的变换(简称为 H 变换)而得到，且 y 轴是椭变曲线(2)的对称轴，变化过程中，曲线在 x 轴上的端点保持不动。可以得出当 $0<k\le 0.5$ 时，H 变换把椭圆(3)变换成卵圆；当 $k>0.5$ 时，H 变换把椭圆(3)变换成心形线。

取 $e=4,c=3$，当 $k=0,0.5,0.8,1,1.3$ 时的曲线整体形状随 k 值的变化规律如图 4 所示。

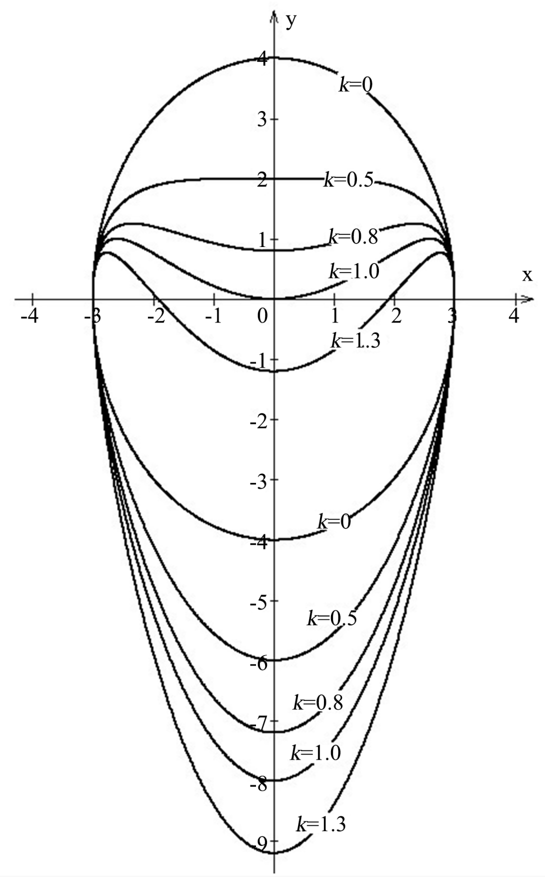

Figure 4. Curve shape changes with the change of k value
图 4. 随 k 值改变，曲线形状整体变化情况

从图 4 看出，对椭圆(3)实施 H 变换的实质，是使椭圆(3)在 y 轴上的上、下两个端点位置同时向下移动 ke 单位，但椭变曲线的长轴长度 $2e$ 保持不变，在 x 轴上的短轴及端点位置保持不变，椭圆图形被上压下拉。随 k 值的增大，在变形过程中形成卵圆和心形线。而椭圆则是卵圆的特殊形式[5]。

4. 椭变曲线的面积

定理 1：设椭变曲线(2)的轴半径为 e，对称半径为 c，所围图形面积为 S，则

$$S=\frac{\pi}{2}ec \tag{4}$$

证明：由文献([6], p. 204)，知

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(xy'-yx'\right)\mathrm{d}t \tag{5}$$

将(2)及其导数代入(5)并化简，得

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[c\cos t\left(e\cos t-ke\sin 2t\right)+e\left(1-k\sin t\right)\sin t\cdot c\sin t\right]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{ec}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)\mathrm{d}t-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}k\sin 2t\cos t\mathrm{d}t-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}k\sin^3 t\mathrm{d}t\right]$$

而

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}t=2\pi$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}k\sin 2t\cos t\mathrm{d}t=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}2k\cos^2 t\mathrm{d}\cos t=-2k\int_0^0 u^2\mathrm{d}u=0$$

$$\frac{c}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}k\sin^3 t\mathrm{d}t=-k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(1-\cos^2 t\right)\mathrm{d}\cos t=-k\int_0^0\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u=0$$

故 $S=\frac{ec}{2}2\pi=\pi ec$，即(4)成立。

注 1： 以 e，c 为长、短半轴的椭圆面积为 πec，而对椭圆(3)实施 H 变换后得到椭变曲线(2)，但其面积仍为 πec，与 k 无关，故 H 变换为“等积变换”。

5. 椭变曲线所围图形的质心

定理 2： 设椭变曲线(2)的轴半径为 e，对称半径为 c，定形系数为 k，曲线所围图形的质心为 $\left(\overline{x},\overline{y}\right)$，则

$$\begin{cases}\overline{x}=0\\ \overline{y}=-\frac{3}{4}ke\end{cases}\tag{6}$$

证明： 由对称性显然有 $\overline{x}=0$。

设椭变曲线(2)的上半部为 $y_2\left(x\right)$，下半部为 $y_1\left(x\right)$，则由(2)可得

$$y_2\left(x\right)=\frac{e}{c^2}\left[c\sqrt{c^2-x^2}-k\left(c^2-x^2\right)\right]\tag{7}$$

$$y_1\left(x\right)=-\frac{e}{c^2}\left[c\sqrt{c^2-x^2}+k\left(c^2-x^2\right)\right]\tag{8}$$

又设卵形曲线(2)所围图形对 x 轴的静力矩为 M_x，则由文献([7], p. 229)知

$$M_x=\frac{1}{2}\int_{-c}^{c}\left(y_2^2-y_1^2\right)\mathrm{d}x\tag{9}$$

将(7)和(8)代入(9)并化简，得

$$M_x=-\frac{2ke^2}{2}\int_{-c}^{c}\left(c^2-x^2\right)\sqrt{c^2-x^2}\mathrm{d}x$$

上式中令 $x=c\sin t$，换元积分之，得

$$M_x=-\frac{2ke^2}{c^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}c^4\cos^4 t\mathrm{d}t=-2ke^2c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}\left(3+4\cos 2t+\cos 4t\right)\mathrm{d}t=-\frac{kce^2c}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\mathrm{d}t=-\frac{3\pi}{4}ke^2c\tag{10}$$

又

$$\overline{y}=\frac{M_x}{S} \tag{11}$$

将(4)和(10)代入(11)得 $\overline{y}=-\frac{3}{4}ke$，故(6)成立。

6. 椭变曲线所围图形的转动惯量

定理 3： 设椭变曲线(2)的轴半径为 e，对称半径为 c，定形系数为 k，曲线所围图形绕 y 轴的转动惯量为 I_y，则

$$I_y=\frac{1}{4}Mc^2 \tag{12}$$

其中

$$M=\pi ec\rho \tag{13}$$

是面密度为常数 ρ 的卵形曲线薄片的质量。

证明： 由文献([7], p. 239)知

$$I_y=\int_{-c}^{c}\rho x^2\left(y_2-y_1\right)\mathrm{d}x \tag{14}$$

将(7)和(8)代入(14)并化简，得

$$\begin{aligned}I_y&=\frac{2e\rho}{c}\int_{-c}^{c}x^2\sqrt{c^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{4e\rho}{c}\int_{0}^{c}x^2\sqrt{c^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{4e\rho}{c}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}c^3\sin^2 t\cdot\cos t\,\mathrm{d}\sin t\\&=4ec^3\rho\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\cos t\right)^2\mathrm{d}t=ec^3\rho\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin 2t\right)^2\mathrm{d}t=ec^3\rho\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t\\&=\frac{ec^3\rho}{2}\left[t-\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}ec^3\rho=\frac{1}{4}Mc^2\end{aligned}$$

其中 $M=\pi ec\rho$。

7. 椭变曲线旋转卵形体的体积

定理 4： 设椭变曲线(2)的轴半径为 e，对称半径为 c，定形系数为 k，曲线所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转卵形体的体积为 V，则

$$V=\frac{4}{3}\pi ec^2 \tag{15}$$

证明： 由文献([8], p. 278)及(2)知，旋转卵形体的体积

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\left(t\right)y'\left(t\right)\mathrm{d}t=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}c^2\cos^2 t\cdot\left[e\cos t-ke\cos t\sin t\right]\mathrm{d}t\\&=\pi ec^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\mathrm{d}t-\pi ec^2k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\sin t\mathrm{d}t\\&=\pi ec^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos t+\cos 3t}{4}\mathrm{d}t+\pi ec^2k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\mathrm{d}\cos t\\&=\pi ec^2\left[\frac{3}{4}\sin t+\frac{1}{12}\sin 3t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\pi ec^2k\int_0^0 u^3\mathrm{d}u\\&=\pi ec^2\cdot\frac{4}{3}+0=\frac{4}{3}\pi ec^2\end{aligned}$$

故(15)成立。

注 2：由(15)知，其体积与定形系数 k 无关，即与椭圆(3)绕 y 轴旋转而成的椭球的体积是相同的，这又一次佐证了 H 变换是“等积变换”。

8. 椭变曲线的周长

定理 8：设椭变曲线(2)的轴半径为 e，对称半径为 c，定形系数为 k，椭变曲线的周长为 l，则

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\mathrm{c}^2\sin^2 t+e^2\left(1-2k\sin t\right)\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

证明：由文献([7], p. 166)的弧长公式

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2\left(x\right)+y'^2\left(x\right)}\,\mathrm{d}t \tag{17}$$

将(2)的导数代入(17)并化简即得(16)。

注 3：当 $k=0$ 时，(16)变成

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\mathrm{c}^2\sin^2 t+e^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

(18)正是长半轴为 e，短半轴为 c 的椭圆的周长公式，这也佐证了公式(16)的正确性。

9. 结语

众所周知，圆、椭圆、双曲线、抛物线等二次曲线已被研究得十分完善，相对来说，人们对卵圆的研究进展较为缓慢。时至今日，对卵圆还没有公认的明确的统一定义。对圆按一定方向一定比例做压缩或拉伸变换可以得到椭圆，椭圆是圆的一个扩展，根据这一思路，本文对椭圆再进行单向压反向拉的 H 变换，提出一类参数方程，通过绘图实验和分析，得到了面积不变的卵圆或心形线，并获得了这类曲线的面积、周长、质心坐标、转动惯量、旋转卵形体的体积等重要公式，给卵圆和心形线的研究提出一种新思路、新方法。

参考文献

[1] 刘绍学. 数学必修 2 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2007: 118-122.

[2] 刘绍学. 数学选修 2-1 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2007: 38-40.

[3] 高慢屯, 李阳, 王淑侠, 等. 一类三焦点曲线[J]. 图学学报, 2016, 37(4): 457-466.

[4] 百度百科. 椭圆[EB/OL]. https://baike.baidu.com/item/椭圆, 2023-05-11.

[5] 李湘江. 一类四次李氏卵圆[J]. 应用数学进展, 2019, 8(2): 193-202.

[6] 同济大学数学系. 高等数学下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007: 204.

[7] Γ.M. 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程二册一分册[M]. 北京大学高等数学教研组, 译. 北京: 人民教育出版社, 1959: 229, 239.

[8] 同济大学数学系. 高等数学上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007: 278.