Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(12), 5083-5092
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1212499

Hans汉斯

Delta算子时滞切换系统的非脆弱H_∞控制

林铭杰

福建师范大学数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2023年11月13日；录用日期：2023年12月7日；发布日期：2023年12月18日

摘 要

本文主要研究Delta算子时滞切换系统的非脆弱H_∞控制问题，基于Lyapunov函数，利用线性矩阵不等式(LMI)方法，首先先得到H_∞控制器存在的条件，使得Delta算子时滞切换系统在任意的切换律下都是渐进稳定的，随后给出设计H_∞控制器的设计方法。最后，通过数值算例验证了所给方法的可行性和有效性。

关键词

Delta算子，切换系统，时滞，非脆弱H_∞控制

Non-Fragile H_∞ Control for Delta Operator Time-Delay Switching Systems

Mingjie Lin

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Nov. 13th, 2023; accepted: Dec. 7th, 2023; published: Dec. 18th, 2023

Abstract

This paper mainly studies the non-fragile H_∞ control problem of delta-operator time-delay switching systems. Based on Lyapunov function, using linear matrix inequality (LMI) method, the existence conditions of H_∞ controller are obtained. The Delta operator time-delay switching system is asymptotically stable under any switching law, and then the design method of H_∞ controller is given. Finally, a numerical example is given to verify the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Keywords

Delta Operator, Switching System, Delay, Non-Fragile H_∞ Control

文章引用: 林铭杰. Delta 算子时滞切换系统的非脆弱 H_∞控制[J]. 应用数学进展, 2023, 12(12): 5083-5092.
DOI: 10.12677/aam.2023.1212499

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

随着科技的发展，特别是在计算机和工业自动化等领域，离散采样控制得到了较好的发展。在现代系统应用中，高速采样的方法越来越重要。但是在高速采样下，用位移算子描述的离散系统经常会出现数值不稳定的现象，这也是众多学者寻求其他描述方法的动力和源泉。20 世纪 80 年代中期 Goodwin 和 Middleton [1]提出采用 Delta 算子来描述离散时间系统，并引入对应于 Delta 算子的 Delta 变换，恰好避免了位移算子算带来的弊端。鉴于 Delta 算子的诸多优点，国内外学者对 Delta 算子系统理论的研究从未间断。2005 年，李惠光[2]等学者编著了国内首部研究 Delta 算子系统的专著，详细地介绍了 Delta 算子系统理论。肖民卿等人研究了 Delta 算子系统的非脆弱方差控制[3]、带故障的鲁棒 H_∞控制[4]和 Delta 算子时滞系统的可靠 D-稳定[5]。Yang [6]等人提出与了改善执行器饱和的 Delta 算子系统反馈控制的新方法，并研究了 Delta 算子系统的鲁棒容错控制问题。

而切换系统主要的研究方向包括系统的稳定性、能控性以及能观性等其他综合性问题，其中切换系统的稳定性是切换系统研究的热点问题之一，也是研究切换系统其他控制问题的前提条件。切换系统的常用研究方法主要分为公共 Lyapunov 方法[7]、多 Lyapunov 方法[8]以及驻留时间方法[9]等。

Delta算子切换系统可以看作是每个子系统都是Delta算子系统的切换系统。切换系统是处理复杂系统问题较为优异的模型，Delta算子切换系统的研究得到了控制界学者的关注，并取得了一些进展。向峥嵘等人基于平均驻留方法，给出了不确定Delta算子切换系统指数稳定的充分条件[10]，并研究了鲁棒滤波器[11]和其他鲁棒控制问题[12]。Hu等人基于多Lyapunov方法和凸组合方法，研究了Delta算子切换系统的可靠极点配置[13]容错控制[14]及非脆弱可靠 D-稳定[15]等问题，创新性的引入一阶LMI区域，推动了区域极点配置理论的发展。

本文在第 2 节中对所研究的 Delta 算子时滞切换系统的非脆弱 H_∞控制问题进行了描述。第 3 节利用线性矩阵不等式(LMI)方法和 Lyapunov 稳定性理论，研究了系统渐进稳定和存在 γ-次优非脆弱 H_∞控制律的条件，并设计了非脆弱 H_∞控制控制器，最后进行数值仿真验证了这个结论的可行性。

符号说明：$\mathbf{R}$ 代表实数域，$\mathbf{R}^n$ 代表 n 维欧几里得空间，$\mathbf{R}^{n\times m}$ 表示维数为 $n\times m$ 的所有实矩阵集合。$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆。$\boldsymbol{I}$ 表示适当阶数的单位矩阵，$\mathbf{0}$ 表示适当阶数的零矩阵。对称矩阵中的“*”表示矩阵相应的对称分块。$\boldsymbol{S}>0$ （$\boldsymbol{S}<0$）表示矩阵 $\boldsymbol{S}$ 是对称正(负)定矩阵，$\boldsymbol{S}\ge 0$ （$\boldsymbol{S}\le 0$）表示矩阵 $\boldsymbol{S}$ 是对称半正(负)定矩阵，对于两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，$A<B$（$A\le B$）表示矩阵 $B-A$ 是正定(半正定)。$|\cdot|$ 表示向量的欧几里得范数，$\|\cdot\|$ 表示矩阵的谱范数。

为了解决下文中的问题，提前给出下面两个引理。

引理 1 [16] 对给定矩阵 $S=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$，其中 S_{11} 是 $r\times r$ 的，以下三个条件等价：

1) $S<0$；
2) $S_{11}<0$；
3) $S_{22}<0$，$S_{22}-S_{21}S_{11}^{-1}S_{12}<0$。

引理 2 [16] 给定适当维数的矩阵 Y，D 和 E，其中 Y 是对称的，则对所有满足 $F^{\mathrm{T}}F\le I$ 的矩阵 F，$Y+DFE+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}<0$ 成立当且仅当存在一个常数 $\varepsilon>0$，使得

$$Y+\varepsilon DD^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E<0$$

2. 问题描述

Delta 算子定义为：

$$\delta=\frac{q-1}{T}$$

其中 q 为前向位移算子，即 $qx(k)=x(k+1)$，h 为系统采样周期。

考虑一类由 Delta 描述的不确定时滞切换系统：

$$\begin{cases}\delta x(k)=\left(A_{\sigma(k)}+\Delta A_{\sigma(k)}\right)x(k)+\left(A_{1\sigma(k)}+\Delta A_{1\sigma(k)}\right)x(k-d)+\left(B_{\sigma(k)}+\Delta B_{\sigma(k)}\right)u(k)+\left(B_{1\sigma(k)}+\Delta B_{1\sigma(k)}\right)w(k),\\ z(k)=\left(C_{\sigma(k)}+\Delta C_{\sigma(k)}\right)x(k)+\left(D_{\sigma(k)}+\Delta D_{\sigma(k)}\right)w(k)\end{cases}\tag{1}$$

其中：$\sigma(k):\mathbb{R}^{+}\to\bar{N}=1,2,\cdots,N$ 是切换律，$i\in\bar{N}$，$x(k)\in\mathbf{R}^{n}$、$u(k)\in\mathbf{R}^{m}$ 和 $w(k)$ 分别为系统的状态、控制输入和外部扰动输入且 $w(k)\in L_2[0,\infty]$，$z(k)\in\mathbf{R}^{q}$ 是被调输出，T 为采样周期，d 是系统的状态滞后时间，假定 $0\le d\le\bar{d}$，$A_{\sigma(k)}$、$A_{1\sigma(k)}$、$B_{\sigma(k)}$、$B_{\sigma(k)}$、$C_{\sigma(k)}$ 和 $D_{\sigma(k)}$ 是已知的适当维数的实常数矩阵，$\Delta A_{\sigma(k)}$、$\Delta A_{1\sigma(k)}$、$\Delta B_{\sigma(k)}$、$\Delta B_{1\sigma(k)}$、$\Delta C_{\sigma(k)}$ 和 ΔD 是不确定矩阵，表示系统模型中的不确定参数，且满足：

$$\left[\Delta A_{\sigma(k)},\Delta A_{1\sigma(k)},\Delta B_{\sigma(k)},\Delta B_{1\sigma(k)}\right]=H_{\sigma(k)}F_{1\sigma(k)}\left[E_{1\sigma(k)},E_{2\sigma(k)},E_{3\sigma(k)},E_{4\sigma(k)}\right]\tag{2}$$

$$\left[\Delta C_{\sigma(k)},\Delta D_{\sigma(k)}\right]=M_{\sigma(k)}F_{1\sigma(k)}\left[E_{5\sigma(k)},E_{6\sigma(k)}\right]\tag{3}$$

其中对任意 $\sigma(k)\in\bar{N}$，不确定 $F_{1\sigma(k)}$，满足 $F_{1\sigma(k)}^{\mathrm{T}}F_{1\sigma(k)}\le I$。$H_{\sigma(k)}$、$M_{\sigma(k)}$、$E_{1\sigma(k)}$、$E_{2\sigma(k)}$、$E_{3\sigma(k)}$、$E_{4\sigma(k)}$、$E_{5\sigma(k)}$ 和 $E_{6\sigma(k)}$ 为组成不确定性结构的适维常数矩阵。

采用状态反馈控制，并假定控制器具有加性增益不确定性，具体如下：

$$u_{\sigma(k)}(k)=\left(K_{\sigma(k)}+\Delta K_{\sigma(k)}\right)x(k)=\bar{K}x(k)\tag{4}$$

其中：

$$\Delta K_{\sigma(k)}=G_{\sigma(k)}F_{2\sigma(k)}E_{7\sigma(k)}\tag{5}$$

$G_{\sigma(k)}$ 和 $E_{7\sigma(k)}$ 为已知的适维常数矩阵，$F_{2\sigma(k)}\in R^{i\times j}$ 是满足 $F_{2\sigma(k)}^{\mathrm{T}}F_{2\sigma(k)}\le I$ 的不确定矩阵。得到闭环系统为：

$$\begin{cases}\delta x(k)=\left(A_{c\sigma(k)}+B_{c\sigma(k)}\bar{K}\right)x(k)+A_{d\sigma(k)}x(k-d)+B_{d\sigma(k)}w(k),\\ z(k)=\left(C_{\sigma(k)}+\Delta C_{\sigma(k)}\right)x(k)+\left(D_{\sigma(k)}+\Delta D_{\sigma(k)}\right)w(k)\end{cases}\tag{6}$$

其中：

$$\begin{aligned}&A_{c\sigma(k)}=A_{\sigma(k)}+\Delta A_{\sigma(k)},A_{d\sigma(k)}=A_{1\sigma(k)}+\Delta A_{1\sigma(k)}\\&B_{c\sigma(k)}=B_{\sigma(k)}+\Delta B_{\sigma(k)},B_{d\sigma(k)}=B_{1\sigma(k)}+\Delta B_{1\sigma(k)}\\&A_{0\sigma(k)}=A_{c\sigma(k)}+B_{c\sigma(k)}\bar{K}_{\sigma(k)}\end{aligned}$$

定义 1 对给定的正数 γ，如果对所有满足(2)、(3)和(5)的不确定参数，闭环系统(6)是渐进稳定的，且在零初始条件下，被调输出 $z(k)$ 满足 $\|z\|_2\le\gamma\|w\|_2$，则状态反馈控制律(4)称为是系统(1)的 γ-次优非脆弱 H_∞控制律。

3. 主要结论

定理 1 对给定正数 γ，任意的 $i\in\bar{N}$，系统(1)存在 γ-次优非脆弱 H_∞控制律(4)的一个充分条件是存在

对称正定矩阵 P 和 Q，使得对所有允许的不确定参数，下列矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} A_{0i}^{\mathrm{T}}P+PA_{0i}+Q & * & * & * & * \\ A_{di}^{\mathrm{T}}P & -Q & * & * & * \\ B_{di}^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ A_{0i} & A_{di} & B_{di} & -\dfrac{P^{-1}}{T} & * \\ C_i+\Delta C_i & 0 & D_i+\Delta D_i & 0 & -I \end{bmatrix}<0 \tag{7}$$

证明 考虑 Lyapunov 函数

$$V\left(x(k)\right)=V_1\left(x(k)\right)+V_2\left(x(k)\right) \tag{8}$$

其中，$V_1\left(x(k)\right)=x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)$，$V_2\left(x(k)\right)=T\sum_{i=1}^{d}x^{\mathrm{T}}(k-i)Qx(k-i)$。

在 $w(k)=0$ 时，由 $x(k+1)=T\delta x(k)+x(k)$ 可得

$$\begin{aligned}\delta V_1\left(x(k)\right)&=\frac{1}{T}\left(V\left(x(k+1)\right)-V\left(x(k)\right)\right)\\ &=\frac{1}{T}\left(x^{\mathrm{T}}(k+1)Px(k+1)-x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)\right)\\ &=\frac{1}{T}\left(\left(T\delta x(k)+x(k)\right)^{\mathrm{T}}P\left(T\delta x(k)+x(k)\right)-x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)\right)\\ &=\frac{1}{T}\Big(\left(T\left(A_{0\sigma(k)}x(k)+A_{d\sigma(k)}x(k-d)\right)+x(k)\right)^{\mathrm{T}}P\Big(T\Big(A_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}x(k)\\ &\quad+A_{d\sigma(k)}x(k-d)\Big)+x(k)\Big)-x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)\Big)\\ &=x^{\mathrm{T}}(k)\left(A_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}P+PA_{0\sigma(k)}+TA_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{0\sigma(k)}\right)x(k)\\ &\quad+x^{\mathrm{T}}(k-d)\left(TA_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{d\sigma(k)}\right)x(k-d)\\ &\quad+x^{\mathrm{T}}(k)\left(TA_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{d\sigma(k)}+PA_{d\sigma(k)}\right)x(k-d)\\ &\quad+x^{\mathrm{T}}(k-d)\left(TA_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{0\sigma(k)}+A_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}}P\right)x(k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta V_2\left(x(k)\right)&=\frac{1}{T}\left(V\left(x(k+1)\right)-V\left(x(k)\right)\right)\\ &=\frac{1}{T}\left(T\sum_{i=1}^{d}x^{\mathrm{T}}(k+1-i)Qx(k+1-i)-T\sum_{i=1}^{d}x^{\mathrm{T}}(k-i)Qx(k-i)\right)\\ &=x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k)-x^{\mathrm{T}}(k-d)Qx(k-d)\end{aligned}$$

将上面两式相加代入(8)中可得

$$\begin{aligned}\delta V\left(x(k)\right)&=\delta V_1\left(x(k)\right)+\delta V_2\left(x(k)\right)\\ &=x^{\mathrm{T}}(k)\left(A_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}P+A_{0\sigma(k)}+TA_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{0\sigma(k)}\right)x(k)+x^{\mathrm{T}}(k-d)\left(TA_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{d\sigma(k)}\right)x(k-d)\\ &\quad+x^{\mathrm{T}}(k)\left(TA_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{d\sigma(k)}+PA_{d\sigma(k)}\right)x(k-d)+x^{\mathrm{T}}(k-d)\left(TA_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{0\sigma(k)}+A_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}P\right)x(k)\\ &\quad+x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k)-x^{\mathrm{T}}(k-d)Qx(k-d)\\ &=\begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\Xi\begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中，$\Xi=\begin{bmatrix} A_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}P+PA_{0\sigma(k)}+TA_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{0\sigma(k)}+Q & TA_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{d\sigma(k)}+PA_{d\sigma(k)} \\ TA_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{0\sigma(k)}+A_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}}P & TA_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{d\sigma(k)}-Q \end{bmatrix}$。

由引理 1 可得

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}P+PA_{0\sigma(k)}+TA_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{0\sigma(k)}+Q & TA_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{d\sigma(k)}+PA_{d\sigma(k)} \\ TA_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{0\sigma(k)}+A_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}}P & TA_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PA_{d\sigma(k)}-Q \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{bmatrix} A_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}} \\ A_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} TP \begin{bmatrix} A_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}} \\ A_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} A_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}P+PA_{0\sigma(k)}+Q & PA_{d\sigma(k)} \\ A_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}}P & -Q \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{bmatrix} A_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}}P+PA_{0}+Q & PA_{d\sigma(k)} & A_{0\sigma(k)}^{\mathrm{T}} \\ A_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}}P & -Q & A_{d\sigma(k)}^{\mathrm{T}} \\ A_{0\sigma(k)} & A_{d\sigma(k)} & -\dfrac{P^{-1}}{T} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

再由引理 1 的变化后，矩阵不等式(7)成立可知矩阵不等式(9) <0 也成立。

因此，$\delta V\left(x\left(k\right)\right)<0$，故闭环系统(6)在任意切换律下是渐进稳定的。

进而，对任意非零的 $w\left(k\right)\in L_2\left[0,\infty\right)$，

$$\begin{aligned} &\delta V\left(k\right)+z^{\mathrm{T}}\left(k\right)z\left(k\right)-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}\left(k\right)w\left(k\right) \\ &=\begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \\ w(k) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left(\begin{bmatrix} A_{0i}^{\mathrm{T}} \\ A_{di}^{\mathrm{T}} \\ B_{di}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} TP\begin{bmatrix} A_{0i} & A_{di} & B_{di} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{0i}^{\mathrm{T}}P+PA_{0i}+Q & PA_{di} & PB_{di} \\ A_{di}^{\mathrm{T}}P & -Q & 0 \\ B_{di}^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. +\begin{bmatrix} \left(C_i+\Delta C_i\right)^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ \left(D_i+\Delta D_i\right)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i+\Delta C_i & 0 & D_i+\Delta D_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \\ w(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

利用引理 1 可得，矩阵不等式(6)成立时有

$$\delta V\left(k\right)+z^{\mathrm{T}}\left(k\right)z\left(k\right)-\gamma^2 w^{\mathrm{T}}\left(A\right)x\left(A\right)<0\text{，对 }\forall k>0$$

由零初始条件可得，

$$\sum_{k=0}^{N} z^{\mathrm{T}}\left(k\right)z\left(k\right)-\gamma^2\sum_{k=0}^{N} w^{\mathrm{T}}\left(k\right)w\left(k\right)<-\sum_{k=0}^{N}\delta V\left(k\right)=\frac{-V\left(N+1\right)}{T}\le 0\text{，对 }\forall N>0$$

由此可得 $\|z\|_2\le\gamma\|w\|_2$。定理得证。

定理 2 对给定的正数 γ，任意 $i\in\bar{N}$，存在对称正定矩阵 P 和 Q，使得对任意允许的系数参数不确定性和控制器增益不确定性，矩阵不等式(6)成立，当存在大于零的常数 ε_1，ε_2，ε_3，对正定矩阵 X，V 和 W 使得如下线性矩阵不等式可行：

$$\begin{bmatrix} R_{1i} & * & * & * & * & * & * & * & * \\ (A_{1i}X)^{\mathrm{T}} & -V & * & * & * & * & * & * & * \\ B_{1i}^{\mathrm{T}} & 0 & -\rho I & * & * & * & * & * & * \\ R_{2i} & A_{1i}X & B_{1i} & R_{3i} & * & * & * & * & * \\ C_iX & 0 & D_i & 0 & R_{4i} & * & * & * & * \\ \varepsilon_1 G_i^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \varepsilon_1 G_i^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} & 0 & -\varepsilon_1 I & * & * & * \\ E_{1i}X + E_{2i}W & E_{2i}W & E_{4i} & 0 & 0 & \varepsilon_1 E_{3i} G_i & -\varepsilon_{2I} & * & * \\ E_{5i} & 0 & E_{6i} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & * \\ E_{7i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0 \tag{10}$$

其中：

$$R_{1i} = (A_iX + B_iW)^{\mathrm{T}} + (A_iX + B_iW) + V + \varepsilon_2 H_i H_i^{\mathrm{T}}, R_{2i} = (A_iX + B_iW) + \varepsilon_2 H_i H_i^{\mathrm{T}}$$

$$R_{3i} = \varepsilon_2 H_i H_i^{\mathrm{T}} - \frac{X}{T}, R_{4i} = \varepsilon_3 M_i M_i^{\mathrm{T}} - I, \rho = \gamma^2$$

且 $u_{\sigma(k)}(k) = \left(K_{\sigma(k)} + \Delta K_{\sigma(k)}\right)x(k)$ 是系统(1)的一个 γ -次优非脆弱 H_∞控制律，其中 $K = WX^{-1}$ 。

证明 矩阵不等式(7)可以写成

$$M_1 + \begin{bmatrix} PB_{ci}G_i \\ 0 \\ 0 \\ B_{ci}G_i \\ 0 \end{bmatrix} F_{2i} \begin{bmatrix} E_{7i}^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \left(\begin{bmatrix} PB_{ci}G_i \\ 0 \\ 0 \\ B_{ci}G_i \\ 0 \end{bmatrix} F_{2i} \begin{bmatrix} E_{7i}^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}} < 0 \tag{11}$$

其中：

$$M_1 = \begin{bmatrix} A_{fi}^{\mathrm{T}} P + PA_{fi} + Q & * & * & * & * \\ A_{di}^{\mathrm{T}} P & -Q & * & * & * \\ B_{di}^{\mathrm{T}} P & 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ A_{fi} & A_{di} & B_{di} & -\dfrac{P^{-1}}{T} & * \\ C_i + \Delta C_i & 0 & D_i + \Delta D_i & 0 & -I \end{bmatrix}, A_{fi} = A_{ci} + B_{ci} K_i$$

根据引理 2，对所有允许的不确定矩阵 F_{2i} ，(11)式成立的一个充要条件是存在 $\varepsilon_1 > 0$ ，使得

$$M_{1i} + \varepsilon_1 \begin{bmatrix} PB_{ci}G_i \\ 0 \\ 0 \\ B_{ci}G_i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PB_{ci}G_i \\ 0 \\ 0 \\ B_{ci}G_i \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \varepsilon_1^{-1} \begin{bmatrix} E_{7i}^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{7i}^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

由引理 1 及一些等价变化可得(12)式等价于

$$
\begin{aligned}
&M_{2i}+\begin{bmatrix} PH_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ H_i & 0 \\ 0 & M_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{1i} & 0 \\ 0 & F_{1i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(E_{1i}+E_{3i}K_i\right)^{\mathrm{T}} & E_{5i}^{\mathrm{T}} \\ E_{2i}^{\mathrm{T}} & 0 \\ E_{4i}^{\mathrm{T}} & E_{6i}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \left(\varepsilon_1 E_{3i} G_i\right)^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&+\left(\begin{bmatrix} PH_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ H_i & 0 \\ 0 & M_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{1i} & 0 \\ 0 & F_{1i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(E_{1i}+E_{3i}K_i\right)^{\mathrm{T}} & E_{5i}^{\mathrm{T}} \\ E_{2i}^{\mathrm{T}} & 0 \\ E_{4i}^{\mathrm{T}} & E_{6i}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \left(\varepsilon_1 E_{3i} G_i\right)^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}<0
\end{aligned} \tag{13}
$$

其中：

$$
M_{2i}=\begin{bmatrix} Y_i & * & * & * & * & * \\ A_{1i}^{\mathrm{T}}P & -Q & * & * & * & * \\ B_{2i}^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * \\ A_i+B_iK_i & A_{1i} & B_{2i} & -\dfrac{P^{-1}}{T} & * & * \\ C_i & 0 & D_i & 0 & I & * \\ \varepsilon_1 G_i^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} P & 0 & 0 & \varepsilon_1 G_i^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} & 0 & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix}
$$

$$
Y_i=\left(A_i+B_iK_i\right)^{\mathrm{T}}P+P\left(A_i+B_iK_i\right)+Q+\varepsilon_1^{-1}E_{7i}^{\mathrm{T}}E_{7i}
$$

根据引理 2，对所有允许的不确定矩阵 F_{1i}，(13)式成立的一个充要条件是存在ε_2，$\varepsilon_3>0$，使得

$$
\begin{aligned}
&M_{2i}+\begin{bmatrix} PH_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ H_i & 0 \\ 0 & M_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_2 I & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 I \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} PH_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ H_i & 0 \\ 0 & M_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} \\
&+\begin{bmatrix} \left(E_{1i}+E_{3i}K_i\right)^{\mathrm{T}} & E_{5i}^{\mathrm{T}} \\ E_{2i}^{\mathrm{T}} & 0 \\ E_{4i}^{\mathrm{T}} & E_{6i}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \left(\varepsilon_1 E_{3i} G_i\right)^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_2^{-1} I & 0 \\ 0 & \varepsilon_3^{-1} I \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} \left(E_{1i}+E_{3i}K_i\right)^{\mathrm{T}} & E_{5i}^{\mathrm{T}} \\ E_{2i}^{\mathrm{T}} & 0 \\ E_{4i}^{\mathrm{T}} & E_{6i}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \left(\varepsilon_1 E_{3i} G_i\right)^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}<0
\end{aligned} \tag{14}
$$

由引理 1 及一些等价变形可得(14)式等价于

$$
\begin{bmatrix}
Y_{1i} & * & * & * & * & * & * & * & * \\
A_{1i}P & -Q & * & * & * & * & * & * & * \\
B_{1i}^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * & * \\
Y_{2i} & A_{1i} & B_{1i} & Y_{3i} & * & * & * & * & * \\
C_i & 0 & D_i & 0 & Y_{4i} & * & * & * & * \\
\varepsilon_1 G_i^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} P & 0 & 0 & \varepsilon_1 G_i^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} & 0 & -\varepsilon_1 I & * & * & * \\
E_{1i}+E_{2i}K_i & E_{2i} & E_{4i} & 0 & 0 & \varepsilon_1 E_{3i} G_i & -\varepsilon_2 I & * & * \\
E_{5i} & 0 & E_{6i} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & * \\
E_{7i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I
\end{bmatrix} < 0 \tag{15}
$$

其中：

$$
Y_{1i} = \left(A_i + B_i K_i\right)^{\mathrm{T}} P + P\left(A_i + B_i K_i\right) + Q + \varepsilon_2 P H_i H_i^{\mathrm{T}} P Y_{2i} = A_i + B_i K_i + \varepsilon_2 H_i H_i^{\mathrm{T}} P
$$

$$
Y_{3i} = \varepsilon_2 H_i H_i^{\mathrm{T}} - \frac{P^{-1}}{T}, Y_{4i} = \varepsilon_3 M_i M_i^{\mathrm{T}} - I
$$

将上式两边分别左乘、右乘 $\mathrm{diag}\left\{P^{-1}, P^{-1}, I, I, I, I, I, I, I\right\}$，并记 $P^{-1} = X$，$KP^{-1} = W$，$P^{-1}QP^{-1} = V$，$\gamma^2 = \rho$，即可得到(10)式。

4. 数值算例

给定由两个子系统组成的系统(6)，其中

$$
A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -1.3 & -1 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} 2.4 & 0 \\ 0 & 1.3 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
B_{11} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ -1.3 & 0.3 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.31 \\ 0.25 \end{bmatrix}
$$

$$
A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2.3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
B_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.9 \\ -1.3 & 0.2 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}
$$

$$
H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \end{bmatrix}, M_1 = M_2 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix}
$$

$$
E_{11} = E_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, E_{21} = E_{22} = \begin{bmatrix} 0.2 \end{bmatrix}
$$

$$
E_{31} = E_{32} = \begin{bmatrix} 0.6 \end{bmatrix}, E_{41} = E_{42} = \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix}
$$

$$
E_{51} = E_{52} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix}, E_{61} = E_{62} = \begin{bmatrix} 0.15 \end{bmatrix}
$$

$$
E_{71} = E_{72} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{bmatrix}, G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}
$$

采样周期 $T = 0.01$，滞后上界 $\bar{d} = 3$。根据定理 2 提出的设计方法，对给定的正数 $\rho = 2$，应用MATLAB 的 LMI 工具箱中的求解器 feasp 求解线性矩阵不等式(10)，得到可行解为：

$$
X_1 = \begin{bmatrix} 0.0191 & 0.0034 \\ 0.0034 & 0.0275 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} -0.4041 & -1.5535 \end{bmatrix}
$$

$$
V_1 = \begin{bmatrix} 0.2242 & 0.2489 \\ 0.2489 & 0.9242 \end{bmatrix}
$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.1272 & 0.6168 \\ 0.6168 & 4.4247 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} -27.0821 & -95.5380 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 5.1006 & 17.9376 \\ 17.9376 & 66.8946 \end{bmatrix}$$

从而可得：

$$K_1 = \begin{bmatrix} -11.4894 & -55.1069 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -343.9721 & 27.0316 \end{bmatrix}$$

设系统初始状态 $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，外部扰动 $\boldsymbol{w}(k) = 0.01\sin(k)$，给定任意一个切换律(如图 1 所示)，得到闭环系统状态轨迹如图 2 所示。

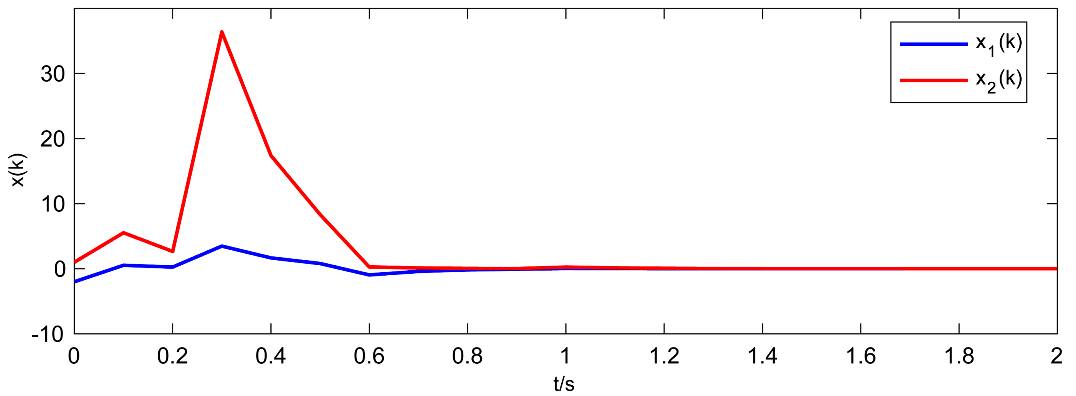

Figure 1. Switching law
图 1. 切换律

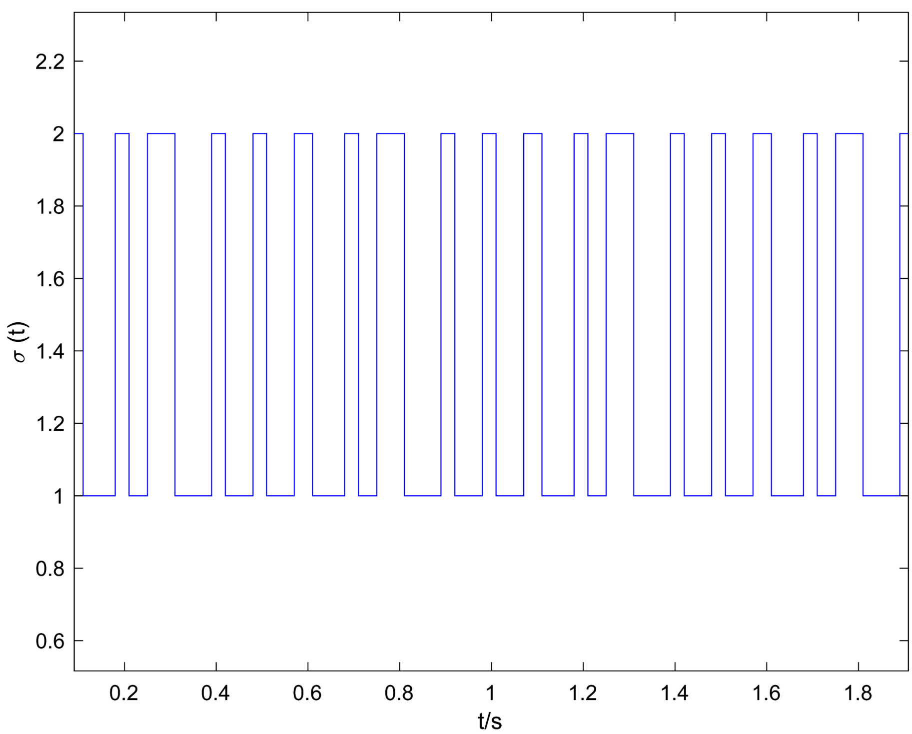

Figure 2. The state trajectories of the closed-loop system
图 2. 闭环系统状态轨迹

5. 总结与展望

本文利用LMI方法及公共Lyapunov稳定性理论对Delta算子时滞切换系统设计了具有非脆弱的H_∞控制器，使得在任意切换律下的Delta算子时滞切换系统都是渐进稳定的。

虽然取得了一些成果，但仍然存在一些问题值得进一步思考。研究的控制约束是线性系统，非线性系统方面还未涉及。运用公共 Lyapunov 函数和线性矩阵不等式方法，对于是否可以利用多 Lyapunov 函数和平均驻留时间方法来研究该方面的问题，需要进一步探讨。

参考文献

[1] Middleton, R.H. and Goodwin, G.C. (1986) Improved Finite Word Length Characteristics in Digital Control Using Delta Operator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31**, 1015-1021. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104162

[2] 李惠光, 武波, 李国友, 杨晨影. Delta 算子控制及其鲁棒控制理论基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.

[3] 肖民卿, 陈金玉, 曹长修. Delta 算子系统具有极点约束的鲁棒非脆弱方差控制[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(6): 1139-1141.

[4] 肖民卿. 传感器有故障的 Delta 算子线性不确定系统的鲁棒 D-稳定[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(2): 183-185.

[5] 肖民卿, 苏宏业, 徐巍华. Delta 算子时滞系统的可靠 D-镇定[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(1): 77-83.

[6] Yang, H., Zhang, L., Shi, P., *et al*. (2015) Enlarging the Domain of Attraction and Maximising Convergence Rate for Delta Operator Systems with Actuator Saturation. *International Journal of Control*, **88**, 2030-2043. https://doi.org/10.1080/00207179.2015.1027954

[7] Liberzon, D., Hespanha, J. and Morse, A.S. (1999) Stability of Switched Linear Systems: A Lie-Algbraic Condition. *Systems and Control Letters*, **37**, 117-122. https://doi.org/10.1016/S0167-6911(99)00012-2

[8] Branicky, M.S. (1998) Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**, 475-482. https://doi.org/10.1109/9.664150

[9] Morse, A.S. (1996) Supervisory Control of Families of Linear Set-Point Controllers—Part I. Exact Matching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**, 1413-1431. https://doi.org/10.1109/9.539424

[10] Xiang, Z.R. and Wang, R.H. (2010) Robust H_∞ Control for a Class of Uncertain Switched Systems Using Delta Operator. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **32**, 331-344. https://doi.org/10.1177/0142331210361415

[11] 高金凤, 向峥嵘, 陈桂. Delta 算子切换系统的鲁棒滤波器研究[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(23): 114-118.

[12] 高金凤, 向峥嵘, 陈桂. 不确定 Delta 算子切换系统的鲁棒控制研究[J]. 计算机仿真, 2012, 29(10): 189-195.

[13] Hu, H. (2018) Reliable Pole Assignment of Delta Operator Switched Systems Based on Static Output Feedback. 2018 *Chinese Control and Decision Conference*, Shenyang, China, 9-11 June 2018, 282-285. https://doi.org/10.1109/CCDC.2018.8407145

[14] Hu, H. and Liu, J.L. (2017) Fault-Tolerant Control of Delta Operator Switched Linear Systems with Sensor Faults Based on Dynamic Output Feedback. 2017 29*th Chinese Control and Decision Conference*, Chongqing, China, 28-30 May 2017, 4182-4186. https://doi.org/10.1109/CCDC.2017.7979233

[15] Hu, H. (2016) Non-Fragile Reliable D-Stabilization for Delta Operator Switched Linear Systems. *Journal of the Franklin Institute*, **353**, 1969-1973.

[16] 俞立. 鲁棒控制: 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.