

Toric曲面的渐进迭代逼近

段卓, 彭兴璇*

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年11月25日; 录用日期: 2023年12月19日; 发布日期: 2023年12月26日

摘要

渐进迭代逼近(PIA)是一种直观有效的数据拟合方法。当给定数据点的参数域为不规则的凸多边形时,需要对参数域剖分来用多片曲面拟合,然后考虑相邻曲面片的拼接。Toric曲面是Bézier曲面的推广,它的参数域可以调整为任意凸多边形。使用Toric曲面做渐进迭代逼近即可以保留渐进迭代逼近的优点,也可以整体对数据点进行拟合,无需考虑曲面的重构与拼接。本篇文章定义了一种对凸多边形上的参数点进行字典排序的方法。并实现了一种用Toric曲面做渐进迭代逼近的算法。我们还用具体的数值例子证明方法有效。

关键词

Toric曲面, 渐进迭代逼近(PIA), 数据拟合, Bézier曲面

Progressive Iterative Approximation of Toric Surfaces

Zhuo Duan, Xingxuan Peng*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Nov. 25th, 2023; accepted: Dec. 19th, 2023; published: Dec. 26th, 2023

Abstract

Progressive iterative approximation (PIA) is an intuitive and effective data fitting method. When the parameter domain of a given data point is an irregular convex polygon, the parameter domain needs to be partitioned to be fitted by a multi-piece surface. Then we consider the stitching of adjacent surface patches. Toric surfaces are a generalization of Bézier surfaces whose parametric domain can be adjusted to any convex polygon. Using Toric surface for progressive iterative ap-

*通讯作者。

proximation can not only retain the advantages of progressive iterative approximation, but also fit the data points as a whole, without considering the reconstruction and splicing of the surface. This paper defines a lexicographic method for sorting the points of a convex polygon. A progressive iterative approximation algorithm using Toric surfaces is also implemented. We also use specific numerical examples to prove that the method is effective.

Keywords

Toric Surface, Progressive Iterative Approximation (PIA), Data Fitting, Bézier Surface

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数据拟合是处理科学和工程问题中大量采样和实验数据的常用方法。它通过将离散的数据拟合为连续的代数表示来反映数据的基本趋势。渐进迭代逼近(Progressive Iterative Approximation, PIA)是一种有效的数据拟合方法,它使用几何迭代法动态求解,具有明显的几何意义。渐进迭代逼近方法被广泛应用于几何设计、数据拟合、网格和样条体的生成、逆向工程以及图像处理等领域。它的优点包括直观操作、简单算法和强适应性。

曲线曲面渐进迭代逼近性质的研究自上世纪 70 年代开始。齐东旭等[1]提出了均匀三次 B 样条曲线盈亏修正算法,并发现这种曲线具有 PIA 性质。Lin 等[2]证明非均的三次 B 样条曲线曲面也具有 PIA 特性。2005 年, Lin 等[3]证明了在非退化配置矩阵的情况下,曲线(包括张量积曲面)具有渐进迭代逼近性质。张莉[4]将 PIA 的适用范围推广到三角域上,给出了三角片 Bézier 曲面具有 PIA 性质的条件。胡倩倩[5]等人对 PIA 算法进行了改进实现了三角 B-B 曲面加速逼近的算法,使算法更加高效。Liu [6]等人研究了张量积 Bézier 曲面的 PIA 性质。近年来 PIA 算法在各种曲线曲面逼近上得到了广泛的应用。季康松[7]等给 PIA 加入了法相约束,使隐式曲线能够更好地拟合散乱数据点及其几何特征。吴硕琳[8]等在 PIA 算法的基础上提出了非均匀三次 B 样条曲线 Hermite 插值算法,并证明了该算法是收敛的。周晨[9]等实现了用非均匀 3 次 B 样条拟合曲线的 PIA 性质实现了一种矢量地图曲线化简方法,展现出 PIA 算法在实际生活中有广泛的应用。

Toric 曲面是张量积 Bézier 曲面和三角 Bézier 曲面片的推广,具有许多与 Bézier 曲面相类似的良好性质。2002 年 Ktasauskas [10]基于 Toric 簇和 Torie 理想,定义了一类与整数点集下的有理多边形参数曲面 Toric 曲面。Toric 曲面与 Bézier 曲面相比,在曲面拼接[11]、曲面补洞[12]、过渡曲面[13]等应用中, Toric 方法需要更少的曲面片,整体性更好。汪涵[14]等在 Toric-Bézier 曲面上加入了伸缩因子实现曲线的自由变形,提高了曲线的可调性和预见性。孙兰银等[15]利用最小二乘法实现了 Toric 曲面拟合数据点。2020 年, Li [16]等定义了一种特殊的 Toric 曲线并将其命名为 GT-Bézier 曲线,这种曲线是 Bézier 曲线的拓展。Yu [17]发现了一种特殊的 Toric 曲线,并证明了这种曲线具有 PIA 性。

本文在现有渐进迭代逼近方法的研究基础上,研究 Toric 曲面的渐进迭代逼近算法。得出当普半径小于 1 时, Toric 曲面同样可以渐进迭代逼近数据点。定义了一种字典排序的方法,将选取的参数点按字典排序,将 Toric 曲面做渐进迭代逼近使其逐渐靠近这些数据点,最终得到了拟合这些数据点的 Toric 曲面。本文的第一章介绍了 Toric 曲面的定义和字典排序方法为下文做准备。第二章讲解了 Toric 曲面做渐进迭

代逼近的过程。第三章给出了数值实例可以直观地看出拟合效果。相较于别的曲面渐进迭代逼近, Toric 曲面的参数域选取更加灵活, 可以是任意凸多边形。对于不规则形状的参数域, 可以直接用 Toric 曲面做整体拟合, 无需考虑曲面的重构与拼接。

2. 预备知识

定义 1. (Toric-Bernstein 基函数): 设在平面中, 坐标为整数的有限个点构成的集合为 $A \subset \mathbb{Z}^2$ 。设该点集 A 的凸包 $\text{conv}(A)$ 为 ΔA 。令 n 边形 ΔA 的第 r 条边的边界方程为 $l_r(u, v): a_r u + b_r v + c_r = 0$, $r = 1, 2, \dots, n$ 。这里的 a_r, b_r, c_r 互素且向量 $\langle a_r, b_r \rangle$ 指向 ΔA 的内部。那么对于集合 A 中的每一个整数格点 $(i, j) \in A$, 定义 Toric-Bernstein 基函数为:

$$B_{i,j}(u, v) = C_{i,j} l_1(u, v)^{l_1(i,j)} l_2(u, v)^{l_2(i,j)} \dots l_n(u, v)^{l_n(i,j)} \quad (u, v) \in \Delta A \quad (1)$$

其中 $C_{i,j} > 0$ 为自定义系数。

定义 2. (Toric 曲面): 对于有限整数点集 A , 定义在 ΔA 上的 Toric Bézier 曲面为 $F_{A,\omega,B}(u, v)$ 为:

$$F_{A,\omega,B}(u, v) = \frac{\sum_{(i,j) \in A} \omega_{i,j} p_{i,j} B_{i,j}(u, v)}{\sum_{(i,j) \in A} \omega_{i,j} B_{i,j}(u, v)} \quad (u, v) \in \Delta A \quad (2)$$

其中 $B_{i,j}(u, v)$ 是 Toric-Bernstein 基函数, $p_{i,j} \in \mathbb{R}^3$ 为对应整数格点 $(i, j) \in A$ 的控制顶点, $\omega_{i,j}$ 为控制顶点的权因子。

因为 Toric 曲面定义在 ΔA 上, ΔA 可能是一个不规则图形。为了描述方便需要给这些整数点集进行排序, 下面给出字典排序的定义:

定义 3. (字典排序): 设平面 \mathbb{Z}^2 中有两个坐标为整数的点 (i, j) 和 (i', j') , 若 $(i, j) > (i', j')$ 成立, 当且仅当 $i > i'$ 或 $(i = i' \text{ 且 } j > j')$ 。

设点集 A 有 n 个坐标为整数的点, 可以用字典排序的方法从小到大将点集 A 重新排列为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。那么 Toric-Bernstein 基函数可以写成,

$$B_{a_k}(u, v) = C_{a_k} l_1(u, v)^{l_1(a_k)} l_2(u, v)^{l_2(a_k)} \dots l_n(u, v)^{l_n(a_k)} \quad (u, v) \in \Delta A, k = 1, 2, \dots, n$$

其中 C_{a_k} 为自定义系数。同理, Toric 曲面可以写成,

$$F_{A,\omega,B}(u, v) = \frac{\sum_{k=1}^n \omega_{a_k} p_{a_k} B_{a_k}(u, v)}{\sum_{k=1}^n \omega_{a_k} B_{a_k}(u, v)} \quad (u, v) \in \Delta A$$

3. Toric 曲面渐进迭代逼近

已知空间 \mathbb{R}^3 中有 n 个数据点的集合 $\{p_{i,j} | (i, j) \in A\}$, 每一个数据点 $p_{i,j}$ 对应的参数值为 (i, j) , 它们组成平面有限点集 A 。将点集 A 中的点进行从小到大的字典排序可以将 A 写成点列 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 这样集合 $\{p_{i,j} | (i, j) \in A\}$ 可以按照角标的字典排序变为 $\{p_{a_k}\}_{k=1}^n$ 。同样的也对点集 A 中的每一顶点的参数值进行字典排序, 设排序后的参数值为集合 $\{t_{a_k}\}_{k=1}^n$ 。通过点集 A 可以得到凸包 ΔA , 并得到 ΔA 对应的边界方程以及 A 中任意一点对应的 Toric-Bernstein 基函数。通过预先自定义好的 Toric-Bernstein 基系数 C_{a_k} , 以及每个参数点对应的权因子 ω_{a_k} 。设定迭代的初始控制顶点为 $\{p_{a_k}^0 = p_{a_k}\}_{k=1}^n$ 。这样我们可以得出初始迭代 Toric 曲面:

$$F_{A,\omega,B}^0(u, v) = \frac{\sum_{k=1}^n \omega_{a_k} p_{a_k}^0 B_{a_k}(u, v)}{\sum_{k=1}^n \omega_{a_k} B_{a_k}(u, v)} \quad (u, v) \in \Delta A$$

之后计算每个控制顶点需要调整的向量 $\{\delta_i\}_{i=0}^n$

$$\delta_{a_k}^0 = p_{a_k} - F_{A,\omega,B}^0(t_{a_k}) \quad k=1,2,\dots,n$$

我们可以得到第二次迭代 Toric 曲面的控制顶点

$$p_{a_k}^1 = p_{a_k}^0 + \delta_{a_k}^0 \quad k=1,2,\dots,n$$

最终得到新的曲面 $F_{A,\omega,B}^1(u,v)$

$$F_{A,\omega,B}^1(u,v) = \frac{\sum_{k=1}^n \omega_{a_k} p_{a_k}^1 B_{a_k}(u,v)}{\sum_{k=1}^n \omega_{a_k} B_{a_k}(u,v)} \quad (i,j) \in A$$

同理, 我们可以通过曲面 $F_{A,\omega,B}^m(u,v)$ 得到曲面 $F_{A,\omega,B}^{m+1}(u,v)$

$$\delta_{a_k}^m = p_{a_k} - F_{A,\omega,B}^m(t_{a_k}) \quad k=1,2,\dots,n$$

$$p_{a_k}^{m+1} = p_{a_k}^m + \delta_{a_k}^m \quad k=1,2,\dots,n$$

$$F_{A,\omega,B}^{m+1}(u,v) = \frac{\sum_{k=1}^n \omega_{a_k} p_{a_k}^{m+1} B_{a_k}(u,v)}{\sum_{k=1}^n \omega_{a_k} B_{a_k}(u,v)} \quad (u,v) \in \Delta A$$

如果 $\lim_{m \rightarrow \infty} F_{A,\omega,B}^m(a_k) = p_{a_k}, k=1,2,\dots,n$ 成立。我们可以称初始曲面 $F_{A,\omega,B}^m(a_k)$ 有 PIA 性。下面我们分析一下渐进迭代逼近收敛的条件。

$$\delta_{a_k}^{m+1} = \delta_{a_k}^m - \sum_{i=1}^n \delta_{a_i}^m \frac{\omega_{a_i} B_{a_i}(t_{a_k})}{\sum_{j=1}^n \omega_{a_j} B_{a_j}(t_{a_k})} \quad k=1,2,\dots,n; m=0,1,\dots$$

上式写成矩阵的形式为

$$[\delta_{a_1}^{m+1}, \delta_{a_2}^{m+1}, \dots, \delta_{a_n}^{m+1}]^T = (I - B)[\delta_{a_1}^m, \delta_{a_2}^m, \dots, \delta_{a_n}^m]^T \quad m=0,1,\dots$$

这里的 I 是指 $(n+1) \times (n+1)$ 的单位矩阵, 矩阵 B 定义为

$$B := \begin{bmatrix} \frac{\omega_{a_1} B_{a_1}(t_{a_1})}{\sum_{j=1}^n \omega_{a_j} B_{a_j}(t_{a_1})} & \frac{\omega_{a_2} B_{a_2}(t_{a_1})}{\sum_{j=1}^n \omega_{a_j} B_{a_j}(t_{a_1})} & \dots & \frac{\omega_{a_n} B_{a_n}(t_{a_1})}{\sum_{j=1}^n \omega_{a_j} B_{a_j}(t_{a_1})} \\ \frac{\omega_{a_1} B_{a_1}(t_{a_2})}{\sum_{j=1}^n \omega_{a_j} B_{a_j}(t_{a_2})} & \frac{\omega_{a_2} B_{a_2}(t_{a_2})}{\sum_{j=1}^n \omega_{a_j} B_{a_j}(t_{a_2})} & \dots & \frac{\omega_{a_n} B_{a_n}(t_{a_2})}{\sum_{j=1}^n \omega_{a_j} B_{a_j}(t_{a_2})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_{a_1} B_{a_1}(t_{a_n})}{\sum_{j=1}^n \omega_{a_j} B_{a_j}(t_{a_n})} & \frac{\omega_{a_2} B_{a_2}(t_{a_n})}{\sum_{j=1}^n \omega_{a_j} B_{a_j}(t_{a_n})} & \dots & \frac{\omega_{a_n} B_{a_n}(t_{a_n})}{\sum_{j=1}^n \omega_{a_j} B_{a_j}(t_{a_n})} \end{bmatrix} \quad (3)$$

当矩阵 $(I - B)$ 的谱半径 $\rho(I - B) < 1$ 时渐进迭代收敛, 当我们要使用 Toric Bézier 曲面做渐进迭代逼近时, 需要提前计算出 $\rho(I - B)$ 以确保收敛。

Toric 曲面的渐进迭代逼近算法:

输入: 空间 \mathbb{R}^3 中的 n 个数据点 $\{p_{a_k}\}_{k=1}^n$, 每个数据点对应的权因子 $\{\omega_{a_k}\}_{k=1}^n$ 和迭代次数 \hat{m} 。

输出: 对数据点 $\{p_{a_k}\}_{k=1}^n$ 的 m 次渐进迭代逼近后的 Toric Bézier 曲面。

Step 1: 根据数据点集 $\{p_{a_k}\}_{k=1}^n$ 的确定点集 A 以及 ΔA , 并由此得出 Toric-Bernstein 基函数 $\{B_{a_k}(u,v)\}_{k=1}^n$,

代入到矩阵(3)中求出普半径 $\rho(I-B)$

Step 2: 当普半径 $\rho(I-B) < 1$ 时:

Step 2.1: 令迭代次数 $m=0$ 并计算初始 Toric Bézier 曲面控制顶点 $\{p_{a_k}^0 = p_{a_k}\}_{k=1}^n$

Step 2.2: 计算误差 $\delta_{a_k}^m = p_{a_k} - F_{A,\omega,B}^m(a_k)$, 和新的控制顶点 $p_{a_k}^{m+1} = p_{a_k}^m + \delta_{a_k}^m$

Step 2.3: 若 $m < \hat{m}$, 令 $m = m + 1$ 回到第 Step 2.2; 若 $m = \hat{m}$, 输出 Toric Bézier 曲面

$$F_{A,\omega,B}^{m+1}(u,v) = \frac{\sum_{k=1}^n \omega_{a_k} p_{a_k}^{k+1} B_{a_k}(u,v)}{\sum_{k=1}^n \omega_{a_k} B_{a_k}(u,v)} \quad (u,v) \in \Delta A$$

Step 3: 当普半径 $\rho(I-B) \geq 1$ 时: 重新调整权因子 $\{\omega_{a_k}\}_{k=1}^n$ 或取样点 $\{p_{a_k}\}_{k=1}^n$

4. 数值实例

例 1: 设空间 \mathbb{R}^3 中有 8 个数据点按词典顺序为 $p_{0,0} = (0,0,1)$, $p_{0,1} = (0,1,2)$, $p_{0,2} = (0,2,1)$, $p_{1,0} = (1,0,2)$, $p_{1,1} = (1,1,3)$, $p_{1,2} = (1,2,1)$, $p_{2,0} = (2,0,1)$, $p_{2,1} = (2,1,1)$, 视每一点的权因子都为 1。可得 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_8\} = \{(0,0), (0,1), \dots, (2,1)\}$ 。 ΔA 如图 1 所示。计算出 toric-Bernstein 基函数 $\{B_{a_k}(u,v)\}_{k=1}^n$, 并求出普半径 $\rho(I-B) = 0.875$ 证明在此基函数下 Toric Bézier 曲面渐进迭代逼近收敛。逼近效果如图 2~4 所示:

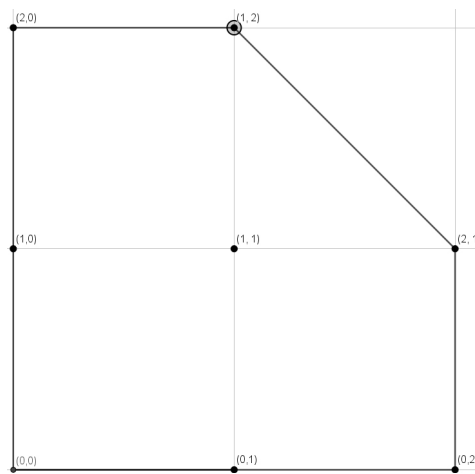


Figure 1. A and ΔA

图 1. A 和 ΔA

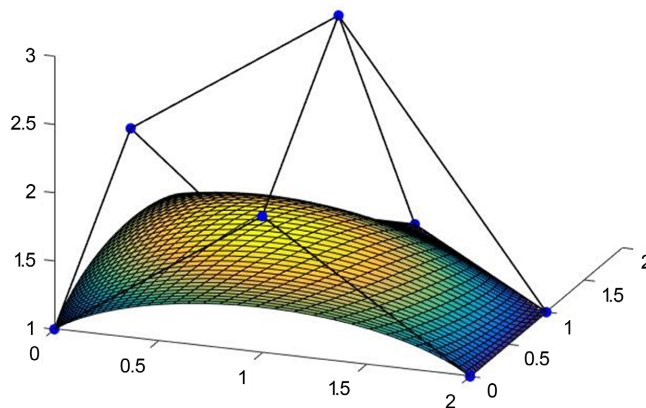


Figure 2. The initial Toric surface

图 2. 初始 Toric 曲面

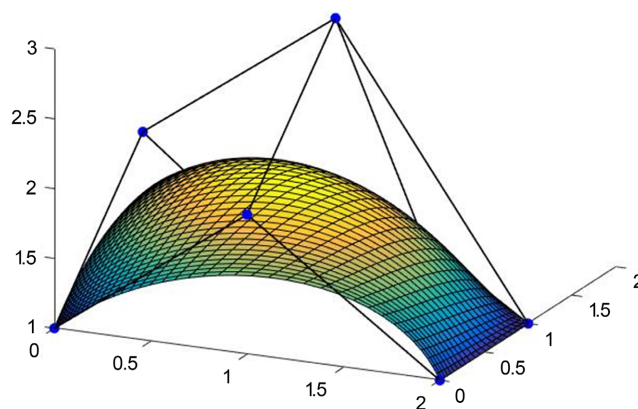


Figure 3. The surface after 1 iteration
图 3. 迭代 1 次后的曲面

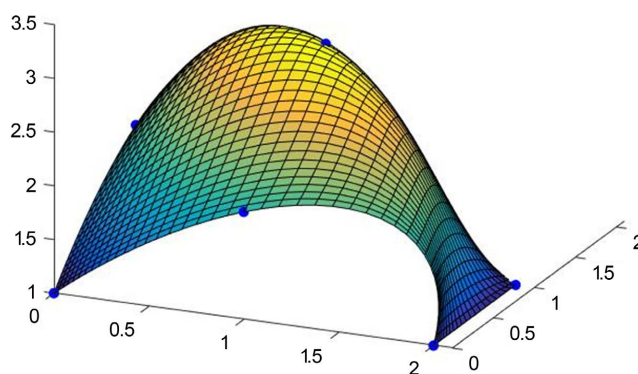


Figure 4. The surface after 50 iteration
图 4. 迭代 50 次后的曲面

例 2: 如图 5 所示的凸图形 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{19}\} = \{(0,0), (0,1), \dots, (4,4)\}$ 中取 19 个数据采集点, 并在函数上 $f(u, v) = u^2 + v^2$ 上找到每个数据采集点对应的数值大小如图 6, 并将他们按照字典排序, 不失一般性可设每个拟合点对应的权因子都为 1. 求出普半径 $\rho(I - B) = 0.966$ 证明迭代是收敛的. 迭代次数与渐进逼近效果如图 7 所示.

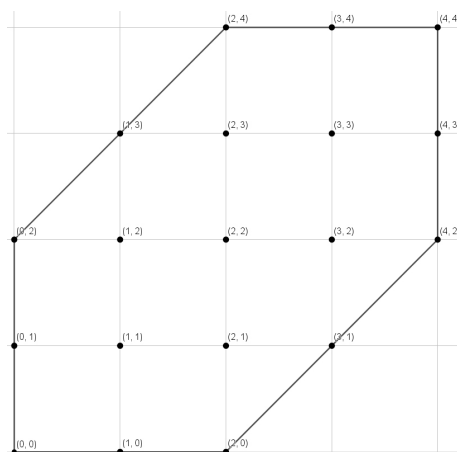


Figure 5. A and ΔA
图 5. A 和 ΔA

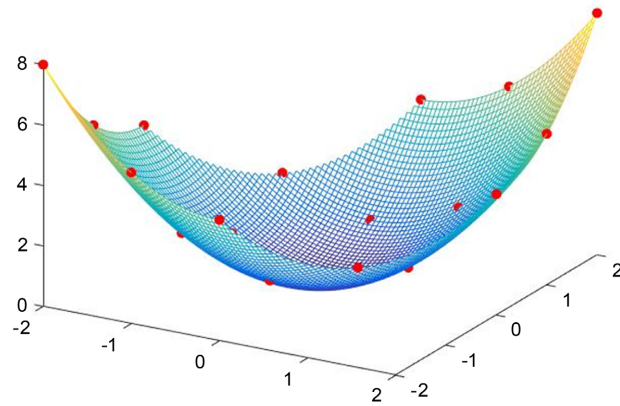


Figure 6. $f(u, v)$ and data point $\{p_{a_k}\}_{k=1}^n$

图 6. $f(u, v)$ 和数据点 $\{p_{a_k}\}_{k=1}^n$

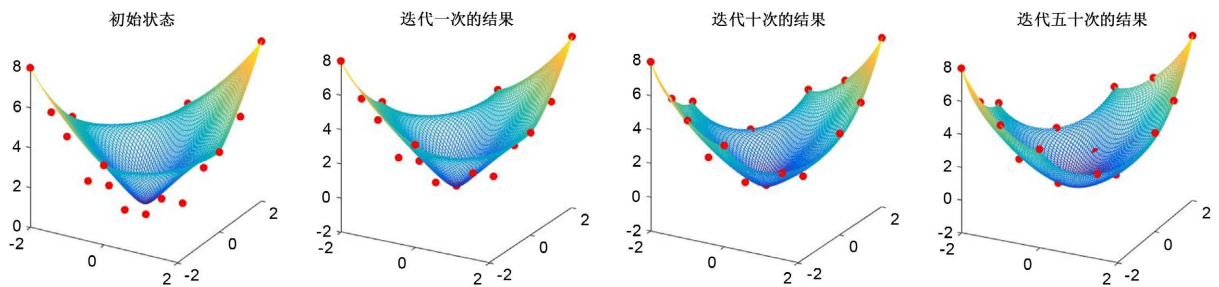


Figure 7. Iteration effect

图 7. 迭代效果

例 3: 如(图 8)所示的凸图形中取 72 个数据点以及每个点所对应权重大小, 适当的调节对应点权重的大小可以有更好的拟合效果。并用这些点来拟合平面 $y = \sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}\right)$ (如图 9)中的一部分, 其拟合效果如图 10 所示。

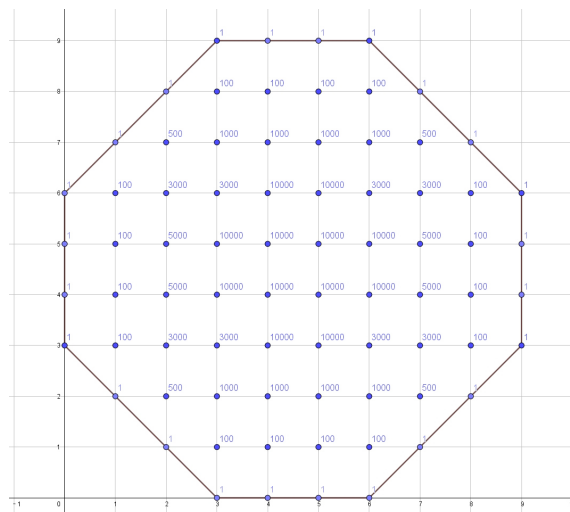


Figure 8. Sampling points and weight distribution

图 8. 取样点和权重分布

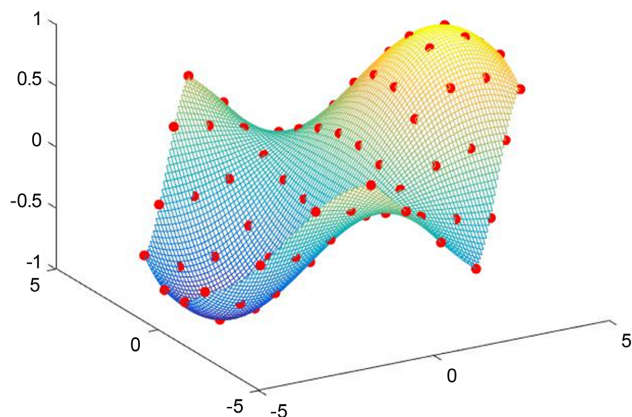


Figure 9. $f(u, v)$ and data point $\{p_{a_k}\}_{k=1}^n$

图 9. $f(u, v)$ 和数据点 $\{p_{a_k}\}_{k=1}^n$

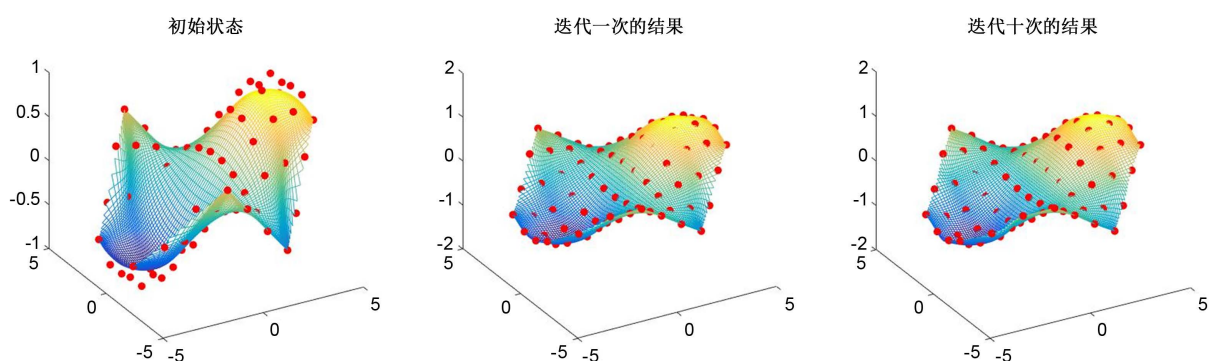


Figure 10. Iteration effect

图 10. 迭代效果

5. 总结与展望

本篇文章定义了一种新的对凸多边形上的参数点进行字典排序的方法, 方便对不规则凸多边形上的点进行排序与编号。并实现了一种用 Toric 曲面做渐进迭代逼近的算法。该方法可以直接逼近不规则的凸多边形域上的数据点, 而无需考虑曲面的重构与拼接。相较于张量积 Bézier 曲面[6]和三角片 Bézier [4][5]曲面的渐进迭代逼近算法, 本文的算法更加灵活, 可以为任意凸多边形, 所以适用场景更多。

总结研究成果, 发现仍有以下问题可以进一步探讨:

1) Toric 曲面的渐进迭代逼近收敛性是受 toric-Bernstein 基函数(公式 1)中的自定义系数 $C_{i,j}$ 和 Toric Bézier 曲面(公式 2)的权因子 $\omega_{i,j}$ 影响的。给出 Toric 曲面渐进迭代逼近收敛的约束条件是我们进一步考虑的问题。

2) 矩阵 B (矩阵 3)为全正矩阵是渐进迭代收敛充分条件。如何在一定约束条件下证明(矩阵 3)为完全正矩阵也是之后值得研究的问题之一。

参考文献

- [1] 齐东旭, 田自贤, 张玉心. 曲线拟合的数值磨光方法[J]. 数学学报, 1975, 18(3): 173-184.
- [2] Lin, H.W., Wang, G.J. and Dong, C.S. (2004) Constructing Iterative Non-Uniform B-Spline Curve and Surface to Fit Data Points. *Science in China Series: Information Sciences*, 47, 515-331.

-
- [3] Lin, H.W., Bao, H.J. and Wang, G.J. (2005) Totally Positive Bases and Progressive Iterative Approximation. *Computers and Mathematics with Applications*, **50**, 575-586. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.01.023>
- [4] 张莉, 李园园, 杨燕, 檀结庆. 三角域上 Said-Ball 基的推广渐进迭代逼近[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(2): 275-282.
- [5] 胡倩倩, 王家栋, 王国瑾. 三角 B-B 曲面最小二乘渐进迭代格式的革新与加速[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2022, 34(5): 777-783.
- [6] Liu, C.Z., Liu, Z.Y., and Han, X. (2021) Preconditioned Progressive Iterative Approximation for Tensor Product Bézier Patches. *Mathematics and Computers in Simulation*, **185**, 372-383. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.01.002>
- [7] 季康松, 寿华好, 刘艳. 带法向约束的隐式 B 样条曲线重构 PIA 方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2023, 35(5): 719-725.
- [8] 吴硕琳, 李亚娟, 邓重阳. 基于 PIA 的非均匀三次 B 样条曲线 Hermite 插值[J]. 计算机学报, 2023, 46(11): 2463-2475.
- [9] 周晨, 陈伟, 刘渊. 基于渐进迭代逼近的矢量地图曲线化简方法[J]. 图学学报, 2021, 42(6): 979-986.
- [10] Krasauskas, R. (2002) Toric Surface Patches. *Advances in Computational Mathematics*, **17**, 89-113. <https://doi.org/10.1023/A:1015289823859>
- [11] Sun, L.Y. and Zhu, C.G. (2015) Curvature Continuity Conditions between Adjacent Toric Surface Patches. *Computer Aided Geometric Design*, **37**, 469-477. <https://doi.org/10.1111/cgf.13583>
- [12] Li, C.Y., Liu, H.Y. and Zhu, C.G. (2012) Constructing N-Sided Toric Surface Patches from Boundary Curves. *Journal of Information and Computational Science*, **9**, 737-743.
- [13] 韩晓旭, 孙兰银, 朱春钢. 构造多管道过渡曲面的 Toric 曲面方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2014, 26(10): 1639-1645.
- [14] 王涵, 朱春钢. 基于伸缩因子的 Toric-Bézier 曲线自由变形[J]. 图学学报, 2022, 43(6): 1070-1079.
- [15] 孙兰银, 朱春钢. 数据拟合的 Toric Bézier 曲面方法[J]. 数值计算与计算机应用, 2014, 35(4): 297-304.
- [16] Li, J.G. and Zhu, C.G. (2020) Curve and Surface Construction Based on the Generalized Toric-Bernstein Basis Functions. *Open Mathematics*, **18**, 36-56. <https://doi.org/10.1515/math-2020-0004>
- [17] Yu, Y.Y., Ma, H. and Zhu, C.G. (2019) Total Positivity of a Kind of Generalized Toric-Bernstein Basis. *Linear Algebra and its Applications*, **579**, 449-462. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.06.012>