

非线性脉冲系统有限时间输入到状态稳定性研究

吴迪, 胡洪晓*

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2023年1月8日; 录用日期: 2023年1月28日; 发布日期: 2023年2月8日

摘要

基于李雅普诺夫理论, 给出了在固定驻留时间条件下非线性脉冲系统有限时间输入到状态稳定(FTISS)的一个充分条件。在连续动力学部分和脉冲动力学部分均考虑了外部输入的情况下, 对于不稳定的脉冲作用, 给出了系统有限时间输入到状态稳定脉冲频率、系统结构和外部扰动之间的关系。并通过实例说明了该理论的正确性。

关键词

有限时间, 输入到状态稳定, 脉冲系统

Study on Finite-Time Input-to-State Stability of Nonlinear Impulsive Systems

Di Wu, Hongxiao Hu*

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jan. 8th, 2023; accepted: Jan. 28th, 2023; published: Feb. 8th, 2023

Abstract

Based on Lyapunov theory, a sufficient condition for finite-time input-to-state stability (FTISS) of nonlinear impulsive systems with fixed dwell time is given. In the case that the external input is considered in both the continuous dynamics part and the pulse dynamics part, the relationship between the finite-time input-to-state stability pulse frequency, the system structure and the external disturbance is given for the unstable pulse action. A numerical example is provided to demonstrate the correctness of the theoretical results.

*通讯作者。

Keywords

Finite-Time, Input-to-State Stability, Impulsive Systems

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在科技领域和自然界物理现象的许多变化过程中, 运动状态可能会在某一时刻发生突变, 而这个时间可以看作是瞬间发生的, 即以脉冲的形式出现。脉冲系统是一类特殊的混杂系统, 由三部分构成: 用微分方程描述连续动力学部分, 控制系统在脉冲之间的运动; 用差分方程描述离散动力学部分, 控制瞬时状态跳跃或者脉冲瞬间的重置; 以及脉冲频率, 决定这些脉冲何时发生。在过去几十年, 脉冲系统越来越受到学者的关注[1] [2]。一般来说, 脉冲系统问题可以分为两类, 即脉冲控制问题[3] [4]和脉冲干扰问题[5] [6] [7], 并在许多领域得到了广泛应用, 如网络控制系统[5]、生物模型[6]和多智能体控制[7]等。

稳定性理论的研究是非线性系统研究中经久不衰的一个课题。相较于传统的 Lyapunov 渐近稳定性, 有限时间稳定性(FTS)在控制理论研究中具有广泛的应用价值, 如高阶滑膜控制问题[8] [9]。FTS 不仅需要李雅普诺夫稳定性, 而且需要有限时间的收敛性。近年来, 不少学者对非线性系统 FTS 做了广泛的研究。例如, Bhat 给出了连续非 Lipschitz 自治系统平衡点 FTS [10], Polyakov 提出两种非线性控制算法给出了闭环系统的全局有限时间稳定性[11], Lu 利用 Lyapunov 的反函数提供了有限时间收敛的充分条件[12]。对于非线性脉冲系统的有限时间稳定性, 文献[13]建立了非线性系统分别在具有镇定效应的脉冲和脉冲扰动作用下 FTS 的李雅普诺夫定理, 并提供了估计关于脉冲时间序列的沉降时间的充分条件。文献[14]研究了非线性脉冲系统的有限时间稳定性和固定时间稳定性, 并得到了更为一般的李雅普诺夫定理。在输入系统中, 输入到状态稳定(ISS)描述了外部输入对系统稳定性的影响, 除了作为分析工具之外, 在非线性和控制器的设计中具有核心作用, 使其在过去几年也引起了许多关注。例如, Cai 研究了基本预测器反馈的逆最优性和干扰衰减性质[15]以及加性对象扰动 ISS [16], Dashkovskiy 证明非线性脉冲系统在满足广义平均驻留时间条件的序列 ISS [17]。文献[18]中首次引入了 FTISS, 并提出了非线性系统 FTISS 的几个充分条件和必要条件。到目前为止, 由于非线性系统的非光滑性有关的技术难度和复杂性, 即使是在线性系统中对 FTISS 的研究也很少[19] [20]。最近, 文献[21]利用李雅普诺夫理论和驻留时间法给出了非线性脉冲系统 FTISS 的充分条件, 具体地说, 存在具有局部 Lipschitz 连续函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ 使得

$$D^+V(x(t)) \leq -cV^\alpha(x(t)), \text{ 当 } V(x(t)) \geq \chi(\|\omega\|_{[0,t]}),$$

其中 $c > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, ω 为外部输入。然而, 在很多实际应用中, 对上式李雅普诺夫函数的导数有以下形式:

$$D^+V(x(t)) \leq -cV^\alpha(x(t)) - qV(x(t)), \text{ 当 } V(x(t)) \geq \chi(\|\omega\|_{[0,t]}),$$

其中 $q > 0$ 。如果直接将后面的 $-qV(x(t))$ 用 0 替代, 则我们在估计的收敛时间时会出现较大的误差。受上述思想的启发, 本文将改进推广文献[21]中的结论, 并给出了更一般的非线性脉冲系统 FTISS 的充分条件。

2. 预备知识

令 \mathbb{R} 为实数集; \mathbb{R}_+ 为非负实数集; \mathbb{N} 为正整数集; \mathbb{Z}_0 为非负整数集; \mathbb{R}^n 为 n 维欧氏空间; $|\cdot|$ 为二维欧氏范数; $a \vee b$ 和 $a \wedge b$ 分别为 a 和 b 的最大值和最小值; 对于 $I \subseteq \mathbb{R}$, $m \geq 1$, 令 $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是一个可测的基本有界函数且 $\|\omega\|_I := \sup\{|\omega(t)|: t \in I\}$ 为最大范数, 特别地 $\|\omega\|_\infty := \|\omega\|_{[0, \infty)}$, 对于 $\rho > 0$, $U_\rho := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \rho\}$ 。

考虑一个非线性脉冲系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \omega(t)), & t = t_k, \\ x(t) = g(x(t^-), \omega(t^-)), & t \neq t_k, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

这里 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 是一个已知的初始状态; $\omega(t) \in \mathbb{R}^m$ 是一个可测的基本有界的外部输入; $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是满足 $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ 的连续函数; 脉冲时间序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 满足 $0 := t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ 且 $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$; 假设函数 f 满足适当的条件使得解 $x(t) = x(t, x_0)$ 在相关时间间隔内存在唯一正向解; 假设 $x(t)$ 和 $\omega(t)$ 是左连续; 对于给出的脉冲时间序列 $\{t_k\}$, $N(t, s)$ 表示系统(1)在半开区间 $(s, t]$ 上的脉冲次数。

对于一个局部 Lipschitz 连续函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, 沿着系统(1)的解 $x(t)$ 的右上导数定义为

$$D^+V[x(t)]_f = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (V(x(t) + hf(x(t), \omega(t))) - V(x(t))).$$

定义 1.1: 如果函数 $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是连续的, 严格递增并且 $\gamma(0) = 0$, 则称函数 γ 是 \mathcal{K} 类函数。如果函数 $\gamma \in \mathcal{K}$ 也是无界的, 则称函数 γ 是 \mathcal{K}_∞ 类函数。

定义 1.2: 如果函数 $\beta: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 满足:

- i) 对每一个固定 $t \geq 0$, $\beta(\cdot, t)$ 关于第一个变量是 \mathcal{K} 类函数;
- ii) 对于每一个固定 $s \geq 0$, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\beta(s, t)$ 递减趋于 0;

则称 β 是 \mathcal{KL} 类函数。

定义 1.3 [21]: 如果函数 $\beta: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 满足:

- i) 对于每一个固定 $s \geq 0$, 存在 $T(s) < \infty$, 使得当 $t \rightarrow T(s)$ 时, $\beta(s, t)$ 递减趋于 0;
- ii) $\beta(0, 0) = 0$;
- iii) 对于每一个固定 $t \geq 0$ 有

$$\begin{cases} \beta(s_1, t) > \beta(s_2, t), & \text{if } \beta(s_1, t) > 0, s_1 > s_2, \\ \beta(s_1, t) = \beta(s_2, t), & \text{if } \beta(s_1, t) = 0, s_1 > s_2, \end{cases}$$

则称函数 $\beta: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是 \mathcal{KL}_0 类函数。

定义 1.4: 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个包含原点的开集, 如果存在 $\beta \in \mathcal{KL}_0$, $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ 使得对任意 $x_0 \in U$ 和 $\omega(t) \in \mathbb{R}^m$, 系统(1)的解 $x(t, x_0)$ 满足

$$|x(t, x_0)| \leq \beta(|x_0|, t) + \gamma(\|\omega\|_{[0, t]}), \quad \text{对 } \forall t \geq 0, \quad (2)$$

则系统(1)是 FTISS。

与传统的 ISS 相比, FTISS 的主要区别在于对于给定的初始状态 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x(t, x_0)$ 将在有限时间内进入最终界限, 并且此后不超过这个界限。

假设 \mathcal{F} 表示一类可容许的脉冲时间序列, \mathcal{F}_τ 表示一类满足固定驻留时间(FDT)条件的脉冲时间序列, 即 $\inf_{k \in \mathbb{Z}_0} \{t_{k+1} - t_k\} \geq \tau, \forall \{t_k\} \in \mathcal{F}_\tau$ 。

3. 主要结果

下面, 利用 FDT 条件建立非线性脉冲系统(1)的 FTISS 的充分条件。

定理 2.1: 假设 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是一个局部 Lipschitz 连续函数, 如果存在函数 $\varphi_1, \varphi_2, \chi \in \mathcal{K}_\infty$, 常数 $c > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $q > 0$, $\eta > 1$, $g > 0$, 使得:

- (A₁) $\varphi_1(|x|) \leq V(x) \leq \varphi_2(|x|), x \in \mathbb{R}^n$;
- (A₂) $V(g(x, \omega)) \leq \eta V(x) + \chi(|\omega|), x \in \mathbb{R}^n, \omega \in \mathbb{R}^m$;
- (A₃) 当 $V(x(t)) \geq \chi(\|\omega\|_{[0,t]})$ 时:

$$D^+V[x(t)]_f \leq -cV^\alpha(x(t)) - qV(x(t)), t \neq t_k, \quad (3)$$

其中 $x(t)$ 为系统(1)初值为 $x(0) = x_0$ 的解, 这里 $x_0 \in U_g$;

$$(A_4) \frac{c}{q} (1 - e^{-q(1-\alpha)\tau}) > \left(e^{-q(1-\alpha)\tau} - \frac{1}{(2\eta)^{1-\alpha}} \right) \mu^{1-\alpha}(g),$$

这里 $\mu(g) := (2\eta\chi(\|\omega\|_\infty)) \vee \varphi_2(g)$, 则系统(1)在 \mathcal{F}_τ 上是 FTISS。

证明: 对于任意满足条件(A₄)的 $\tau > 0$, 可以找到一个充分小的常数 $\delta > 0$ 使得

$$\frac{c}{q} (1 - e^{-q(1-\alpha)\tau}) \geq \left(e^{-q(1-\alpha)\tau} - \frac{1}{(2\eta)^{1-\alpha}} \right) \mu^{1-\alpha}(g) + \delta \text{ 且 } q(1-\alpha)\tau \geq \delta. \quad (4)$$

因为 $\eta > 1$, 所以对任意 $\lambda \in \left[\frac{2\eta^2}{2\eta-1}, 2\eta \right]$, 有 $\lambda > \eta$ 且 $\frac{\lambda}{\lambda-\eta} \leq 2\eta$ 。令 $\rho := 1 \wedge (\lambda - \eta)$, 当 $\lambda - \eta < 1$ 时, $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\lambda - \eta} < \frac{\lambda}{\lambda - \eta} = \frac{\lambda}{\rho} \leq 2\eta$; 当 $\lambda - \eta \geq 1$ 时, $\frac{1}{\lambda - \eta} \leq \frac{1}{\rho} = 1 < \frac{\lambda}{\rho} = \lambda \leq 2\eta$ 。因此, 我们有

$$\frac{1}{\rho} < \frac{\lambda}{\rho} \leq 2\eta. \quad (5)$$

令 $\{t_k\} \in \mathcal{F}_\tau$ 为任意脉冲时间序列。假设 $x(t) = x(t, x_0)$ 是系统(1)以 $x(0) = x_0$ 为初值的解, 这里 $x_0 \in U_g$ 。为了方便, 我们令 $v(t) := V(x(t))$ 。对于任意 $s \geq 0$, 定义:

$$\beta_1(s, t) := \mu^{1-\alpha}(s) - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-iq(1-\alpha)\tau} \delta - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-\frac{\delta-t-t_k}{t_{k+1}-t_k}} \right),$$

这里 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 且 $k \in \mathbb{Z}_0$ 。定义

$$\beta_2(s, t) := \begin{cases} \beta_1^{1-\alpha}(s, t), & t \in [0, T(s)), \\ 0, & t \geq T(s), \end{cases}$$

这里 $T(s) := \inf \{t \geq 0 \mid \beta_1(s, t) \leq 0\}$ 。下面证明

$$v(t) \leq \beta_2(|x_0|, t) \vee \left(2\eta\chi(\|\omega\|_{[0,t]}) \right), \text{ 对 } \forall t \geq 0. \quad (6)$$

因为 $x(t)$ 和 $\omega(t)$ 在脉冲点上右连续, 所以存在一个时间序列 $0 := \check{t}_0 \leq \hat{t}_1 < \check{t}_1 < \hat{t}_2 < \check{t}_2 < \dots$ 使得对于

$l \in \mathbb{Z}_0$ 有

$$\rho v(t) \geq \chi \left(\|\omega\|_{[0,t]} \right), \quad \forall t \in [\hat{t}_{l-1}, \hat{t}_l], \tag{7a}$$

$$\rho v(t) \leq \chi \left(\|\omega\|_{[0,t]} \right), \quad \forall t \in [\hat{t}_l, \check{t}_l]. \tag{7b}$$

定义在区间 $[\hat{t}_{l-1}, \hat{t}_l]$ 上的脉冲点为 $t_{\xi_{l+1}}, \dots, t_{\xi_{l+N}(\hat{t}_l, \check{t}_{l-1})}$, 这里 $\xi_l = N(\check{t}_{l-1}, \check{t}_0)$ 。

首先引入变量变换 $Z(t) = v^{1-\alpha}(t)$, 则(3)式变为 $D^+ Z(t) \leq -c(1-\alpha) - q(1-\alpha)Z(t)$, 由常数变易公式和比较原理得

$$Z(t) \leq e^{-q(1-\alpha)(t-t_k)} \left(\int_{t_k}^t -c(1-\alpha) e^{q(1-\alpha)(s-t_k)} ds + Z(t_k) \right), \quad t \in [t_k, t_{k+1}).$$

故

$$v^{1-\alpha}(t) \leq e^{-q(1-\alpha)(t-t_k)} v^{1-\alpha}(t_k) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-q(1-\alpha)(t-t_k)} \right). \tag{8}$$

下面我们分两种情况考虑: 情况(i) $\hat{t}_1 > 0$, 即 $[0, \hat{t}_1) \neq \emptyset$; 情况(ii) $\hat{t}_1 = 0$, 即 $[0, \hat{t}_1) = \emptyset$ 。若情况(i)成立, 对于 $\forall t \in [0, \hat{t}_1)$, 当 $N(\hat{t}_1, 0) = 0$ 时, 即在区间 $[0, \hat{t}_1)$ 上没有脉冲, 由(A₁)、(4)和(8)得

$$\begin{aligned} v^{1-\alpha}(t) &\leq e^{-q(1-\alpha)t} v^{1-\alpha}(x_0) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-q(1-\alpha)t} \right) \leq e^{-q(1-\alpha)t} v^{1-\alpha}(x_0) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-q(1-\alpha)\tau \frac{t}{\hat{t}_1}} \right) \\ &\leq e^{-q(1-\alpha)t} v^{1-\alpha}(x_0) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-\frac{\delta t}{\hat{t}_1}} \right) \leq \varphi_2^{1-\alpha}(|x_0|) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-\frac{\delta t}{\hat{t}_1}} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

当 $N(\hat{t}_1, 0) > 0$ 时, 在区间 $[0, \hat{t}_1)$ 上的脉冲点为 $t_{\xi_i+i} = t_i, i \in \{1, \dots, N(\hat{t}_1, 0)\}$ 。所以由(9)得

$$v^{1-\alpha}(t) \leq \varphi_2^{1-\alpha}(|x_0|) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-\frac{\delta t}{\hat{t}_1}} \right), \quad t \in [0, t_1).$$

当 $t \in [t_1, t_2 \wedge \hat{t}_1)$ 时, 由(7a)可知, $(\lambda - \eta)v(t_1^-) \geq \rho v(t_1^-) \geq \chi(\|\omega\|_{[0,t_1]})$ 。结合条件(A₂), 我们有

$$v(t_1) \leq \eta v(t_1^-) + \chi(\|\omega\|_{[0,t_1]}) = \lambda v(t_1^-) - \left((\lambda - \eta)v(t_1^-) - \chi(\|\omega\|_{[0,t_1]}) \right) \leq \lambda v(t_1^-).$$

由(4)和(8)式得

$$\begin{aligned} v^{1-\alpha}(t_1) &\leq \lambda^{1-\alpha} v^{1-\alpha}(t_1^-) \\ &\leq \lambda^{1-\alpha} \left(e^{-q(1-\alpha)t_1} v^{1-\alpha}(x_0) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-q(1-\alpha)t_1} \right) \right) \\ &\leq \lambda^{1-\alpha} \left(e^{-q(1-\alpha)\tau} v^{1-\alpha}(x_0) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-q(1-\alpha)\tau} \right) \right) \\ &\leq \lambda^{1-\alpha} \left(e^{-q(1-\alpha)\tau} \varphi_2^{1-\alpha}(|x_0|) - e^{-q(1-\alpha)\tau} \mu^{1-\alpha}(|x_0|) + \frac{1}{(2\eta)^{1-\alpha}} \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - \delta \right) \\ &\leq \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - \delta. \end{aligned}$$

继续将上式结果结合(4)和(8)式, 对 $t \in (t_1, t_2 \wedge \hat{t}_1)$ 我们有

$$v^{1-\alpha}(t) \leq v^{1-\alpha}(t_1) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-q(1-\alpha)(t-t_1)}\right) \leq \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - \delta - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-\delta \frac{t-t_1}{t_2-t_1}}\right).$$

当 $t \in [t_2, t_3 \wedge \hat{t}_1)$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} v^{1-\alpha}(t_2) &\leq \lambda^{1-\alpha} v^{1-\alpha}(t_2^-) \\ &\leq \lambda^{1-\alpha} \left(e^{-q(1-\alpha)(t_2-t_1)} v^{1-\alpha}(t_2^-) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-q(1-\alpha)(t_2-t_1)}\right) \right) \\ &\leq \lambda^{1-\alpha} \left(e^{-q(1-\alpha)\tau} \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - e^{-q(1-\alpha)\tau} \delta + \frac{1}{(2\eta)^{1-\alpha}} \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - e^{-q(1-\alpha)\tau} \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - \delta \right) \\ &\leq \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - \delta - e^{-q(1-\alpha)\tau} \delta \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} v^{1-\alpha}(t) &\leq e^{-q(1-\alpha)(t-t_2)} v^{1-\alpha}(t_2) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-q(1-\alpha)(t-t_2)}\right) \\ &\leq \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - \delta - e^{-q(1-\alpha)\tau} \delta - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-\delta \frac{t-t_2}{t_3-t_2}}\right). \end{aligned}$$

下面我们将证明

$$v^{1-\alpha}(t) \leq \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-iq(1-\alpha)\tau} \delta - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-\delta \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}}\right), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1} \wedge \hat{t}_1). \quad (10)$$

现在假设在区间 $[0, t_k)$ 上, k 满足 $1 < k < N(\hat{t}_1, 0)$ 并且 $\forall t \in [t_m, t_{m+1})$, $m = 1, \dots, k-1$, 可以得到

$$v^{1-\alpha}(t) \leq \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - \sum_{i=0}^{m-1} e^{-iq(1-\alpha)\tau} \delta - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-\delta \frac{t-t_m}{t_{m+1}-t_m}}\right).$$

在 $t \in [t_k, t_{k+1} \wedge \hat{t}_1)$ 上, 由(8)式得到

$$\begin{aligned} v^{1-\alpha}(t_k) &\leq \lambda^{1-\alpha} \left(e^{-q(1-\alpha)(t_k-t_{k-1})} v^{1-\alpha}(t_{k-1}) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-q(1-\alpha)(t_k-t_{k-1})}\right) \right) \\ &\leq \lambda^{1-\alpha} \left(e^{-q(1-\alpha)\tau} \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - e^{-q(1-\alpha)\tau} \sum_{i=0}^{k-2} e^{-iq(1-\alpha)\tau} \delta - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-q(1-\alpha)\tau}\right) \right) \\ &\leq \lambda^{1-\alpha} \left(\frac{1}{(2\eta)^{1-\alpha}} \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - e^{-q(1-\alpha)\tau} \sum_{i=0}^{k-2} e^{-iq(1-\alpha)\tau} \delta - \delta \right) \\ &\leq \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-iq(1-\alpha)\tau} \delta. \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} v^{1-\alpha}(t) &\leq v^{1-\alpha}(t_k) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-q(1-\alpha)(t-t_k)}\right) \\ &\leq \mu^{1-\alpha}(|x_0|) - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-iq(1-\alpha)\tau} \delta - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-\delta \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}}\right). \end{aligned}$$

所以(10)式在 $\forall t \in [t_k, t_{k+1} \wedge \hat{t}_1)$ 上成立。通过归纳法得出, 当 $N(\hat{t}_1, 0) > 0$ 时, (10)式对 $\forall t \in [0, \hat{t}_1)$ 都成

立。如果 $\hat{t}_1 = \infty$, 则(10)式在 $[0, \infty)$ 上成立。如果 $\hat{t}_1 < \infty$, 则当 $t \in [\hat{t}_1, \check{t}_1)$ 上时, 由(5)和(7b)式得

$$v(t) \leq \frac{1}{\rho} \chi \left(\|\omega\|_{[0, t]} \right) \leq 2\eta \chi \left(\|\omega\|_{[0, t]} \right)。$$

当 $t \in [\check{t}_{l-1}, \hat{t}_l)$ 上时, 如果 \check{t}_{l-1} 不是脉冲点, 由(5)和(7a)式得

$$v(\check{t}_{l-1}) \leq \frac{1}{\rho} \chi \left(\|\omega\|_{[0, \check{t}_{l-1}]} \right) \leq 2\eta \chi \left(\|\omega\|_{[0, \check{t}_{l-1}]} \right)。$$

如果 \check{t}_{l-1} 是脉冲点, 由(5)和(7b)式得

$$v(\check{t}_{l-1}) \leq \lambda v(\check{t}_{l-1}^-) \leq \frac{\lambda}{\rho} \chi \left(\|\omega\|_{[0, \check{t}_{l-1}]} \right) \leq 2\eta \chi \left(\|\omega\|_{[0, \check{t}_{l-1}]} \right)。$$

当 $t \in (\check{t}_{l-1}, \hat{t}_l)$ 上时, 若 $N(\hat{t}_l, \check{t}_{l-1}) = 0$, 则

$$v^{1-\alpha}(t) \leq v^{1-\alpha}(\check{t}_{l-1}) - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-q(1-\alpha)(t-\check{t}_{l-1})} \right) \leq \left(2\eta \chi \left(\|\omega\|_{[0, \check{t}_{l-1}]} \right) \right)^{1-\alpha}。$$

若 $N(\hat{t}_l, \check{t}_{l-1}) > 0$, 对于 $\forall t \in (\check{t}_{l-1}, t_{\xi_l+1})$, 由(A₃)得 $v(t) \leq v(\check{t}_{l-1})$ 。对于 $t \in [t_{\xi_l+k}, t_{\xi_l+k+1} \wedge \hat{t}_l)$, $k \in \{1, \dots, N(\hat{t}_l, \check{t}_{l-1})\}$, 类似于(10)的证明, 我们有

$$\begin{aligned} v^{1-\alpha}(t) &\leq \left(2\eta \chi \left(\|\omega\|_{[0, \check{t}_{l-1}]} \right) \right)^{1-\alpha} - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-iq(1-\alpha)\tau} \delta - \frac{c}{q} \left(1 - e^{-\delta \frac{t-t_{\xi_l+k}}{t_{\xi_l+k+1}-t_{\xi_l+k}}} \right) \\ &\leq \left(2\eta \chi \left(\|\omega\|_{[0, \check{t}_{l-1}]} \right) \right)^{1-\alpha}。 \end{aligned}$$

所以, 对于 $\forall t \in (\check{t}_{l-1}, \hat{t}_l)$, 可以得到 $v(t) \leq 2\eta \chi \left(\|\omega\|_{[0, t]} \right)$ 。结合(10)式, 我们有, 在 $t \in [0, \infty)$ 上, $v(t) \leq \beta_2(|x_0|, t) \vee \left(2\eta \chi \left(\|\omega\|_{[0, t]} \right) \right)$ 。

若情况(ii)成立, 在这种情况下, 证明方法与上面相同, 我们最终可以证得

$$v(t) \leq 2\eta \chi \left(\|\omega\|_{[0, t]} \right)。$$

联立(A₁)和(6)式可以得到 $\varphi_1(|x(t)|) \leq v(t) \leq \beta_2(|x_0|, t) \vee \left(2\eta \chi \left(\|\omega\|_{[0, t]} \right) \right)$, 即 $|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t) + \gamma \left(\|\omega\|_{[0, t]} \right)$ 。这里 $\beta(s, t) = \varphi_1^{-1} \circ \beta_2(s, t)$ 是一个 \mathcal{KL} 函数, $\gamma(s) = \varphi_1^{-1} \left(2\eta \chi(s) \right)$ 是一个 \mathcal{K}_∞ 函数。因此系统(1)在 U_g 上对于任意脉冲序列 $\{t_k\} \in \mathcal{F}_\tau$ 是 FTISS。得证。

注 1: 假设(A₃)保证了不具有脉冲效应时系统(1)是 FTISS。故, 当系统(1)受到稳定的脉冲扰动, 即 $\eta \leq 1$ 时, 对于任意的脉冲频率 $\tau > 0$, 系统(1)都是 FTISS 的; 当系统(1)受到不稳定的脉冲扰动影响, 即 $\eta > 1$ 时, 定理 2.1 得到了系统(1)仍然保持 FTISS 性质的脉冲频率的下界, 即

$$\tau \geq \frac{1}{-q(1-\alpha)} \ln \left(\frac{\frac{c}{q} + \left(\frac{\mu(\mathcal{G})}{2\eta} \right)^{1-\alpha}}{\frac{c}{q} + \mu^{1-\alpha}(\mathcal{G})} \right)。$$

注 2: 当系统(1)不具有脉冲扰动且假设(A₃)中 $q = 0$ 时, 定理 2.1 将退化成文献[18]中的结论。当假设

(A₃)中 $q = 0$ 时, 定理 2.1 将退化成文献[21]中的结论。

注 3: 当 $\omega(t) \equiv 0$ 时, 系统(1)将退化为无外部输入的脉冲非线性系统。此时, 在定理 2.1 的条件下, 系统(1)将 FTS。文献[22]考虑了在脉冲扰动满足 $V(g(x, 0)) \leq V(x)$ 时系统 FTS 的结论, 这种情况脉冲效应应具有镇定性。而在定理 2.1 中, 如果不考虑外部输入, (A₂)变成 $V(g(x, 0)) \leq \eta V(x)$, $\eta > 1$ 。此时, 脉冲效应将破坏系统的稳定性, 所以脉冲不能太频繁的发生。

4. 数值模拟

本节给出两个数值例子说明本文中定理的正确性。

例 1: 考虑下面一维脉冲系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x^{\frac{1}{3}}(t) - 1.1x(t) + \omega^2(t), & t \neq t_k, \\ x(t) = 1.2x(t^-) + \omega^2(t^-), & t = t_k. \end{cases} \quad (11)$$

假设初始状态 $x_0 \in U_g$, 其中 g 是一个给定的正常数。选取 $V(x) = |x|$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq -2|x(t)|^{\frac{1}{3}} - 1.1|x(t)| + \omega^2(t) \\ &\leq -2|x(t)|^{\frac{1}{3}} - 0.1|x(t)| - (|x(t)| - \omega^2(t)), \text{ 当 } V(x(t)) \geq \omega^2(t). \\ &\leq -2V(x(t))^{\frac{1}{3}} - 0.1V(x(t)) \end{aligned}$$

根据定理, 当 $t = t_k$ 时, $V(g(x(t), \omega(t))) = |1.2x(t^-) + \omega^2(t^-)| \leq 1.2|x(t^-)| + \omega^2(t^-)$, 这里 $\eta = 1.2$ 和 $\chi(s) = s^2$ 。当 $t \neq t_k$ 时, 取 $c = 2$, $\alpha = 1/3$, $q = 0.1$ 则(3)式成立。因此, 对于 $\forall \{t_k\} \in \mathcal{F}_\tau$ 且

$$\tau \geq \frac{1}{-q(1-\alpha)} \ln \left(\frac{\frac{c}{q} + \left(\frac{\mu(g)}{2\eta}\right)^{1-\alpha}}{\frac{c}{q} + \mu^{1-\alpha}(g)} \right) = -15 \ln \left(\frac{20 + 0.56\mu^{\frac{2}{3}}(g)}{20 + \mu^{\frac{2}{3}}(g)} \right),$$

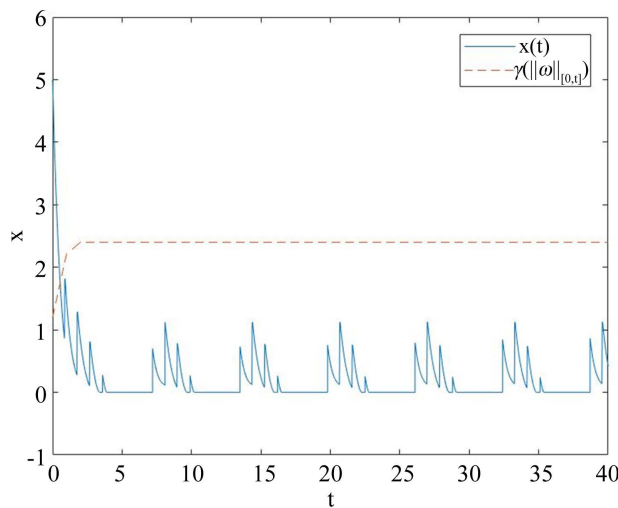


Figure 1. The trajectory of the system when $t = 0.9k$

图 1. 当 $t = 0.9k$ 时的系统轨迹

则系统(11)是 FTISS, 这里 $\mu(\mathcal{G})$ 在定理 2.1 中已定义。取 $\mathcal{G} = 5$, $\omega(t) = 0.5(1 + \sin t)$ 此时, $\|\omega\|_\infty = 1$ 和 $\mu(\mathcal{G}) = 5$, 从而我们有冲频率 $\tau \geq 0.365$ 。在数值模拟中, 取 $t_k = 0.9k$, $k \in \mathbb{Z}_0$ 时, $\tau = 0.9 > 0.365$, 此时图 1 显示了系统(11)在初始状态 $x_0 = 5$ 时的轨迹在有限时刻进入 $\gamma(\|\omega\|_{[0,t]})$ 的界, 此后并没有超过这个界。另一方面, 在相同条件下, 取 $t = 0.3k$, $k \in \mathbb{Z}_0$, 这不满足 FDT 的约束条件, 从图 2 上可以看出轨道不时超过界 $\gamma(\|\omega\|_{[0,t]})$ 。

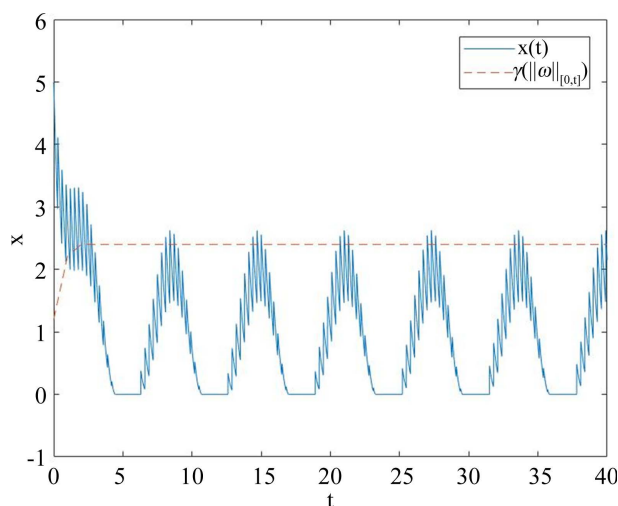


Figure 2. The trajectory of the system when $t = 0.3k$

图 2. 当 $t = 0.3k$ 时的系统轨迹

注 4: 运用文献[21]的结论, 我们得到只有当 $\tau \geq 0.968$ 时系统(11)才能达到 FTISS。因此, 我们的结论在估计脉冲频率上大大改进了文献[21]的结论。

例 2: 考虑一个三维脉冲系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\sqrt{|x_1(t)|} \operatorname{sign}(x_1(t)) - 3x_1(t) + x_2(t) + \omega_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\sqrt{|x_2(t)|} \operatorname{sign}(x_2(t)) - 3x_2(t) + x_3(t) + \omega_2(t), t \neq t_k, \\ \dot{x}_3(t) = -\sqrt{|x_3(t)|} \operatorname{sign}(x_3(t)) - 3x_3(t) + x_1(t) + \omega_3(t), \end{cases} \quad (12)$$

脉冲点满足

$$x(t) = Ax(t^-) + B\omega(t^-), \quad t = t_k. \quad (13)$$

这里 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$, $\omega = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))^T$, $\{t_k\} \in \mathcal{F}_\tau$, 并且

$$A = \begin{pmatrix} 1.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 1.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

假设初始状态 $x_0 \in U_\mathcal{G}$, $\mathcal{G} > 0$ 是一个给定的常数。选取 $V(x) = x^T x$, 对 $x \in \mathbb{R}^3$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1(t) \left(-\sqrt{|x_1(t)|} \operatorname{sign}(x_1(t)) - 3x_1(t) + x_2(t) + \omega_1(t) \right) \\ &\quad + 2x_2(t) \left(-\sqrt{|x_2(t)|} \operatorname{sign}(x_2(t)) - 3x_2(t) + x_3(t) + \omega_2(t) \right) \\ &\quad + 2x_3(t) \left(-\sqrt{|x_3(t)|} \operatorname{sign}(x_3(t)) - 3x_3(t) + x_1(t) + \omega_3(t) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq -2|x_1(t)|^{\frac{3}{2}} - 6x_1^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + 2x_1(t)\omega_1(t) \\
 &\quad - 2|x_2(t)|^{\frac{3}{2}} - 6x_2^2(t) + 2x_2(t)x_3(t) + 2x_2(t)\omega_2(t) \\
 &\quad - 2|x_3(t)|^{\frac{3}{2}} - 6x_3^2(t) + 2x_1(t)x_3(t) + 2x_3(t)\omega_3(t) \\
 &\leq -2\left(|x_1(t)|^{\frac{3}{2}} + |x_2(t)|^{\frac{3}{2}} + |x_3(t)|^{\frac{3}{2}}\right) - 6(x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)) \\
 &\quad + 3(x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)) + \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t) \quad , \text{ 当 } V(x(t)) \geq \chi(\|\omega\|_{[0,t]}) \text{。} \\
 &\leq -cV^\alpha(x(t)) - qV(x(t))
 \end{aligned}$$

这里 $c = 2$, $\alpha = 3/4$, $q = 2$, 则定理 1 的(3)式成立。对于 $t = t_k$, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
 V(x(t)) &= (Ax(t^-) + B\omega(t^-))^2 \\
 &= x^T(t^-)A^T Ax(t^-) + x^T(t^-)A^T B\omega(t^-) + \omega^T(t^-)B^T Ax(t^-) + \omega^T(t^-)B^T B\omega(t^-) \\
 &\leq 2x^T(t^-)A^T Ax(t^-) + 2\omega^T(t^-)B^T B\omega(t^-) \\
 &\leq 2\lambda_{\max}(A^T A)x^T(t^-)x(t^-) + 2\lambda_{\max}(B^T B)\omega^T(t^-)\omega(t^-) \\
 &:= \eta V(x(t^-)) + \chi(\|\omega\|_{[0,t]}) \text{。}
 \end{aligned}$$

这里 $\eta = 3.92$, $\chi(s) = 0.2s^2$ 。那么对于任意给定的脉冲时间序列

$$\{t_k\} \in \mathcal{F}_\tau \text{ 且 } \tau \geq -2 \ln \left(\frac{1 + 0.6\mu^{\frac{1}{4}}(\mathcal{G})}{1 + \mu^{\frac{1}{4}}(\mathcal{G})} \right) \text{。}$$

取 $\omega_i(t) = 0.5(1 + \cos t)$, $i = 1, 2, 3$, $\mathcal{G} = 2$, 则 $\mu(\mathcal{G}) = 2$ 。从而, 我们可以得到 $\tau \geq 0.49$ 时系统(12) FTISS。
 图 3 显示了系统(12)和(13)在选取 $t_k = 0.7k$, $k \in \mathbb{Z}_0$, 此时 $\tau = 0.7 > 0.49$, 及初始时刻分别为 $x_0 = (1.5, 0.5, -0.5)^T$, $(0.8, 0.5, 1.5)^T$, $(-1.5, 0, 0.5)^T$, $(0.5, 1.3, 1.5)^T$ 时的轨迹在有限时刻进入 $\gamma(\|\omega\|_{[0,t]})$ 的界, 此后并没有超过这个界。另一方面, 在相同条件下, 取 $t = 0.3k$, $k \in \mathbb{Z}_0$, $\tau = 0.3 < 0.49$, 这不满足 FDT 的约束条件, 从图 4 上可以看出轨道不时超过界 $\gamma(\|\omega\|_{[0,t]})$ 。

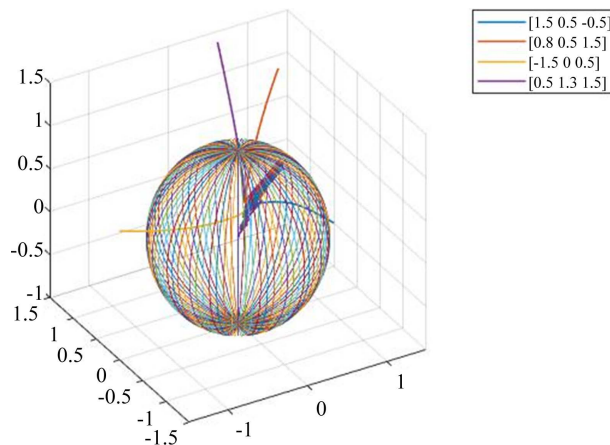


Figure 3. The trajectory of the system when $t = 0.7k$
 图 3. 当 $t = 0.7k$ 时的系统轨迹

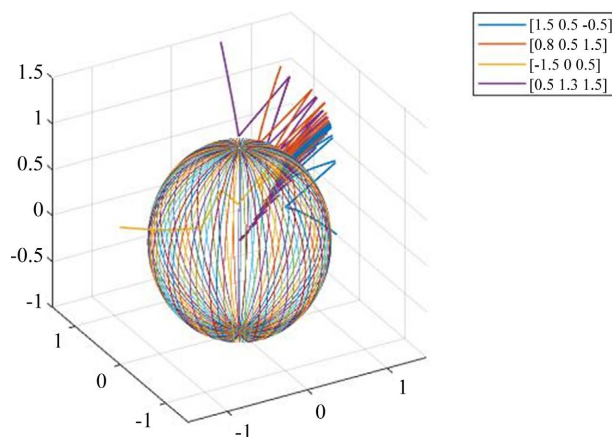


Figure 4. The trajectory of the system when $t = 0.2k$

图 4. 当 $t = 0.2k$ 时的系统轨迹

参考文献

- [1] Haddad, W.M., Chellaboina, V. and Nersesov, S.G. (2006) Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability, Dissipativity, and Control. In: *Princeton Series in Applied Mathematics*, Vol. 49, Princeton University Press, Princeton. <https://doi.org/10.1515/9781400865246>
- [2] Lakshmikantham, V., Simeonov, P.S., et al. (1989) Theory of Impulsive Differential Equations. In: *Series in Modern Applied Mathematics*, Vol. 6, World Scientific, Singapore. <https://doi.org/10.1142/0906>
- [3] Li, X.D., Yang, X.Y. and Huang, T.W. (2019) Persistence of Delayed Cooperative Models: Impulsive Control Method. *Applied Mathematics and Computation*, **342**, 130-146. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.09.003>
- [4] Zhan, T., Ma, S. and Liu, X. (2019) Synchronization of Singular Switched Complex Networks via Impulsive Control with All Nonsynchronized Subnetworks. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **29**, 4872-4887. <https://doi.org/10.1002/rnc.4656>
- [5] Hespanha, J.P., Liberzon, D. and Teel, A.R. (2008) Lyapunov Conditions for Input-to-State Stability of Impulsive Systems. *Automatica*, **44**, 2735-2744. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.03.021>
- [6] Liu, X. and Zhang, K. (2019) Input-to-State Stability of Time-Delay Systems with Delay-Dependent Impulses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **65**, 1676-1682. <https://doi.org/10.1109/TAC.2019.2930239>
- [7] Tang, Y., Wu, X., Shi, P., et al. (2020) Input-to-State Stability for Nonlinear Systems with Stochastic Impulses. *Automatica*, **113**, Article ID: 108766. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108766>
- [8] Levant, A. (2005) Homogeneity Approach to High-Order Sliding Mode Design. *Automatica*, **41**, 823-830. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2004.11.029>
- [9] Levant, A. (2007) Principles of 2-Sliding Mode Design. *Automatica*, **43**, 576-586. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.10.008>
- [10] Bhat, S.P. and Bernstein, D.S. (2000) Finite-Time Stability of Continuous Autonomous Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **38**, 751-766. <https://doi.org/10.1137/S0363012997321358>
- [11] Polyakov, A. (2012) Nonlinear Feedback Design for Fixed-Time Stabilization of Linear Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**, 2106-2110. <https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2179869>
- [12] Lu, W.L., Liu, X.W. and Chen, T.P. (2016) A Note on Finite-Time and Fixed-Time Stability. *Neural Networks*, **81**, 11-15. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2016.04.011>
- [13] Li, X.D., Ho, D.W. and Cao, J. (2019) Finite-Time Stability and Settling-Time Estimation of Nonlinear Impulsive Systems. *Automatica*, **99**, 361-368. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.10.024>
- [14] Hu, H.X., Gao, B. and Xu, L.G. (2022) Finite-Time and Fixed-Time Attractiveness for Nonlinear Impulsive Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **67**, 5586-5593. <https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3123237>
- [15] Cai, X., Bekiaris-Liberis, N. and Krstic, M. (2017) Input-to-State Stability and Inverse Optimality of Linear Time-Varying-Delay Predictor Feedbacks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **63**, 233-240. <https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2722104>
- [16] Cai, X., Bekiaris-Liberis, N. and Krstic, M. (2019) Input-to-State Stability and Inverse Optimality of Predictor Feed-

- back for Multi-Input Linear Systems. *Automatica*, **103**, 549-557. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.02.038>
- [17] Dashkovskiy, S. and Mironchenko, A. (2013) Input-to-State Stability of Nonlinear Impulsive Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **51**, 1962-1987. <https://doi.org/10.1137/120881993>
- [18] Hong, Y., Jiang, Z.P. and Feng, G. (2010) Finite-Time Input-to-State Stability and Applications to Finite-Time Control Design. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **48**, 4395-4418. <https://doi.org/10.1137/070712043>
- [19] Ai, Z. and Zong, G. (2014) Finite-Time Stochastic Input-to-State Stability of Impulsive Switched Stochastic Nonlinear Systems. *Applied Mathematics and Computation*, **245**, 462-473. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.07.092>
- [20] Lopez-Ramirez, F., Efimov, D., Polyakov, A., *et al.* (2020) Finite-Time and Fixed-Time Input-to-State Stability: Explicit and Implicit Approaches. *Systems & Control Letters*, **144**, Article ID: 104775. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2020.104775>
- [21] He, X.Y., Li, X.D. and Song, S.J. (2022) Finite-Time Input-to-State Stability of Nonlinear Impulsive Systems. *Automatica*, **135**, Article ID: 109994. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109994>
- [22] Nersesov, S.G. and Haddad, W.M. (2008) Finite-Time Stabilization of Nonlinear Impulsive Dynamical Systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **2**, 832-845. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2007.12.001>