Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(2), 801-810
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.122082

Hans汉斯

具有磁扩散系数的平面可压缩磁流体动力学方程组密度的上界估计

王亚茹[1]，王建国[2]，陈恒良[1]

[1]中央民族大学理学院，北京
[2]北京建筑大学附属中学，北京

收稿日期：2023年1月26日；录用日期：2023年2月19日；发布日期：2023年2月28日

摘　要

磁流体动力学方程组(MHD)是由Navier-Stokes方程组与Maxwell方程组通过洛伦兹力和欧姆定律耦合而成的偏微分方程组，广泛应用于天体物理、受控热核反应和工业。本文证明了大初值具有磁扩散系数的平面可压缩磁流体动力学方程组初边值问题的密度具有正上界。证明的关键是在大初值的情况下，建立了能量的先验估计，结合方程结构可得到密度的正上界，对求解大初值可压缩磁流体动力学方程初边值问题有重要意义。

关键词

可压缩磁流体动力学，磁扩散，真空

The Upper Bound of the Density to the Planar Compressible MHD Equations with Magnetic Diffusion Coefficient

Yaru Wang[1], Jianguo Wang[2], Hengliang Chen[1]

[1]College of Science, Minzu University of China, Beijing
[2]Middle School Affiliated to Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: Jan. 26th, 2023; accepted: Feb. 19th, 2023; published: Feb. 28th, 2023

Abstract

Magnetohydrodynamic (MHD) equations are partial differential equations which are coupled by Navier-Stokes equations and Maxwell equations through Lorentz force and Ohm's law. They are widely

文章引用: 王亚茹, 王建国, 陈恒良. 具有磁扩散系数的平面可压缩磁流体动力学方程组密度的上界估计[J]. 应用数学进展, 2023, 12(2): 801-810. DOI: 10.12677/aam.2023.122082

used in astrophysics, controlled thermonuclear reaction and industry. In this paper, we proved the upper bound of density to the initial boundary value problem of planar compressible magnetohydrodynamics equations with large initial data and magnetic diffusion coefficient. The key of the proof is to establish a priori estimate of the energy in the case of vacuum. It is important to solve the initial boundary value problem of compressible magnetohydrodynamics equation with large initial data.

Keywords

Compressible Magnetohydrodynamics, Magnetic Diffusion, Vacuum

1. 引言

磁流体动力学的基本方程组是由流体力学中的纳维－斯托克斯方程组(Navier-Stokes)和电磁学中的麦克斯韦方程组(Maxwell)通过洛伦兹力耦合而成的。其中 NS 方程是一个极具代表性的流体力学模型，对其定解问题的研究一直是国内外数学物理界关注的热点话题之一。

欧拉坐标下，三维可压缩磁流体动力学方程组为：

$$\begin{cases} \rho_t + div(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \\ (\rho \boldsymbol{u})_t + div(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla P = \dfrac{1}{4\pi}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} + div\Psi(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{B}_t - \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = -\nabla \times (\nu \nabla \times \boldsymbol{B}),\ div\boldsymbol{B} = 0 \\ \left(\mathcal{E} + \dfrac{|\boldsymbol{B}|^2}{8\pi}\right)_t + div(\boldsymbol{u}(\mathcal{E} + P)) = \dfrac{1}{4\pi} div((\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}) + div\left(\dfrac{\nu}{4\pi}\boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{u}\Psi(\boldsymbol{u}) + \kappa \nabla \theta\right) \end{cases} \tag{1.1}$$

这里，未知量 $\rho, \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ 代表流体的密度和速度，$P, \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3) \in \mathbb{R}^3$ 代表压强和磁场，θ 代表温度，$\Psi(\boldsymbol{u})$ 代表粘性应力张量，其表达式为：

$$\Psi(\boldsymbol{u}) = 2\mu \mathbb{D}(\boldsymbol{u}) + \lambda' div\boldsymbol{u}\boldsymbol{I}_3$$

其中，$\mathbb{D}(\boldsymbol{u}) \triangleq \dfrac{\nabla \boldsymbol{u} + \nabla' \boldsymbol{u}}{2}$，$\boldsymbol{I}_3$ 是 3 × 3 的单位矩阵，$\nabla' \boldsymbol{u}$ 是 $\nabla \boldsymbol{u}$ 的转置矩阵，粘性系数 μ 和 λ' 满足 $\mu \ge 0$，$2\mu + 3\lambda' \ge 0$。

此外，(1.1)中 $\mathcal{E}$ 代表能量，表达式为 $\mathcal{E} \triangleq \rho\left(e + \dfrac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}\right)$，$e$ 为内能，$\dfrac{\rho|\boldsymbol{u}|^2}{2}$ 为动能，$\dfrac{|\boldsymbol{B}|^2}{8\pi}$ 为磁能。系数 $\nu \ge 0$ 和 $\kappa \ge 0$ 分别为磁场的磁扩散系数和热传导系数。

本文不考虑热传导系数，即从 $\kappa = 0$ 的情形开始研究，考虑的是具有空间变量 $x = (x, x_2, x_3)$ 的三维 MHD 流体，该流体沿 x 方向运动且在横向方向 (x_2, x_3) 上均匀分布：

$$\begin{cases} \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(x,t),\ \tilde{P} = \tilde{P}(x,t) \\ \boldsymbol{u} = (\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{w}})(x,t),\ \tilde{\boldsymbol{w}} = (u_2, u_3) \\ \boldsymbol{B} = (b_1, \tilde{\boldsymbol{b}})(x,t),\ \tilde{\boldsymbol{b}} = (b_2, b_3) \end{cases} \tag{1.2}$$

其中，$\tilde{u}$ 为纵向速度，b_1 代表纵向磁场，$\tilde{\boldsymbol{w}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{b}}$ 分别代表横向速度和横向磁场。利用(1.2)这种特殊的结构，对于恒定纵向磁场 $b_1 = 1$ (不失一般性)，结合 $\lambda = 2\mu + \lambda' > 0$，我们可以将方程组(1.1)简化为：

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_t + (\tilde{\rho}\tilde{u})_x = 0 \\ (\tilde{\rho}\tilde{u})_t + (\tilde{\rho}\tilde{u}^2 + \tilde{P})_x = (\lambda \tilde{u}_x)_x - \frac{1}{4\pi}\tilde{\boldsymbol{b}}\cdot\tilde{\boldsymbol{b}}_x \\ (\tilde{\rho}\tilde{\boldsymbol{w}})_t + (\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{\boldsymbol{w}})_x - \frac{1}{4\pi}\tilde{\boldsymbol{b}}_x = \mu \tilde{\boldsymbol{w}}_{xx} \\ \tilde{\boldsymbol{b}}_t + (\tilde{u}\tilde{\boldsymbol{b}})_x - \tilde{\boldsymbol{w}}_x = (\nu \tilde{\boldsymbol{b}})_{xx} \\ \tilde{E}_t + \left(\tilde{u}\left(\tilde{E} + \tilde{P} + \frac{1}{2}|\tilde{\boldsymbol{b}}|^2\right) - \tilde{\boldsymbol{w}}\cdot\tilde{\boldsymbol{b}}\right)_x = \left(\lambda\tilde{u}\tilde{u}_x + \mu\tilde{\boldsymbol{w}}\cdot\tilde{\boldsymbol{w}}_x + \nu\tilde{\boldsymbol{b}}\cdot\tilde{\boldsymbol{b}}_x\right)_x \end{cases} \tag{1.3}$$

同样的，$\tilde{\rho} \ge 0$ 代表密度函数；$\tilde{u}$ 代表速度；$\tilde{P} = R\tilde{\rho}\tilde{\theta} = (\gamma - 1)\tilde{\rho}\tilde{e}$ 表示压强；$\tilde{\boldsymbol{w}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{b}}$ 分别表示横向速度和横向磁场；$\tilde{E}$ 和 $\tilde{\theta}$ 分别代表平面磁流体动力学的总能量和温度；μ 和 λ 代表粘性系数；$\nu \ge 0$ 表示磁场的磁扩散系数。$\tilde{E}$ 的表达式为

$$\tilde{E} = \tilde{\rho}\left(\tilde{e} + \frac{1}{2}\left(\tilde{u}^2 + |\tilde{\boldsymbol{w}}|^2\right)\right) + \frac{1}{8\pi}|\tilde{\boldsymbol{b}}|^2.$$

本文主要研究(1.3)的初边值问题。理想气体和内能的状态方程为

$$\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}) = R\tilde{\rho}\tilde{\theta},\ \tilde{e} = \tilde{e}(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}) = C_v\tilde{\theta} = \frac{R\tilde{\theta}}{\gamma - 1}.$$

其中 $R, \gamma > 1$ 是正常数，C_v 是气体在恒容下的热容。

接下来，我们设 $R = 1$ 不失一般性，考虑初始条件和边界条件：

$$\left(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{w}}, \tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{P}\right)\Big|_{t=0} = \left(\tilde{\rho}_0(x), \tilde{u}_0(x), \tilde{\boldsymbol{w}}_0(x), \tilde{\boldsymbol{b}}_0(x), \tilde{P}_0(x)\right),\ x \in (0, L), \tag{1.4}$$

$$\left(\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{w}}, \tilde{\boldsymbol{b}}\right)\Big|_{x=0,L} = 0$$

对于系统(1.1)的理论，近几年有不少显著成果。2013 年，Huang-Li [1]建立了三维粘性具有热传导可压缩的磁流体动力学方程组的爆破准则。结果表明，对于初始密度允许真空的柯西问题，当密度上有界且速度满足 Serrin 条件时，全局存在强解或光滑解。因此，如果速度的 Serrin 范数保持有界，就不可能在密度变得无界之前形成其他种类的奇点(如真空态消失或非真空区出现真空或更温和的奇点)。这个判据类似于已知的三维不可压缩 NS 方程的 Serrin 的爆破准则，特别是它与温度和磁场无关，与可压缩 NS 方程的准则完全相同。Li-Xu-Zhang [2]考虑了三维等熵可压缩磁流体动力学方程的柯西问题。对于能量较小但可能振荡较大的具有正则性的初始值，证明了经典解的全局适定性，其中流体密度允许包含真空状态，并给出了解的大时间行为。

2016 年，Wang [3]建立了仅与密度有关的二维可压缩磁流体强解的正则性判据。

2017 年，Fan-Huang [4]研究了具有大初始值和真空情形的平面可压缩磁流体力学方程的初边值问题，证明了强解存在唯一性。

2019 年，Ye-Li [5]建立了具有大初值可压缩等熵磁流体动力学方程的全局强解，基于加权的 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式来得到速度 u 的 $L^p(1 < p < \infty)$ 范数。在二维情形下，Wu-Wu [6]建立了初始值接近平衡态时可压缩磁流体动力系统光滑解的全局存在唯一性。三维时，Hong-Hou-Peng [7]研究了等熵可压缩磁流体动力学方程的柯西问题，证明了经典解的存在性。

2021 年，Xiao-Lu [8]研究了平面 MHD 方程在高温状态下辐射对动力学的影响。当粘性系数 μ 取决于特定的气体体积($\mu=\tilde{\mu}_1+\tilde{\mu}_2 v^{-\alpha}$ ，其中 $\tilde{\mu}_1>0,\tilde{\mu}_2\geq 0$)，热传导系数 κ 是温度的幂函数($\kappa=\tilde{\kappa}\theta^{\beta}$ ，其中 $\tilde{\kappa}>0$)时，证明了在无界域中，对任意的 $\alpha\geq 0$ 和 $\beta\geq 0$ ，磁流体动力学系统具有大初值强解的整体存在性。特别的，常数系数的情况同样适用。

2022 年，Li-Li [9]证明了大初值无热传导、无磁扩散效应的平面 MHD 方程柯西问题强解的全局适定性，证明的关键是引入了横截有效粘性通量 F 并对其进行先验估计。

本文利用 Kazhiklov 和 Selukhin [10]的方法，先得到了包含耗散项的基本能量估计，又受到 Li-Xin [11] [12]的启发，得出了密度的正上界估计。

本文用 C 代表一般正常数，每个式子间的 C 表示不一定相同。

2. 拉格朗日坐标下的方程及主要定理

在本节中，为了更好的处理对流项，我们根据 Li-Li [9]和 Li-Xin [11] [12]的思想引入拉格朗日坐标，重新定义拉格朗日坐标下的方程组(1.3)。利用 flowmap 法将方程由欧拉坐标转换为拉格朗日坐标。具体方法如下：

设 y 为拉格朗日坐标，将拉格朗日坐标 y 和欧拉坐标 x 之间的坐标变换定义为

$$x=\eta(y,t),$$

其中 $\eta(y,t)$ 是由 $\tilde{u}$ 所确定的映射，即：

$$\begin{cases}\partial_t\eta(y,t)=\tilde{u}(\eta(y,t),t)\\ \eta(y,0)=y\end{cases}$$

定义拉格朗日坐标下新的未知数

$$(\rho,u,\boldsymbol{b},\boldsymbol{w},p)(y,t)=(\tilde{\rho},\tilde{u},\tilde{\boldsymbol{b}},\tilde{\boldsymbol{w}},\tilde{P})(\eta(y,t),t).$$

通过简单的计算，我们可以验证

$$\tilde{u}_x=\frac{u_y}{\eta_y},\ \tilde{u}_{xx}=\frac{1}{\eta_y}\left(\frac{u_y}{\eta_y}\right)_y,\ \tilde{u}_t+\tilde{u}\tilde{u}_x=u_t.$$

同样的，我们有

$$(\tilde{u}_x,\tilde{\boldsymbol{w}}_x,\tilde{\boldsymbol{b}}_x,\tilde{p}_x)=\left(\frac{u_y}{\eta_y},\frac{\boldsymbol{w}_y}{\eta_y},\frac{\boldsymbol{b}_y}{\eta_y},\frac{p_y}{\eta_y}\right),\quad(\tilde{u}_{xx},\tilde{\boldsymbol{w}}_{xx})=\left(\frac{1}{\eta_y}\left(\frac{u_y}{\eta_y}\right),\frac{1}{\eta_y}\left(\frac{\boldsymbol{w}_y}{\eta_y}\right)\right),$$

和

$$\tilde{\rho}_t+\tilde{u}\tilde{\rho}_x=\rho_t,\quad\tilde{u}_t+\tilde{u}\tilde{u}_x=u_t,\quad\tilde{p}_t+\tilde{u}\tilde{p}_x=p_t,$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_t+\tilde{u}\tilde{\boldsymbol{b}}_x=\boldsymbol{b}_t,\quad\tilde{\boldsymbol{w}}_t+\tilde{u}\tilde{\boldsymbol{w}}_x=\boldsymbol{w}_t.$$

为了更有效地处理真空，我们引入了一个新的函数，它是欧拉坐标和拉格朗日坐标之间的雅可比矩阵：

$$J(y,t)=\eta_y(y,t)$$

于是有

$$J_t=u_y;$$

由质量守恒方程有

$$(J\rho)_t=J_t\rho+\rho_tJ=u_y\rho-J\frac{u_y}{J}\rho=0,$$

且

$$\rho|_{t=0}=\rho_0,\ J|_{t=0}=1,$$

于是

$$J\rho=\rho_0.$$

通过以上的变换我们就可以将欧拉坐标下的磁流体动力学方程组改写到拉格朗日坐标下：

$$\begin{cases} J_t=u_y \\ \rho_0 u_t+P_y+\dfrac{1}{4\pi}b\cdot b_y=\lambda\left(\dfrac{u_y}{J}\right)_y \\ \rho_0\boldsymbol{w}_t-\dfrac{1}{4\pi}\boldsymbol{b}_y=\mu\left(\dfrac{\boldsymbol{w}_y}{J}\right)_y \\ J\boldsymbol{b}_t+u_y\boldsymbol{b}-\boldsymbol{w}_y=\nu\left(\dfrac{\boldsymbol{b}_y}{J}\right)_y \\ p_t+\gamma\dfrac{u_y}{J}p=\gamma-1\left(\lambda\left|\dfrac{u_y}{J}\right|^2+\mu\left|\dfrac{\boldsymbol{w}_y}{J}\right|^2+\dfrac{\nu}{4\pi}\left|\dfrac{\boldsymbol{b}_y}{J}\right|^2\right) \end{cases} \tag{2.1}$$

本文我们考虑的是系统(2.1)在任意给定时间 $T>0$ 和空间区域长度 $L>0$ 的条件下的初边值问题，因此，需要对系统的边界条件进行补充。

该系统的边界条件和初始条件如下：

$$u(0,t)=u(L,t)=\boldsymbol{b}(0,t)=\boldsymbol{b}(L,t)=\boldsymbol{w}(0,t)=\boldsymbol{w}(L,t)=0 \tag{2.2}$$

和

$$\left(J,\sqrt{\rho_0}u,\boldsymbol{b},\sqrt{\rho_0}\boldsymbol{w},p\right)\Big|_{t=0}=\left(J_0,\sqrt{\rho_0}u_0,\boldsymbol{b}_0,\sqrt{\rho_0}\boldsymbol{w}_0,p_0\right) \tag{2.3}$$

其中 J_0 有一致正上界和正下界，值得注意的是，根据定义，J_0 应该为 1，然而为了将局部解扩张为整体解，我们可以选取一个正的时间 T_* 作为初始时间，J 不一定具有相同的初始值，因此我们必须处理 $J_0\neq 1$ 的局部解适定性情况。另外需要注意的是，(2.3)中的初始条件作用在 $\left(\sqrt{\rho_0}u,\sqrt{\rho_0}\boldsymbol{w}\right)$ 上，而不是 $(u,\boldsymbol{w})$，换句话说，我们只需要指定 $(u,\boldsymbol{w})$ 在非真空区域 $\{y\in(0,L)\,|\,\rho_0(y)>0\}$ 中的值。

3. 先验估计

接着我们用基本能量估计法计算出系统的初始能量：

命题 3.1 对任意的 $t\in(0,T)$，有

$$\int_0^L J(y,t)\,\mathrm{d}y=L,$$

和

$$\int_0^L\left(\rho_0\frac{u^2}{2}+\rho_0\frac{|\boldsymbol{w}|^2}{2}+\frac{J|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi}+\frac{Jp}{\gamma-1}\right)\mathrm{d}y=E_0$$

其中

$$E_0 \triangleq \int_0^L \left(\rho_0 \frac{(u_0)^2}{2} + \rho_0 \frac{|\boldsymbol{w}_0|^2}{2} + \frac{|\boldsymbol{b}_0|^2}{8\pi} + \frac{p_0}{\gamma-1} \right) \mathrm{d}y.$$

证明 将方程$(2.1)_1$两边同时在$y \in (0,L)$上积分，结合边界条件(2.2)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L J(y,t)\mathrm{d}y = 0$$

上式左右两边同时在$(0,t)$上积分，结合$J_0 = 1$，即得第一个结论。

接下来我们用u乘$(2.1)_2$并在$y \in (0,L)$上积分，利用边界条件(2.2)，分部积分后有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{\rho_0}u\right\|_2^2 + \lambda\left\|\frac{u_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2 = \int_0^L \left(\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi} + p\right) u_y \mathrm{d}y \tag{3.1}$$

$\boldsymbol{w} \cdot (2.1)_3$并在$y \in (0,L)$上积分，利用边界条件(2.2)，分部积分后有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{\rho_0}\boldsymbol{w}\right\|_2^2 + \mu\left\|\frac{\boldsymbol{w}_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2 = -\int_0^L \frac{\boldsymbol{w}_y \cdot \boldsymbol{b}}{4\pi} \mathrm{d}y \tag{3.2}$$

$\frac{\boldsymbol{b}}{4\pi} \cdot (2.1)_4$在$y \in (0,L)$上积分，将$(3.1)_1$代入，利用边界条件(2.2)，分部积分后有

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{J}\boldsymbol{b}\right\|_2^2 + \frac{1}{8\pi}\int_0^L u_y |\boldsymbol{b}|^2 \mathrm{d}y + \frac{\nu}{4\pi}\left\|\frac{\boldsymbol{b}_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2 = \int_0^L \frac{\boldsymbol{w}_y \cdot \boldsymbol{b}}{4\pi} \mathrm{d}y \tag{3.3}$$

将(3.1)~(3.3)相加，我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\sqrt{\rho_0}u\right\|_2^2 + \left\|\sqrt{\rho_0}\boldsymbol{w}\right\|_2^2 + \frac{\left\|\sqrt{J}\boldsymbol{b}\right\|_2^2}{4\pi} \right) + \lambda\left\|\frac{u_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2 + \mu\left\|\frac{\boldsymbol{w}_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2 + \frac{\nu}{4\pi}\left\|\frac{\boldsymbol{b}_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2 = \int_0^L p u_y \mathrm{d}y \tag{3.4}$$

为了处理上式右端项，我们用$\frac{J}{\gamma-1}$乘$(2.1)_5$并在$y \in (0,L)$上积分，有

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L Jp \mathrm{d}y + \int_0^L p u_y \mathrm{d}y = \lambda\left\|\frac{u_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2 + \mu\left\|\frac{\boldsymbol{w}_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2 + \frac{\nu}{4\pi}\left\|\frac{\boldsymbol{b}_y}{\sqrt{J}}\right\|_2^2 \tag{3.5}$$

(3.4) + (3.5)得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho_0}u\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho_0}\boldsymbol{w}\right\|_2^2 + \frac{\left\|\sqrt{J}\boldsymbol{b}\right\|_2^2}{8\pi} + \frac{Jp}{\gamma-1} \right) \mathrm{d}y = 0$$

再将上式对t进行积分，得证。

经过进一步计算我们可以得到J的下界：

命题 3.2 对任意$t \in (0,T)$，有

$$\inf_{(y,t)\in(0,L)\times(0,T)} J(y,t) \geq \frac{m_1}{m_2} \mathrm{e}^{-\frac{\gamma m_2 E_0 T}{\lambda m_1 L}} \triangleq \underline{J},\ \rho(y,t) \leq \frac{\rho_0}{\underline{J}}.$$

证明 该命题的证明思路受 Kazhiklov 和 Selukhin [10]、Xin 和 Li [11] [12]的启发，将$(2.1)_1$代入$(2.1)_2$中，有

$$\lambda(\ln J)_{yt}=\rho_0u_t+p_y+\left(\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi}\right)_y,$$

在$(0,t)$上积分结合$J|_{t=0}=1$，有

$$\lambda(\ln J)_y=\rho_0(u-u_0)+\int_0^t\left(p_y+\left(\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi}\right)_y\right)\mathrm{d}\tau,$$

上式在(z,y)上对空间变量进行积分可以得到

$$\begin{aligned}&\lambda\ln J(y,t)-\lambda\ln J(z,t)\\&=\int_z^y\rho_0(u-u_0)\mathrm{d}\xi+\int_0^t(p(y,t)-p(z,t))\mathrm{d}\tau+\int_0^t\left(\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi}(y,t)-\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi}(z,t)\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\int_0^y\rho_0(u-u_0)\mathrm{d}\xi+\int_0^t p(y,t)\mathrm{d}\tau+\int_0^t\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi}(y,t)\mathrm{d}\tau-\lambda\ln J(y,t)\\&=\int_0^z\rho_0(u-u_0)\mathrm{d}\xi+\int_0^t p(z,t)\mathrm{d}\tau+\int_0^t\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi}(z,t)\mathrm{d}\tau-\lambda\ln J(z,t)\end{aligned}$$

上式两端说明该方程与空间无关，仅依赖于时间，定义

$$\int_0^y\rho_0(u-u_0)\mathrm{d}\xi+\int_0^t p(y,t)\mathrm{d}\tau+\int_0^t\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi}(y,t)\mathrm{d}\tau-\lambda\ln J(y,t)\triangleq h(t),$$

从而有

$$J(y,t)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda}\int_0^y\rho_0(u-u_0)\mathrm{d}\xi}\cdot\mathrm{e}^{\int_0^t\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)\mathrm{d}\tau}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{h(t)}{\lambda}}$$

定义

$$\begin{cases}K(t)\triangleq\mathrm{e}^{\frac{h(t)}{\lambda}}\\B(y,t)\triangleq\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}\int_0^y\rho_0(u-u_0)\mathrm{d}\xi}\end{cases}$$

从而上式可变形为

$$\mathrm{e}^{\int_0^t\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)\mathrm{d}\tau}=J(y,t)K(t)B(y,t)\tag{3.6}$$

用$\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)$乘(3.6)有

$$\partial_t\left(\mathrm{e}^{\int_0^t\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)\mathrm{d}\tau}\right)=\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)J(y,t)K(t)B(y,t)$$

在$(0,t)$上积分有

$$e^{\int_0^t\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)d\tau}-1=\int_0^t\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)J(y,t)K(t)B(y,t)d\tau$$

结合(3.6)有

$$J(y,t)K(t)B(y,t)=1+\int_0^t\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)J(y,t)K(t)B(y,t)d\tau. \tag{3.7}$$

接下来通过先对 $K(t)$ 和 $B(y,t)$ 进行处理，进而得到 J 的下界估计：

结合命题 3.1，利用 Hölder 不等式，有

$$\left|\int_0^y\rho_0(u-u_0)d\xi\right|\le\int_0^L\left|\rho_0(u-u_0)\right|d\xi\le\int_0^L\left(|\rho_0u|+|\rho_0u_0|\right)d\xi\le2\sqrt{2\|\rho_0\|_1E_0},$$

从而有

$$m_1\triangleq e^{-\frac{2}{\lambda}\sqrt{2\|\rho_0\|_1E_0}}\le B(y,t)\le e^{\frac{2}{\lambda}\sqrt{2\|\rho_0\|_1E_0}}\triangleq m_2. \tag{3.8}$$

接下对 $K(t)$ 的上下界进行估计：

(3.7)左右两边对 $y\in(0,L)$ 积分有

$$K(t)\int_0^LJ(y,t)B(y,t)dy=L+\int_0^tK(t)\int_0^L\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)J(y,t)B(y,t)dyd\tau. \tag{3.9}$$

上式结合命题 3.1 和不等式(3.8)有

$$\begin{aligned}m_1LK(t)&=K(t)m_1\int_0^LJdy\\&\le K(t)\int_0^LJ(y,t)B(y,t)dy\\&=L+\int_0^tK(t)\int_0^L\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)J(y,t)B(y,t)dyd\tau\\&\le L+m_2\int_0^tK(t)\int_0^L\left(\frac{Jp}{\lambda}+\frac{J|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)dyd\tau\\&\le L+\frac{\gamma m_2E_0}{\lambda}\int_0^tK(t)d\tau\end{aligned}$$

即

$$K(t)\le\frac{1}{m_1}+\frac{\gamma m_2E_0}{\lambda m_1L}\int_0^tK(t)d\tau,$$

利用 Gronwall 不等式我们就得到了

$$K(t)\le\frac{1}{m_1}e^{\frac{\gamma m_2E_0t}{\lambda m_1L}},\ t\in[0,T].$$

由(3.7)，又因为

$$\begin{aligned}L&\le L+\int_0^tK(t)\int_0^L\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)J(y,t)B(y,t)dyd\tau\\&=K(t)\int_0^LJ(y,t)B(y,t)dy\le K(t)m_2\int_0^LJdy=m_2LK(t)\end{aligned}$$

从而有

$$\frac{1}{m_2} \le K(t) \le \frac{1}{m_1} \mathrm{e}^{\frac{\gamma m_2 E_0 t}{\lambda m_1 L}}.$$

接下来可以完成 J 的下界估计：

$$1 = \mathrm{e}^0 \le \mathrm{e}^{\int_0^t \left(\frac{p}{\lambda} + \frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)\mathrm{d}\tau} = J(y,t)K(t)B(y,t) \le \frac{m_2}{m_1} \mathrm{e}^{\frac{\gamma m_2 E_0 t}{\lambda m_1 L}} J(y,t)$$

从而

$$J(y,t) \ge \frac{m_1}{m_{21}} \mathrm{e}^{-\frac{\gamma m_2 E_0 t}{\lambda m_1 L}} \triangleq \underline{J},$$

又

$$J(y,t) = \frac{\rho_0}{\rho} \ge \underline{J}$$

从而

$$\rho(y,t) \le \frac{\rho_0}{\underline{J}}$$

得证。

根据上面的方法，我们可以得到 J 的一个受 pJ 和 $J|\boldsymbol{b}|^2$ 控制的上界：

推论 3.1 对任意 $t \in (0,\infty)$，有

$$J(y,t) \le \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_2^2}{\lambda m_1^2} \int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\gamma m_2 E_0 t}{\lambda m_1 L}} \left(\frac{Jp}{\lambda} + \frac{J|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)\mathrm{d}\tau.$$

证明由(3.7)结合命题 3.3 的相关结论，由

$$\frac{m_1}{m_2} J(y,t) \le J(y,t)K(t)B(y,t) = 1 + \int_0^t \left(\frac{p}{\lambda} + \frac{|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right) J(y,t)K(t)B(y,t)\mathrm{d}\tau$$

$$\le 1 + \frac{m_2}{\lambda m_1} \int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\gamma m_2 E_0 t}{\lambda m_1 L}} \left(\frac{Jp}{\lambda} + \frac{J|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)\mathrm{d}\tau$$

从而有

$$J(y,t) \le \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_2^2}{\lambda m_1^2} \int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\gamma m_2 E_0 t}{\lambda m_1 L}} \left(\frac{Jp}{\lambda} + \frac{J|\boldsymbol{b}|^2}{8\pi\lambda}\right)\mathrm{d}\tau.$$

4. 总结

本文得到了具有磁扩散系数的可压缩磁流体动力学方程组的基本能量估计和密度的上界估计，后续可继续进行解的延拓，这对求解大初值可压缩磁流体动力学方程初边值问题有重要意义。

参考文献

[1] Huang, X. and Li, J. (2013) Serrin-Type Blowup Criterion for Viscous, Compressible, and Heat Conducting Navi-

er-Stokes and Magnetohydrodynamic Flows. *Communications in Mathematical Physics*, **324**, 147-171. https://doi.org/10.1007/s00220-013-1791-1

[2] Li, H.L., Xu, X. and Zhang, J. (2013) Global Classical Solutions to 3D Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Large Oscillations and Vacuum. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **45**, 1356-1387. https://doi.org/10.1137/120893355

[3] Wang, T. (2016) A Regularity Criterion of Strong Solutions to the 2D Compressible Magnetohydrodynamic Equations. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **31**, 100-118. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2016.01.011

[4] Fan, J., Huang, S. and Li, F. (2017) Global Strong Solutions to the Planar Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Large Initial Data and Vaccum. *Kinetic and Related Models*, **10**, 1035-1053. https://doi.org/10.3934/krm.2017041

[5] Ye, Y. and Li, Z. (2019) Global Strong Solution to the Cauchy Problem of 1D Compressible MHD Equations with Large Initial Data and Vacuum. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **70**, 38-58.

[6] Wu, J. and Wu, Y. (2017) Global Small Solutions to the Compressible 2D Magnetohydrodynamic System without Magnetic Diffusion. *Advances in Mathematics*, **310**, 759-888. https://doi.org/10.1016/j.aim.2017.02.013

[7] Hong, G.Y., Hou, X.F., Peng, H.Y. and Zhu, C.J. (2017) Global Existence for a Class of Large Solutions to Three-Dimensional Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Vacuum. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **49**, 2409-2441. https://doi.org/10.1137/16M1100447

[8] Xiao, L. and Lu, L. (2021) Global Strong Solution for Compressible and Radiative MHD Flow with Density-Dependent Viscosity and Degenerate Heat-Conductivity in Unbounded Domains. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **60**, Article ID: 103312.

[9] Li, J.K. and Li, M.J. (2022) Global Strong Solutions to the Cauchy Problem of the Planar Non-Resistive Magnetohydrodynamic Equations with Large Initial Data. *Differential Equations*, **316**, 136-157. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.01.041

[10] Kazhikhov, A.V. and Shelukhin, V.V. (1977) Unique Global Solution with Respect to Time of Initial-Boundary Value Problems for One-Dimensional Equations of a Viscous Gas: PMM vol. 41, n≗2, 1977, pp. 282-291. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **41**, 273-282. https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90011-9

[11] Li, J.K. and Xin, Z.P. (2020) Entropy Bounded Solutions to the One-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equations with Zero Heat Conduction and Far Field Vacuum. *Advances in Mathematics*, **361**, Article ID: 106923. https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106923

[12] Li, J.K. and Xin, Z.P. (2022) Entropy-Bounded Solutions to the One-Dimensional Heat Conductive Compressible Navier-Stokes Equations with Far Field Vacuum. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **75**, 2393-2445. https://doi.org/10.1002/cpa.22015