

双广义 Petersen 图 $DP(7,1)$ 的交叉数

白 贺

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年2月21日; 录用日期: 2023年3月16日; 发布日期: 2023年3月23日

摘 要

图的交叉数是图论的一个重要的分支, 近百年以来, 国内外诸多学者对于图的交叉数这一问题进行了广泛且深入的研究。事实上已证实确定一个图的交叉数问题是NP-完全问题。由于证明难度较大, 国内外关于图的交叉数目问题的研究进展缓慢。本文主要采用反证法研究了双广义 Petersen 图 $DP(7,1)$ 的交叉数, 给出双广义 Petersen 图 $DP(7,1)$ 的交叉数为7的一个好的画法。采用反证法, 将图 $DP(7,1)$ 的边集分为互不相交的7组, 对所有可能情形进行讨论, 从而确定交叉数的下界至少是7, 得到图 $DP(7,1)$ 的交叉数的精确值。

关键词

交叉数, 图, 画法

The Crossing Number of Double Generalized Petersen Graph $DP(7,1)$

He Bai

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Feb. 21st, 2023; accepted: Mar. 16th, 2023; published: Mar. 23rd, 2023

Abstract

The crossing number of graphs plays an important role in graph theory. In the last hundred years, many scholars have conducted extensive and in-depth research on the problem of graph crossing numbers at home and abroad. In fact, a number of scholars have proved that determining the crossing number of a graph is a NP-complete problem. Due to the difficulty of proof, scholars at home and abroad have experienced a difficult process in the field of the crossing numbers. This paper mainly studies the crossing number of double generalized Petersen graph $DP(7,1)$ and use

proof by contradiction; a drawing of a crossing number of 7 for the double generalized Petersen graph $DP(7,1)$ is given by the definition of a good drawing. Firstly, the edge sets of graph $DP(7,1)$ are divided into 7 groups that do not intersect each other; secondly, all possible cases are discussed to determine that the lower bound of the crossing number of graph $DP(7,1)$ is at least 7; finally, the exact value of the crossing number of graph $DP(7,1)$ is obtained.

Keywords

Crossing Number, Graph, Drawing

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 交叉数的研究进展

近代图论中发展了图的交叉数这一概念，交叉数是图论中的重要分支，起源于上个世纪五十年代 Turan [1]遇到的砖厂运砖这一实际问题，一经提出，不断吸引国内外众多学者研究，研究图的交叉数问题不仅在拓扑图论研究中具有不可替代的作用，同时在其它学科领域也有重要的应用，如生物工程 DNA 的图示，电子线路板设计的布线等。由于图的自身结构复杂，对于具体图类的研究绝非易事，Garey, Johnson [2]已经证证明图的交叉数问题是一个 NP-完全问题，至今，国内外也进行了许多研究，主要研究成果如下。

1.1. 完全图

上个世纪七十年代，R.K. Guy [3]首次在文献中提出关于完全图 K_n 的猜想：对于任意的 $n \geq 1$ ，有

$$Z(n) = \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor.$$

对任意实数 x ， $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数。

1969 年 R.K. Guy [4]对 $n \geq 10$ 进行了验证，目前的最优结果对于 $n = 11, 12$ 上面公式成立。

Blazek, Koman 等人 [5]在 60 年代中期的研究表明上述公式给出的是完全图 K_n 的交叉数的一个上界。即：

$$cr(K_n) \leq \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor.$$

1970 年根据 Kleitman [6]的关于完全二分图的交叉数的结果，对足够大的 n 有如下的公式成立：

$$cr(K_n) \geq n(n-1)(n-2)(n-3)/80.$$

Richter 等人得到了 K_{n-1} 与 K_n 的关系 [7] [8]：

$$cr(K_n) \geq \left\lceil \frac{n}{n-4} \cdot cr(K_{n-1}) \right\rceil.$$

2002 年 Alcholzer, Aurenhammer 和 Krasser [9]利用计算机穷举方法证明了 K_{11} 和 K_{12} 的交叉数分别为 100 和 150，并给出了 K_{13} 的交叉数为 229。

1.2. 广义 Petersen 图

不少学者就广义 Petersen 图进行了广泛的研究, 最早于 1981 年, Exoo, Harary 和 Kabel [10]证明了:

$$\begin{cases} cr(P(n,2))=0, \text{若 } n \text{ 为偶数或 } n=3; \\ cr(P(n,2))=2, \text{若 } n=5; \\ cr(P(n,2))=3, \text{若 } n \text{ 为奇数或 } n \geq 7. \end{cases}$$

1986 年 Fiorini [11]对广义 Petersen 图的交叉数进行研究, 计算出当 $n \geq 14$ 时所有图 $P(n,k)$ 的交叉数的具体值, 然而 Fiorini 的证明存在错误. 对于 $cr(P(9,3))=2$ 给出了的数学证明, 确定了 $cr(P(10,3))=4$, 并且

$$\begin{cases} cr(P(3h,3))=h, & (h \geq 4); \\ h+3 \leq cr(P(3h+1,3)) \leq h+1, & (h \geq 3); \\ cr(P(3h+2,3))=h+2, & (h \geq 2). \end{cases}$$

2002 年, Richter [12]和 Sarazin 指出 Fiorini 在证明 $C(n:\{1,3\})$ 的交叉数的下界时有漏洞, 并以 $cr(P(10,3))=6$, $cr(P(11,3))=5$, $cr(P(12,3))=4$ 为起点, 用数学归纳法重新证明并对其结论进行了更正:

$$\begin{cases} cr(P(3h,3))=h, & (h \geq 4); \\ cr(P(3h+1,3))=h+3, & (h \geq 3); \\ cr(P(3h+2,3))=h+2, & (h \geq 3). \end{cases}$$

2004 年, 林晓惠[13]在其论文中得出了 $P(4k+2,2k)$ 等部分广义 Petersen 图的交叉数的上界。

2005 年, 马登举[14]等人得到了广义 Petersen 图 $G(2m+1,m)$ 的交叉数。

2009 年, 杨元生[15]等人利用算法给出了 $n \leq 16$ 时 $P(n,k)$ 的交叉数的精确值。

Fiorini 和黄元秋[16]等人分别用不同方法证明了 $P(3k,k)$ 的交叉数。

2012 年, 周进鑫、冯衍全[17]在广义 Petersen 图的基础上, 首次提出双广义 Petersen 图的概念, 并随后证明了双广义 Petersen 图不是点传递图。

2013 年, 郑百功[18]在硕士论文中总结了其子图画法的一些性质并给出一种新的对偶图的定义, 进而按照这种对偶图的不同情况证明了 $P(10,3)$ 的交叉数的精确值为 6。

2. 双广义 Petersen 图 $DP(7,1)$ 的交叉数

2.1. 双广义 Petersen 图 $DP(7,1)$

令双广义 Petersen 图 $DP(7,1)$ 的顶点集与边集分别为: $V(DP(7,1)) = \{x_i, y_i, u_i, v_i : 0 \leq i \leq 6\}$; $E(DP(7,1)) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1} : 0 \leq i \leq 6\} \cup \{u_i v_{i+1}, v_i u_{i+1} : 0 \leq i \leq 6\}$ 。由于双广义 Petersen 图 $DP(7,1)$ 是一个简单图, 记为 G 。图 G 的一个分解是子图的列表, 使得图 G 中的每一条都恰好在其中的一个子图中。

将图 G 的边集分为 7 个互不相交的子集, 令 H_i 的顶点集与边集分别表示为

$V(H_i) = \{x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}, u_i, u_{i+1}, v_i, v_{i+1}\}$, $E(H_i) = \{x_i x_{i+1}, x_i u_i, u_i v_{i+1}, y_i y_{i+1}, y_i v_i, v_i u_{i+1}\}$, $0 \leq i \leq 6$, 可得到 $\{H_0, H_1, \dots, H_6\}$ 为图 G 的一个可传递分解。

用 $f_D(H_i)$ 表示在画法 D 下与 H_i 相关的交叉点数目函数, 如下:

$$f_D(H_i) = cr_D(H_i) + cr_D(H_i, DP(7,1) \setminus E(H_i)) / 2$$

令 D 为双广义 Petersen 图 $DP(7,1)$ 的一个好的画法, 在画法 D 下的交叉数以 $cr(D)$ 或者 $cr_D(G)$ 表示。对于 $DP(7,1)$ 的给定画法 D ,

$$cr(D) = \sum_{i=0}^6 f_D(H_i).$$

令 $C(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, u_{i+2}, v_{i+1}, u_i)$ 与 $C(y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, v_{i+2}, u_{i+1}, v_i)$ 分别表示圈 $x_i x_{i+1} x_{i+2} u_{i+2} v_{i+1} u_i x_i$ 与圈 $y_i y_{i+1} y_{i+2} v_{i+2} u_{i+1} v_i y_i$, $0 \leq i \leq 6$ 。令 $W_i = \{x_i, u_i, y_i, v_i\}$, B_i 是 W_i 诱导 $DP(7,1)$ 的子图, $B_{i,i+1} = B_i \cup B_{i+1}$ 且 $C_i = H_i \cup B_{i+1}$, $0 \leq i \leq 6$ 。

若 $0 \leq i \leq t$, 令 c 为一个正实数, 若存在一个正整数 l_i 满足 $f_D(H_{i,i-1+l_i}) \geq l_i c$, 则令 $l_c^D(H_i)$ 为使得 $f_D(H_{i,i-1+l_i}) \geq l_i c$ 成立的 l_i 的最小值, 反之若这样的 l_i 不存在, 则 $l_c^D(H_i) = +\infty$ 。

Jordan 曲线定理任意一条简单(不自交)闭曲线 J 把平面分成两个区域, 在不同区域的两点若要相连, 则连结的弧必定与 J 相交。

根据 Jordan 曲线定理, 则有以下引理:

引理 2.1 在图 G 中, 若 C 与 C' 为两个顶点不相交的圈, $P_t = u_1 u_2 \dots u_t$ 为 t 阶路径且 $V(P_t) \cap V(C) = \emptyset$, 假设 D 是图 G 的一个好的画法, 若 u_i 与 u_t 位于 $D(C)$ 所在区域边界划分平面的相同区域, 则 $cr_D(C, C')$ 为偶数; 反之若 u_i 与 u_t 位于 $D(C)$ 所在区域边界划分平面的不同区域, 那么 $cr_D(C, C')$ 为奇数, 后述记为引理 2。

2.2. 双广义 Petersen 图 $DP(7,1)$ 的交叉数上界

引理 2.2 对于双广义 Petersen 图 $DP(7,1)$ 的一个好的画法 D , 存在 $cr(D) < 7$ 。

证明: 如图 1 所示, 给出了双广义 Petersen 图 $DP(7,1)$ 的一个好的画法

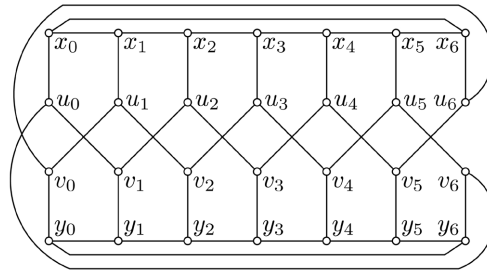


Figure 1. A good drawing of $DP(7,1)$

图 1. $DP(7,1)$ 的一个好的画法

2.3. 双广义 Petersen 图 $DP(7,1)$ 的交叉数下界

假设 D 为双广义 Petersen 图 $DP(7,1)$ 的一个好的画法, 由引理 2.2 可知 $cr(D) < 7$ 。若 $0 \leq i \leq 6$, 这里将 $l_{61/70}^D(H_i)$ 简记为 l_i^D , 显然 $DP(7,1) \setminus E(B_{i,i+1})$ 为 $DP(5,1)$ 的一个子图。

引理 2.3 $cr_D(B_{i,i+1}) + cr_D(B_{i,i+1}, DP(7,1) \setminus E(B_{i,i+1})) \leq 2$, $0 \leq i \leq 6$ 。

引理 2.4 若 $l_i^D \geq 4$, $0 \leq i \leq 6$, 则 $cr_D(C_i) = 0$ 。

证明: 反证法, 不失一般性, 假设 $cr_D(C_0) \geq 1$, 由于 $l_0^D \geq 4$, 则 $f_D(H_0) < 61/70$, $f_D(H_{0,1}) < 122/70$, $f_D(H_{0,2}) < 183/70$ 。由 $f_D(H_{0,1}) < 122/70$ 且 $cr_D(C_0) \geq 1$, 则 $cr_D(H_{0,1}) = 1$ 且 $cr_D(C_0) = 1$ 。根据 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$, 则 $cr_D(H_{0,1} \cup B_2) \leq 2$ 。在画法 D 中, 若 $C(x_0, x_1, x_2, u_2, v_1, u_0)$ 相交于

$C(y_0, y_1, y_2, v_2, u_1, v_0)$, 则由引理 2 可知 $cr_D(C(x_0, x_1, x_2, u_2, v_1, u_0), C(y_0, y_1, y_2, v_2, u_1, v_0)) = 0$, 与 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$ 相矛盾, 因此 $cr_D(C(x_0, x_1, x_2, u_2, v_1, u_0), C(y_0, y_1, y_2, v_2, u_1, v_0)) = 0$ 。

假设 $cr_D(H_{0,1} \cup B_2) = 2$, 根据 $cr_D(H_{0,1}) = 1$, 则 B_2 一定被交叉。不失一般性, 假设在 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 中 x_2u_2 被交叉, 由于 $cr_D(C(x_0, x_1, x_2, u_2, v_1, u_0), C(y_0, y_1, y_2, v_2, u_1, v_0)) = 0$ 且 D 是一个好的画法, 则 $cr_D(x_2u_2, C_0) = 1$ 。由引理 2 可知 x_2 与 u_2 在 $D(C_0)$ 所在区域边界划分平面的不同区域, 因此路径 $x_2x_3x_4u_4v_3u_2$ 相交于 C_0 至少一次, 则在 D 中 C_0 至少被交叉三次。又由引理 2.3 可知 $cr_D(B_1) + cr_D(B_1, DP(7,1) \setminus E(B_1)) \leq 2$, 因此由于 $f_D(H_0) < 61/70$, 那么路径 x_2u_2 或 $x_2x_3x_4u_4v_3u_2$ 相交于 H_0 一次, 则 $cr_D(v_1y_1, x_1u_1) = 1$ 。

由于 $cr_D(H_{0,1} \cup B_2) = 2$, $cr_D(x_2u_2, C_0) = 1$ 且 $cr_D(C_0) = 1$, 则 $cr_D(C_0, u_1v_2y_2y_1) = 0$ 。由于 $cr_D(v_1y_1, x_1u_1) = 1$ 且 $cr_D(C_0, u_1v_2y_2y_1) = 0$, 则 $D(C_0 \cup u_1v_2y_2y_1)$ 分别同构于图 2(a), 图 2(b)。若 $D(C_0 \cup u_1v_2y_2y_1)$ 同构于图 2(a), 由引理 2 可知路径 $x_0x_6u_6v_0$, $u_0v_6y_6y_0$ 相交于 $x_1u_1v_2y_2y_1v_1$ 至少各产生一个交叉, 与 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$ 相矛盾。若 $D(C_0 \cup u_1v_2y_2y_1)$ 同构于图 2(b), 由引理 2 可知路径 $x_0x_6x_5x_4x_3u_3v_2$, $u_0v_6y_6y_5y_4y_3y_2$ 相交于 $x_1u_1v_0y_0y_1v_1$ 至少各产生一个交叉, 与 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$ 相矛盾, 因此由于 $cr_D(H_{0,1} \cup B_2) \leq 2$ 且 $cr_D(C_0) = 1$, 则 $cr_D(H_{0,1} \cup B_2) = 1$ 。

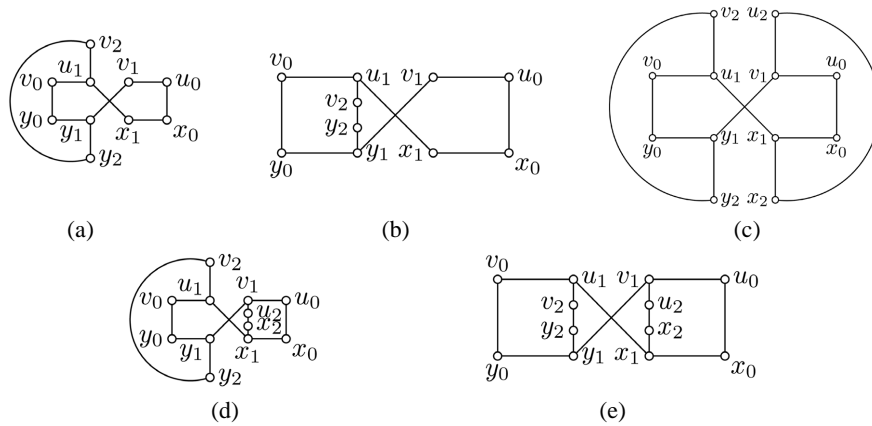


Figure 2. Good drawings of $D(C_0 \cup u_1v_2y_2y_1)$

图 2. $D(C_0 \cup u_1v_2y_2y_1)$ 的好的画法

由于 $f_D(H_0) < 61/70$ 且 $cr_D(C_0) = 1$, 不失一般性, 假设在 $D(C_0)$ 中 v_1y_1 被交叉, 若 $cr_D(v_1y_1, x_1u_1) = 1$, 则 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 分别同构于图 2(c)~(e)。若 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 同构于图 2(c), 由引理 2 可知路径 $x_0x_6u_6v_0$, $u_0v_6y_6y_0$ 同时相交于 $x_1u_1v_2y_2y_1v_1$, $u_1x_1x_2u_2v_1y_1$ 至少各产生两个交叉, 与 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$ 相矛盾。若 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 同构于图 2(d), 由引理 2 可知路径 $u_2v_3u_4v_3u_6v_0$, $x_2x_3x_4x_5u_5v_6y_6y_0$ 同时相交于 $x_1u_1v_2y_2y_1v_1$, $u_1x_1x_0u_0v_1y_1$ 至少各产生两个交叉, 与 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$ 相矛盾。若 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 同构于图 2(e), 由引理 2 可知路径 $u_2v_3y_3y_2$, $x_2x_3u_3v_2$ 同时相交于 $x_1u_1v_0y_0y_1v_1$, $u_1x_1x_0u_0v_1y_1$ 至少各产生两个交叉, 与 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$ 相矛盾, 因此 $cr_D(v_1y_1, x_1u_1) = 0$ 。由于 $cr_D(v_1y_1, x_1u_1) = 0$, 若 x_2 与 v_2 在 $D(C_0)$ 划分平面的不同区域, 由引理 2 可知路径 $u_2v_3y_3y_2$, $x_2x_3u_3v_2$ 相交于 C_0 至少各产生一个交叉。又由引理 2.3 可知 $cr_D(B_1) + cr_D(B_1, DP(7,1) \setminus E(B_1)) \leq 2$ 且 $cr_D(v_1y_1, x_1u_1) = 0$, 则 $f_D(H_0) \geq 1$, 产生矛盾, 因此 x_2 与 v_2 在 $D(C_0)$ 划分平面的相同区域。若 x_2 与 u_2 在 $D(C_0)$ 划分平面的不同区域, 由引理 2 可知路径 x_2u_2 , $x_2x_3x_4u_4v_3u_2$ 相交于 C_0 至少各产生一个交叉, 与 $f_D(H_{0,1}) < 122/70$ 相矛盾, 因此 x_2 与 u_2 在 $D(C_0)$ 划分平面的相同区域。则 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 分别同构于图 3(a)~(d)。

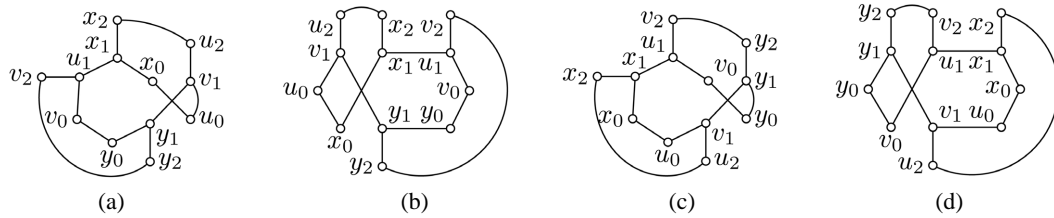


Figure 3. Good drawings of $D(H_{0,1} \cup B_2)$ with $cr_D(C_0) = 1$

图 3. $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 在 $cr_D(C_0) = 1$ 下的好的画法

若 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 同构于图 3(a), 由引理 2 可知路径 $x_0x_6x_5u_5v_6u_0$, $v_0u_6v_5u_4x_4x_3x_2$, $y_0y_6y_5y_4y_3v_3u_2$ 相交于 $H_{0,1} \cup B_2$ 至少各产生一个交叉。由引理 2.3 可知 $cr_D(B_{1,2}) + cr_D(B_{1,2}, DP(7,1) \setminus E(B_{1,2})) \leq 2$, 则路径 $x_0x_6x_5u_5v_6u_0$, $v_0u_6v_5u_4x_4x_3x_2$ 或 $y_0y_6y_5y_4y_3v_3u_2$ 最多交叉于 B_1 或者 B_2 一次, 与 $f_D(H_{0,1}) < 122/70$ 相矛盾。

若 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 同构于图 3(b), 由引理 2 可知路径 $x_0x_6u_6v_0$, $u_0v_6y_6y_0$ 相交于 $H_{0,1} \cup B_2$ 至少各产生一个交叉, 由于 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$, 则 $cr_D(x_2x_3 \cup v_2u_3, H_{0,1} \cup B_2) = 0$ 。由引理 2 可知, 若 x_3 与 u_3 位于 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 划分平面的不同区域, 则路径 x_3u_3 , $x_3x_4x_5u_5v_4u_3$ 相交于 $H_{0,1} \cup B_2$ 至少各产生一个交叉, 与 $f_D(H_{0,3}) < 244/70$ 相矛盾, 因此 x_3 与 u_3 位于 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 划分平面的相同区域, 由引理 2 可知若 x_3u_3 相交于 $H_{0,1} \cup B_2$ 至少产生两个交叉, 与 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$ 相矛盾, 则 $cr_D(x_2x_3u_3v_2, H_{0,1} \cup B_2) = 0$ 。同理可证, $cr_D(u_2v_3y_3y_2, H_{0,1} \cup B_2 \cup x_2x_3u_3v_2) = 0$, 则 $D(H_{0,2} \cup B_3)$ 同构于图 4(a)。如图 4(a)所示, 由引理 2 可知路径 $x_0x_6u_6v_0$, $u_0v_6y_6y_0$ 相交于 $v_3y_3y_2y_1v_1u_2v_3$, 由引理 2 可知若路径 $x_0x_6u_6v_0$ 相交于 $u_2v_3y_3y_2$, 则路径 $x_0x_6u_6v_0$ 相交于 $u_2v_3y_3y_2v_2u_3x_3x_2u_2$ 至少两次, 若路径 $u_0v_6y_6y_0$ 相交于 $u_2v_3y_3y_2$, 情形一致。又由于 $f_D(H_{0,1}) < 122/70$ 可知 $v_1y_1y_2$ 被路径 $u_0v_6y_6y_0$ 或 $x_0x_6u_6v_0$ 交叉最多一次, 因此路径 $x_0x_6u_6v_0$, $u_0v_6y_6y_0$ 相交于 $H_{0,2} \cup B_3$ 至少产生三个交叉。若路径 $x_0x_6u_6v_0$ 相交于 $v_1y_1y_2$ 可知 x_6 , u_6 在区域 R_2 , R_4 或 R_6 中, 由引理 2 可知路径 $x_6x_5x_4x_3$, $u_6v_5y_5y_4v_4u_3$ 相交于 $H_{0,2} \cup B_3$ 至少各产生一个交叉, 与 $f_D(H_{0,3}) < 244/70$ 相矛盾, 则路径 $u_0v_6y_6y_0$ 相交于 $y_1v_1u_2$ 。若路径 $u_0v_6y_6y_0$ 相交于 $y_1v_1u_2$, 根据引理 2 可知 v_6 , y_6 在区域 R_2 , R_4 或 R_6 中, 由引理 2 可知路径 $v_6u_5v_4u_3$, $y_6y_5v_5u_4x_4x_3$ 相交于 $H_{0,2} \cup B_3$ 至少各产生一个交叉, 与 $f_D(H_{0,3}) < 244/70$ 相矛盾。

若 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 同构于图 3(c), 由引理 2 可知路径 $v_0u_6v_5y_5y_6y_0$, $u_0v_6u_5v_4y_4y_3y_2$, $x_0x_6x_5x_4x_3u_3v_2$ 相交于 $H_{0,1} \cup B_2$ 至少各产生一个交叉。由引理 2.3 可知 $cr_D(B_{1,2}) + cr_D(B_{1,2}, DP(7,1) \setminus E(B_{1,2})) \leq 2$, 则路径 $v_0u_6v_5y_5y_6y_0$, $u_0v_6u_5v_4y_4y_3y_2$ 或 $x_0x_6x_5x_4x_3u_3v_2$ 最多交叉于 B_1 或者 B_2 一次, 与 $f_D(H_{0,1}) < 122/70$ 相矛盾。

若 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 同构于图 3(d), 由引理 2 可知路径 $x_0x_6u_6v_0$, $u_0v_6y_6y_0$ 相交于 $H_{0,1} \cup B_2$ 至少各产生一个交叉, 由于 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$, 则 $cr_D(x_2x_3 \cup v_2u_3, H_{0,1} \cup B_2) = 0$ 。由引理 2 可知, 若 x_3 与 u_3 位于 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 划分平面的不同区域, 则路径 x_3u_3 , $x_3x_4x_5u_5v_4u_3$ 相交于 $H_{0,1} \cup B_2$ 至少各产生一个交叉, 与 $f_D(H_{0,3}) < 244/70$ 相矛盾, 因此 x_3 与 u_3 位于 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 划分平面的相同区域, 由引理 2 可知若 x_3u_3 相交于 $H_{0,1} \cup B_2$ 至少产生两个交叉, 与 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$ 相矛盾, 则 $cr_D(x_2x_3u_3v_2, H_{0,1} \cup B_2) = 0$ 。同理可证, $cr_D(u_2v_3y_3y_2, H_{0,1} \cup B_2 \cup x_2x_3u_3v_2) = 0$, 则 $D(H_{0,2} \cup B_3)$ 同构于图 4(b)。如图 4(b)所示, 由引理 2 可知路径 $x_0x_6u_6v_0$, $u_0v_6y_6y_0$ 相交于 $v_3y_3y_2y_1v_1u_2v_3$, 由引理 2 可知若路径 $x_0x_6u_6v_0$ 相交于 $u_2v_3y_3y_2$, 则路径 $x_0x_6u_6v_0$ 相交于 $u_2v_3y_3y_2v_2u_3x_3x_2u_2$ 至少两次, 若路径 $u_0v_6y_6y_0$ 相交于 $u_2v_3y_3y_2$, 情形一致。又由于 $f_D(H_{0,1}) < 122/70$ 可知 $y_1v_1u_2$ 被路径 $u_0v_6y_6y_0$ 或 $x_0x_6u_6v_0$ 交叉最多一次, 因此路径 $x_0x_6u_6v_0$, $u_0v_6y_6y_0$ 相交于 $H_{0,2} \cup B_3$ 至少产生三个交叉。若路径 $x_0x_6u_6v_0$ 相交于 $y_1v_1u_2$ 可知 x_6 , u_6 在区域 R_2 , R_4 或 R_6 中, 由引理 2 可知路径 $x_6x_5x_4x_3$, $u_6v_5y_5y_4v_4u_3$ 相交于 $H_{0,2} \cup B_3$ 至少各产生一个交叉, 与 $f_D(H_{0,3}) < 244/70$ 相矛盾, 则路径 $u_0v_6y_6y_0$ 相交于 $y_1v_1u_2$ 。若路径 $u_0v_6y_6y_0$ 相交于 $y_1v_1u_2$, 根据引理 2 可知 v_6 , y_6 在区域 R_2 , R_4 或 R_6 中, 由引理 2 可

知路径 $v_6u_5v_4u_3$, $y_6y_5v_5u_4x_4x_3$ 相交于 $H_{0,2} \cup B_3$ 至少各产生一个交叉, 与 $f_D(H_{0,3}) < 244/70$ 相矛盾, 则 $cr_D(C_0) = 0$ 。

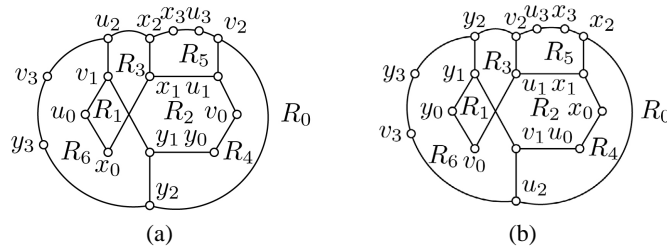


Figure 4. Good drawing of $D(H_{0,2} \cup B_3)$

图 4. $D(H_{0,2} \cup B_3)$ 的好的画法

引理 2.5 若 $l_0^D \geq 4$, $cr_D(C_0) = 0$, $cr_D(H_{0,1} \cup B_2) = 1$ 且 $cr_D(C_0, x_1x_2 \cup y_1y_2) = 1$, 则 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 同构于图 5 中的一个图。

证明: 由于 $l_0^D \geq 4$, 得到 $f_D(H_0) < 61/70$, $f_D(H_{0,1}) < 122/70$, $f_D(H_{0,2}) < 183/70$ 。因为 $cr_D(H_{0,1} \cup B_2) = 1$ 和 $H_{0,1} \cup B_2 = C_0 \cup (x_1x_2u_2v_1 \cup y_1y_2v_2u_1)$, 则 $cr_D(C_0, x_1x_2u_2v_1 \cup y_1y_2v_2u_1) + cr_D(x_1x_2u_2v_1 \cup y_1y_2v_2u_1) = 1$ 。由 $cr_D(C_0, x_1x_2 \cup y_1y_2) = 1$, 不失一般性令 $cr_D(C_0, x_1x_2) = 1$ 。由于 $cr_D(H_{0,1} \cup B_2) = 1$ 且 $cr_D(C_0, x_1x_2) = 1$, 那么 x_2 和 u_2 位于 C_0 划分平面的同一区域, v_2 和 y_2 位于 C_0 划分平面的同一区域。根据引理 2 可知, 若 x_2 与 v_2 位于 C_0 划分平面的不同区域, 则路径 $x_2x_3u_3v_2$ 交 C_0 至少产生一个交叉, 路径 $u_2v_3y_3y_2$ 交 C_0 至少产生一个交叉, 与 $f_D(H_{0,1}) < 122/70$ 相矛盾, 所以 v_2 与 x_2 位于 C_0 划分平面的同一区域。根据引理 2 可知

$cr_D(C(x_0, x_1, x_2, u_2, v_1, u_0), C(y_0, y_1, y_2, v_2, u_1, v_0)) = 0$ 。又由好的画法的定义可知 x_1x_2 只能相交于 x_0u_0 , u_0v_1 或 v_1y_1 , 则 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 同构于图 5 中的一个图。

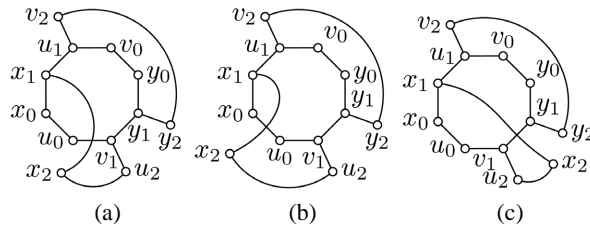


Figure 5. A good drawing of $H_{0,1} \cup B_2$ if x_1x_2 crosses $x_0u_0v_1y_1$

图 5. $H_{0,1} \cup B_2$ 在 x_1x_2 交 $x_0u_0v_1y_1$ 下的一个好的画法

引理 2.6 令 D 是一个好的画法, 若 $l_0^D \geq 5$ 且 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 同构于图 5(a), 则 $cr(D) \geq 7$ 。

证明: 反证法, 假设 $cr(D) \leq 6$ 。由于 $l_0^D \geq 5$, 得到 $f_D(H_0) < 61/70$, $f_D(H_{0,1}) < 122/70$, $f_D(H_{0,2}) < 183/70$, $f_D(H_{0,3}) < 244/70$, $f_D(H_{0,4}) < 305/70$ 。

如图 5(a) 所示, 由引理 2 可知路径 $x_0x_6u_6v_0$, $y_0y_6v_6u_0$ 交叉于 $H_{0,1} \cup B_2$, 则 $H_{0,1} \cup B_2$ 的边被交叉至少两次。又由于 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$, 则 $cr_D(v_2u_3 \cup x_2x_3, H_{0,1} \cup B_2) = 0$ 。若 x_3 与 u_3 位于 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 划分平面的不同区域, 由引理 2 可知路径 x_3u_3 , $x_3x_4x_5v_4u_3$ 相交于 $H_{0,1} \cup B_2$ 至少各产生一个交叉, 与 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$ 相矛盾, 则 x_3 与 u_3 位于 $D(H_{0,1} \cup B_2)$ 划分平面的同一区域。若 x_3u_3 相交于 $H_{0,1} \cup B_2$, 由引理 2 可知 $H_{0,1} \cup B_2$ 的边被交叉至少两次, 与 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$ 相矛盾, 则 $cr_D(x_3u_3, H_{0,1} \cup B_2) = 0$ 。

$D(H_{0,1} \cup B_2 \cup v_2 u_3 x_3 x_2)$ 同构于图 6(a)。如图 6(a)所示, 根据引理 2 可知路径 $x_0 x_6 u_6 v_0$ 相交于 $u_0 v_1 y_1 y_2 v_2 u_1 x_1 x_2$, 若 $x_0 x_6 u_6 v_0$ 相交于 $u_0 v_1 y_1 y_2 v_2$, 由引理 2 可知 $x_0 x_6 u_6 v_0$ 相交于 $u_0 v_1 y_1 y_2 v_2 u_1 x_1 x_2$ 至少产生两个交叉。同理 $y_0 y_6 v_6 u_0$ 相交于 $u_0 v_1 y_1 y_2 v_2 u_1 x_1 x_2$ 的情形完全一致。又由 $f_D(H_{0,2}) < 183/70$ 可知 $v_2 u_1 x_1 x_2$ 被路径 $x_0 x_6 u_6 v_0$ 或 $y_0 y_6 v_6 u_0$ 交叉至多一次, 从而路径 $x_0 x_6 u_6 v_0$, $y_0 y_6 v_6 u_0$ 相交于 $H_{0,1} \cup B_2 \cup v_2 u_3 x_3 x_2$ 至少三次。由 $f_D(H_{0,3}) < 244/70$, 可以得到 $cr_D(u_2 v_3 y_3 y_2, H_{0,1} \cup B_2 \cup v_2 u_3 x_3 x_2) = 0$ 和 $cr_D(y_2 y_3, u_2 v_3) = 0$, 则 $D(H_{0,2} \cup B_3)$ 同构于图 6(b)。

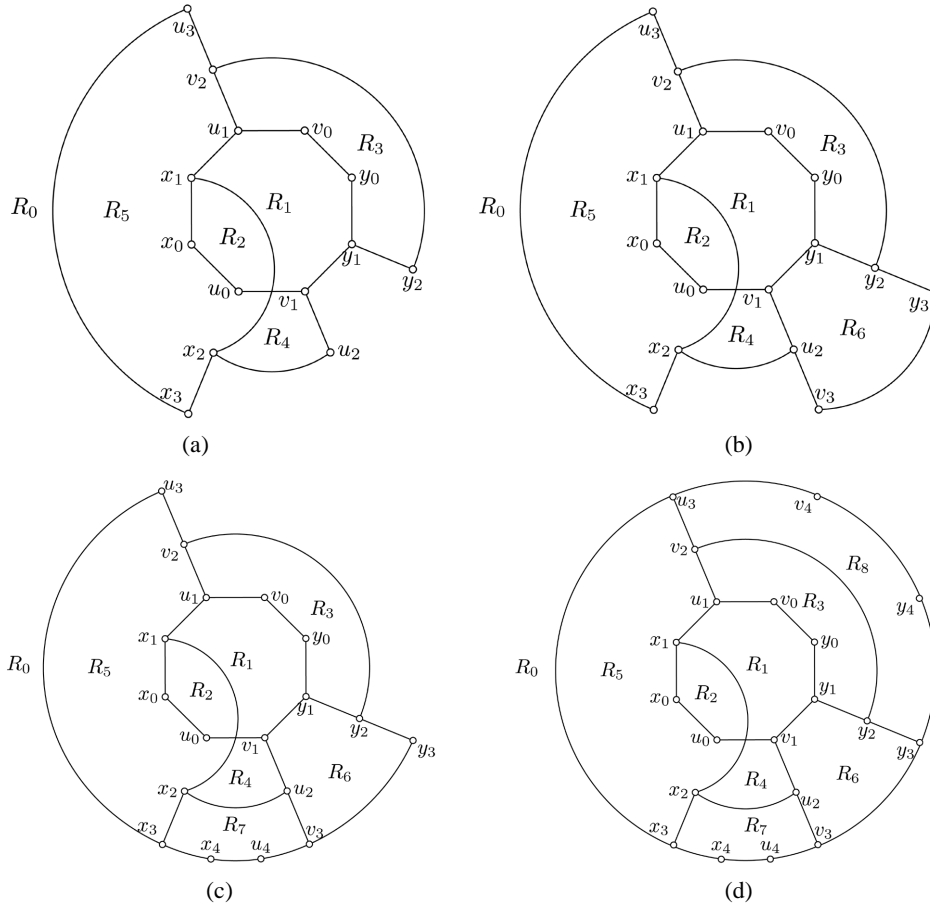


Figure 6. Sub-drawings from D with $x_1 x_2$ crosses $u_0 v_1$
图 6. 在 $x_1 x_2$ 交 $u_0 v_1$ 下 D 的子画法

如图 6(b)所示, 若 x_4 与 u_4 位于 $D(H_{0,2} \cup B_3)$ 划分平面的不同区域, 由引理 2 可知路径 $x_4 u_4$, $x_4 x_5 u_5 v_4 y_4 y_3 v_3 u_4$ 交于 $H_{0,2} \cup B_3$ 至少各产生一个交叉, 与 $f_D(H_{0,3}) < 244/70$ 相矛盾, 则 x_4 与 u_4 位于 $D(H_{0,2} \cup B_3)$ 划分平面的同一区域。如果 $x_4 u_4$ 交叉于 $H_{0,2} \cup B_3$, 由引理 2 可知 $H_{0,2} \cup B_3$ 的边被交叉至少两次, 与 $f_D(H_{0,3}) < 244/70$ 相矛盾, 因此 $cr_D(x_4 u_4, H_{0,2} \cup B_3) = 0$ 。又由于 $f_D(H_{0,3}) < 244/70$, 则 $cr_D(x_3 x_4 \cup v_3 u_4, H_{0,2} \cup B_3) = 0$, $cr_D(x_3 x_4, v_3 u_4) = 0$ 。 $D(H_{0,2} \cup B_3 \cup x_3 x_4 u_4 v_3)$ 同构于图 6(c)。

如图 6(c)所示, 由引理 2 可知路径 $x_0 x_6 u_6 v_0$, $y_0 y_6 v_6 u_0$ 相交于 $H_{0,1} \cup B_2 \cup v_2 u_3 x_3 x_2$ 至少产生三个交叉, 又由 $f_D(H_{0,3}) < 244/70$ 可知 $cr_D(u_3 v_4 \cup y_3 y_4, H_{0,2} \cup B_3) = 0$ 和 $cr_D(u_3 v_4, y_3 y_4) = 0$ 。若 $v_4 y_4$ 相交于 $C(x_2, x_3, x_4, u_4, v_3, u_2)$, 由引理 2.2 可知 $v_4 y_4$ 所在的圈 $C(y_2, y_3, y_4, v_4, u_3, v_2)$ 交于圈 $C(x_2, x_3, x_4, u_4, v_3, u_2)$ 至少产生两个交叉, 与 $f_D(H_{0,4}) < 305/70$ 相矛盾, 因此 $cr_D(v_4 y_4, C(x_2, x_3, x_4, u_4, v_3, u_2)) = 0$ 。若 v_4 和 y_4 位于

$D(H_{0,2} \cup B_3 \setminus E(x_3x_2u_2v_3))$ 划分平面的不同区域, 由引理 2 可知路径 v_4y_4 , $v_4u_5x_5x_4u_4v_5y_5y_4$ 交叉于 $H_{0,2} \cup B_3 \setminus E(x_3x_2u_2v_3)$, 则 $H_{0,2} \cup B_3 \setminus E(x_3x_2u_2v_3)$ 的边被交叉至少两次, 与 $f_D(H_{0,3}) < 244/70$ 相矛盾, 则 v_4 与 y_4 位于 $D(H_{0,2} \cup B_3 \setminus E(x_3x_2u_2v_3))$ 划分平面的同一区域。如果 v_4y_4 相交于 $H_{0,2} \cup B_3 \setminus E(x_3x_2u_2v_3)$, 由引理 2 可知 $H_{0,2} \cup B_3 \setminus E(x_3x_2u_2v_3)$ 的边被交叉至少两次, 与 $f_D(H_{0,3}) < 244/70$ 相矛盾, 则 $cr_D(v_4y_4, H_{0,2} \cup B_3 \setminus E(x_3x_2u_2v_3)) = 0$ 。 $D(H_{0,3} \cup B_4)$ 同构于图 6(d)。如图 6(d) 所示, 由引理 2 可知路径 $u_0v_6u_5v_4$ 相交于 $H_{0,3} \cup B_4$ 至少产生一个交叉, 路径 $v_0u_6x_6x_5x_4$, $y_0y_6y_5v_5u_4$ 相交于 $H_{0,3} \cup B_4$ 至少各产生两个交叉, 因此对于 D 有 $cr(D) \geq 6$ 。由假设 $cr(D) \geq 6$, 则 $cr_D(H_{0,3} \cup B_4, v_6y_6 \cup x_0x_6) = 0$, 由引理 2 可知路径 $u_0v_6u_5v_4$ 相交于 $H_{0,3} \cup B_4$ 产生一个交叉, 路径 $v_0u_6x_6x_5x_4$, $y_0y_6y_5v_5u_4$ 相交于 $H_{0,3} \cup B_4$ 各产生两个交叉。由引理 2 可知 $u_0v_6u_5v_4$ 交叉于 $v_2u_3x_3$, 则 v_6 在区域 R_5 , R_8 或 R_0 中, 下面分为三种情形讨论。

情形 1: 若 v_6 在区域 R_5 中, 由引理 2 可知 $u_0v_6u_5v_4$ 交叉于 $v_2u_3x_3$, 则 u_5 在区域 R_8 , R_5 或 R_0 中。若 u_5 在区域 R_5 中, 由引理 2 可知若 v_4u_5 相交于 v_2u_3 , 则 $D(H_{0,3} \cup B_4 \cup v_4u_5v_6u_0)$ 同构于图 7(a)。若 v_4u_5 相交于 x_3u_3 , 则 $D(H_{0,3} \cup B_4 \cup v_4u_5v_6u_0)$ 同构于图 7(b)。若 u_5 在区域 R_8 中, 由引理 2 可知 v_6u_5 相交于 v_2u_3 , 则 $D(H_{0,3} \cup B_4 \cup v_4u_5v_6u_0)$ 同构于图 7(c)。若 u_5 在区域 R_0 中, 由引理 2 可知 v_6u_5 相交于 x_3u_3 , 则 $D(H_{0,3} \cup B_4 \cup v_4u_5v_6u_0)$ 同构于图 7(d)。如图 7 所示, 由 $cr_D(H_{0,3} \cup B_4, v_6y_6) = 0$ 可知 v_6y_6 干净, 则 y_6 在区域 R_5 或 R_9 中。由 y_6 在区域 R_5 或 R_9 中, 根据引理 2 可知路径 $y_0y_6y_5v_5u_4$ 都交于 $H_{0,3} \cup B_4 \cup v_4u_5v_6u_0$ 至少产生三个交叉。

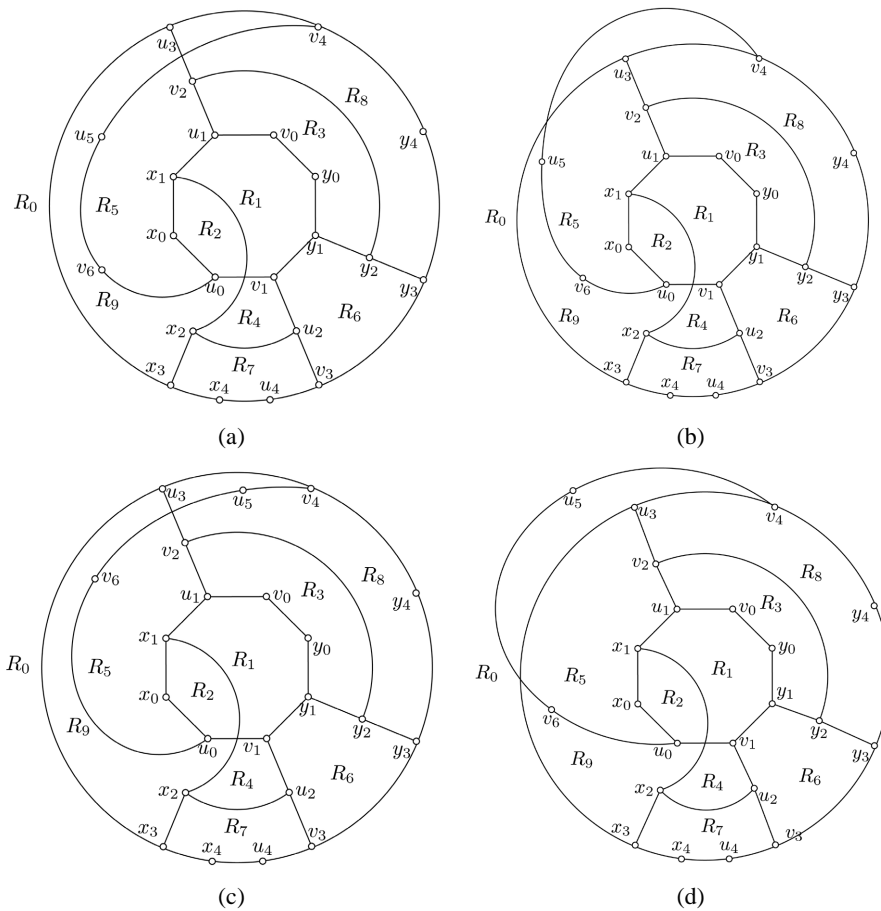


Figure 7. A good drawing of $H_{0,3} \cup B_4 \cup u_0v_6u_5v_4$

图 7. $H_{0,3} \cup B_4 \cup u_0v_6u_5v_4$ 的一个好的画法

情形 2: 若 v_6 在区域 R_8 中, 则 $D(H_{0,3} \cup B_4 \cup v_4 u_5 v_6 u_0)$ 同构于图 8(a)。如图 8(a) 所示, 由于 $cr_D(H_{0,3} \cup B_4, x_0 x_6) = 0$ 可知 $x_0 x_6$ 干净, 则 x_6 在区域 R_2 或 R_5 中。由 x_6 在区域 R_2 或 R_5 中, 根据引理 2 可知路径 $v_0 u_6 x_6 x_5 x_4$ 相交于 $H_{0,3} \cup B_4 \cup v_4 u_5 v_6 u_0$ 至少产生三个交叉。

情形 3: 若 v_6 在区域 R_0 中, 则 $D(H_{0,3} \cup B_4 \cup v_4 u_5 v_6 u_0)$ 同构于图 8(b)。如图 8(b) 所示, 由于 $cr_D(H_{0,3} \cup B_4, x_0 x_6) = 0$ 可知 $x_0 x_6$ 干净, 则 x_6 在区域 R_2 或 R_5 中。由 x_6 在区域 R_2 或 R_5 中, 根据引理 2 可知路径 $v_0 u_6 x_6 x_5 x_4$ 相交于 $H_{0,3} \cup B_4 \cup v_4 u_5 v_6 u_0$ 至少产生三个交叉。

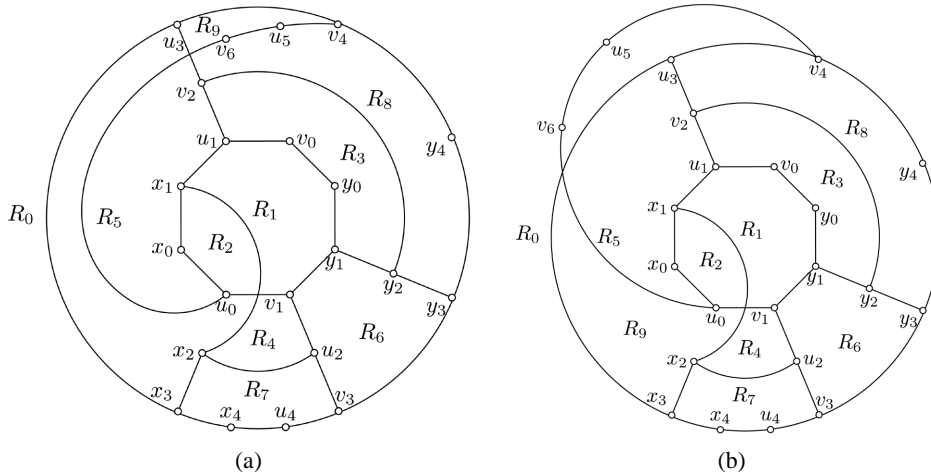


Figure 8. A good drawing of $H_{0,3} \cup B_4 \cup u_0 v_6 u_5 v_4$

图 8. $H_{0,3} \cup B_4 \cup u_0 v_6 u_5 v_4$ 的一个好的画法

3. 结论

本文主要证明图 $DP(7,1)$ 的交叉数, 给出交叉数为 7 的一个好的画法。近一步通过反证法证明了交叉数的下界, 最终证明了图 $DP(7,1)$ 在 $l_0^D \geq 5$, $cr_D(C_0) = 1$ 且 $cr_D(x_1 x_2, u_0 v_1) = 1$ 下的交叉数为 7。对于双广义 Petersen 图 $DP(2k+1,1)$, ($k \geq 3$), 证明了归纳基础 $cr_D(H_7) = 7$, 对于图 $DP(2k+1,1)$, ($k \geq 3$) 交叉数将是下一步继续研究的内容。

参考文献

- [1] Turan, P. (1997) A Note of Welcome. *Journal of Graph Theory*, **1**, 7-9. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190010105>
- [2] Garey, M.R. and Johnson, D.S. (1993) Crossing Number Is NP-Complete. *SIAM Journal on Algebraic & Discrete Methods*, **1**, 312-316. <https://doi.org/10.1137/0604033>
- [3] Guy, R.K. (1960) A Combinatorial Problem. *The Bulletin of the Malaysian Mathematical Society*, **7**, 68-72.
- [4] Guy, R.K. (1969) *Proof Techniques in Graph Theory*. Academic Press, New York.
- [5] Blazer, J and Koman, N. (1964) *Theory of Graphs and Its Applications*. Academic Press, New York.
- [6] Kieitman, D.J. (1970) The Crossing Number of $K_{5,n}$. *Combinatorial Theory (Series B)*, **9**, 315-325. [https://doi.org/10.1016/S0021-9800\(70\)80087-4](https://doi.org/10.1016/S0021-9800(70)80087-4)
- [7] Pan, S. and Richter, R.B. (2007) The Crossing Number of K_{11} Is 100. *Journal of Graph Theory*, **56**, 128-134. <https://doi.org/10.1002/jgt.20249>
- [8] Mcquillan, D., Pan, S. and Richter, R.B. (2010) On the Crossing Number of K_{13} . *Journal of Combinatorial Theory*, **115**, 224-235. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2015.06.002>
- [9] Aichholzer, O., Aurenhammer, F. and Krasser, H. (2002) On the Crossing Number of Complete Graphs. *Proceedings of the 18th Annual Symposium on Computational Geometry*, Barcelona, 5-7 June 2002, 19-24.

-
- <https://doi.org/10.1145/513400.513403>
- [10] Exoo, G., Harary, F. and Kabell, J. (1981) The Crossings of Some Generalized Petersen Graphs. *Mathematica Scandinavica*, **48**, 184-188. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-11910>
- [11] Fiorini, S. (1986) On the Crossing Number of Generalized Petersen Graph. *Discrete Mathematic*, **30**, 221-242. [https://doi.org/10.1016/S0304-0208\(08\)73140-2](https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)73140-2)
- [12] Richter, R.B. and Salazar, G. (2002) The Crossing Number of $P(N, 3)$. *Graphs and Combinatorics*, **18**, 381-394. <https://doi.org/10.1007/s003730200028>
- [13] 林晓惠. 图论中若干难题的研究[D]: [博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2004.
- [14] 马登举, 任韩, 卢俊杰. 广义 Petersen 图 $G(2m+1, m)$ 的交叉数[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2005(1): 34-39.
- [15] Lin, X.H., Yang, Y.S., Zheng, W.P., *et al.* (2009) The Crossing Number of Generalized Petersen Graphs with Small Order. *Discrete Applied Mathematics*, **157**, 1016-1023. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.01.012>
- [16] Fiorini, S. and Gauci, J.B. (2003) The Crossing Number of the Generalized Petersen Graph $P(3k, k)$. *Mathematica Bohemica*, **128**, 337-347. <https://doi.org/10.21136/MB.2003.134001>
- [17] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2012) Cubic Vertex-Transitive Non-Cayley Graphs of Order $8p$. *Electronic Journal of Combinatorics*, **19**, 453-472. <https://doi.org/10.37236/2087>
- [18] 郑百功. 冒泡排序图 B_n 和双广义 Petersen 图 $P(10, 3)$ 的交叉数[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2013.