Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(4), 1461-1466**
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124150

Hans汉斯

带有分数阶耗散的MHD方程在Besov空间的正则性准则

林　隆

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江　金华

收稿日期：2023年3月11日；录用日期：2023年4月7日；发布日期：2023年4月13日

摘　要

本文主要研究了不带密度且速度场带有分数阶耗散的三维MHD流体方程组在齐次Besov空间中的一个正则性准则。证明了当方程组(1.1)的弱解(u,b)满足条件(2.1)时，方程组(1.1)在$(0,T]$上是正则的。

关键词

MHD流体方程组，齐次Besov空间，分数阶耗散，正则性准则

Regularity Criteria for MHD Equations with Fractional Laplacian Dissipation in Besov Spaces

Long Lin

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 11th, 2023; accepted: Apr. 7th, 2023; published: Apr. 13th, 2023

Abstract

In this paper, we study the regularity criterion for 3D MHD equations without density and with fractional dissipation in homogeneous Besov space. It is proved that when the weak solution of equations (1.1) satisfies condition (2.1), equations (1.1) is regular on $(0,T]$.

文章引用: 林隆. 带有分数阶耗散的 MHD 方程在 Besov 空间的正则性准则[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1461-1466.
DOI: 10.12677/aam.2023.124150

Keywords

MHD Equations, Homogeneous Besov Space, Fractional Laplacian Dissipation, Regularity Criteria

1. 引言

本文我们考虑了在 $\mathbb{R}^3$ 空间中带有速度分数阶耗散的非齐次不可压磁流体方程组(MHD)的正则性问题：

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u + \mu\Lambda^{2\alpha} u + \nabla\Pi = b\cdot\nabla b, \\ \partial_t b + u\cdot\nabla b + \sigma\Lambda^{2\beta} b = b\cdot\nabla u, \\ \operatorname{div} u = 0, \operatorname{div} b = 0, \\ (u,b)\big|_{t=0} = (u_0, b_0). \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 u 表示速度场，b 表示磁场，$\Pi = (x,t)$ 表示压强。正常数 μ,σ 分别表示粘性系数和磁扩散系数。$(\alpha,\beta)\in[0,2]^2$，Zygmund 算子 $\Lambda = \sqrt{-\Delta}$ 通过 Fourier 变换定义为

$$\mathcal{F}\left(\Lambda^{2\alpha} f\right)(\xi) = |\xi|^{2\alpha}\hat{f}(\xi),\ \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-i\langle x|\xi\rangle} f(x)\mathrm{d}x.$$

经典磁流体方程描述了诸如液态金属、等离子体、电解质等导电流体的运动。此方程在天体物理学，工程学等一系列重要领域中发挥着重要作用。

当方程组(1.1)中 $b=0$ 时，我们发现磁流体方程就退化成我们所熟悉的 Navier-Syokes 方程组。国内外已经有了关于 Navier-Stokes 方程适定性问题的研究的丰富文献，具体可参考[1] [2] [3]。跟 Navier-Stokes 方程大初值适定性问题的发展历程类似，MHD 方程的大初值适定性问题被许多学者所研究。Abidi，Paicu [4]在临界 Besov 空间中得到了在小初值的条件假设下 MHD 方程的强解的全局适定性。随后，Zhai 等人在文献[5]中改善了文献[4]中的小初值条件，在只需要水平速度场和水平磁场初值小的情况下，他们得到了 MHD 方程的全局适定性。关于 MHD 方程的其他适定性问题，可以参考文献[6] [7]。

关于 MHD 方程的数学研究也包括了弱解的正则性。目前，关于 MHD 方程组(1.1)中在幂次 α 和 β 受限时：1) $\alpha>0,\beta=1$；2) $\alpha=0,\beta>1$；3) $\alpha=2,\beta=0$，MHD 方程拥有全局正则性。具体参考文献[8] [9] [10]。据我们所知，除上述情形外，其余情形是否存在全局正则解仍是未知的。其他关于 MHD 方程的正则性问题，请参考文献[11] [12]。受文献[14]在 Besov 空间中研究 Micropolar 方程的正则性准则和文献[15]研究带有分数耗散的 Boussinesq 方程的正则性准则的启发，本文考虑了当 $0<\alpha<1/2,\beta=1$ 时：

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u + \mu\Lambda^{2\alpha} u + \nabla\Pi = b\cdot\nabla b, \\ \partial_t b + u\cdot\nabla b - \sigma\Delta b = b\cdot\nabla u, \\ \operatorname{div} u = 0, \operatorname{div} b = 0, \\ (u,b)\big|_{t=0} = (u_0, b_0). \end{cases} \tag{1.2}$$

(1.2)方程组的对数型正则性准则，我们的主要的结论如下。

2. 主要定理

定理 2.1 设方程(1.2)的初值 $(u_0,b_0)\in\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\times\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$，$(u,b)$ 是 MHD 方程组的一组弱解。若 (u,b)

满足

$$\int_0^T \frac{\|\nabla u\|_{\dot{B}^{-\gamma}_{\infty,\infty}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}} + \|\nabla b\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)} \mathrm{d}t < \infty. \tag{2.1}$$

其中 $0<\gamma<2\alpha$，则弱解在区间 $(0,T]$ 上是正则的。

3. 预备知识

首先我们回顾齐次 Besov 空间的定义。

定义 3.1 设 $(p,r)\in[1,\infty)^2$， $s\in\mathbb{R}$ 。所有在 $S_h'(\mathbb{R}^3)$ 中的分布函数 u 组成齐次 Besov 空间：$\dot{B}^s_{p,r}$，其中 $u\in S_h'$ 满足 $\lim_{j\to-\infty}\|S_j u\|_{L^\infty}=0$ 。齐次 Besov 空间的范数为：

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} = \left\|\left(2^{js}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^p}\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^r(\mathbb{Z})}.$$

我们再给出分数阶 MHD 方程的弱解的定义。

定义 3.2 设方程(1.2)的初值 $(u_0,b_0)\in L^2(\mathbb{R}^3)\times L^2(\mathbb{R}^3)$。若作用在 $\mathbb{R}^3\times(0,T]$ 上的 (u,b) 满足

1) $u\in L^\infty\left(0,T;L^2(\mathbb{R}^3)\right)\cap L^2\left(0,T;\dot{H}^\alpha(\mathbb{R}^3)\right)$， $b\in L^\infty\left(0,T;L^2(\mathbb{R}^3)\right)\cap L^2\left(0,T;\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\right)$；

2) (u,b) 在分布意义下满足 (1)，即对 $\forall\phi,\varphi\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\times(0,T)\right)$，都有等式

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left(u_t+u\cdot\nabla u+\mu\Lambda^{2\alpha}u+\nabla\Pi\right)\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(b\cdot\nabla b)\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

和

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\left(b_t+u\cdot\nabla b-\sigma\Delta b\right)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(b\cdot\nabla u)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

则我们称 (u,b) 为三维 MHD 方程组(1.1)的弱解。

引理 3.1 ([13]) 设 $1\le q<p<\infty$， α 是一个正实数。则存在一个常数 C，使得

$$\|u\|_{L^p}\le C\|u\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}}^{1-\theta}\|u\|_{\dot{B}^{\beta}_{q,q}}^{\theta}$$

其中 $\beta=\alpha\left(\frac{p}{q}-1\right)$ 和 $\theta=\frac{q}{p}$ 。

注：从上述引理可知，当 $q=2,p=3$ 时，我们有

$$\|u\|_{L^3}\le C\|u\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}}^{\frac{1}{3}}\|u\|_{\dot{H}^{\frac{\gamma}{2}}}^{\frac{2}{3}}. \tag{3.1}$$

当 $q=2,p=4,\beta=1$ 时，则 $\alpha=1$，且有不等式

$$\|u\|_{L^4}\le C\|u\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

4. 主要定理证明

首先，我们在方程$(1.2)_1$两边同时作用 ∇，再与 ∇u 作内积后有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\mu\left\|\Lambda^{1+\alpha}u\right\|_{L^2}^2=-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(u\cdot\nabla u)\cdot\nabla u\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(b\cdot\nabla b)\cdot\nabla u\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

对方程$(1.2)_2$两边同时作用∇，再与∇u作内积后有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla b\|_{L^2}^2+\sigma\|\Delta b\|_{L^2}^2=-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(u\cdot\nabla b)\cdot\nabla b\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(b\cdot\nabla u)\cdot\nabla b\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

现将(4.1)，(4.2)相加后有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)+\mu\|\Lambda^{1+\alpha}u\|_{L^2}^2+\sigma\|\Delta b\|_{L^2}^2\\&=-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(u\cdot\nabla u)\cdot\nabla u\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(b\cdot\nabla b)\cdot\nabla u\mathrm{d}x\\&\quad-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(u\cdot\nabla b)\cdot\nabla b\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(b\cdot\nabla u)\cdot\nabla b\mathrm{d}x\\&=K_1+K_2+K_3+K_4.\end{aligned} \tag{4.3}$$

对于K_1，因为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(u\cdot\nabla u)\cdot\nabla u\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u:\nabla u)\cdot\nabla u\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\nabla\nabla u)\cdot\nabla u\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u:\nabla u)\cdot\nabla u\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

同理，我们也能通过同样的计算来处理K_2，K_3，K_4。

对于K_1，利用估计式(3.1)，Hölder 不等式，Young 不等式和插值不等式有

$$\begin{aligned}K_1&\le\left|\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u:\nabla u)\cdot\nabla u\mathrm{d}x\right|\\&\le\|\nabla u\|_{L^3}^3\\&\le\|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\gamma}}\|\nabla u\|_{\dot{H}^{\frac{\gamma}{2}}}^2\\&\le\|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\gamma}}\|\nabla u\|_{L^2}^{2-\frac{\gamma}{\alpha}}\|\Lambda^{1+\alpha}u\|_{L^2}^{\frac{\gamma}{\alpha}}\\&\le C\|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{\mu}{4}\|\Lambda^{1+\alpha}u\|_{L^2}^2\\&\le C\frac{\|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}}}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\|\nabla u\|_{L^2}^2\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)\right)+\frac{\mu}{4}\|\Lambda^{1+\alpha}u\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

其中$0<\gamma<2\alpha$。同样的，对于K_2，利用估计式(3.2)，我们有

$$\begin{aligned}K_2&\le\left|\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla b:\nabla b)\cdot\nabla u\mathrm{d}x\right|\\&\le C\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla b\|_{L^4}^2\\&\le C\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla b\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}}\|\nabla b\|_{\dot{H}^1}\\&\le C\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla b\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}}^2+\frac{\sigma}{4}\|\Delta b\|_{L^2}^2\\&\le C\frac{\|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\|\nabla u\|_{L^2}^2\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)\right)+\frac{\sigma}{4}\|\Delta b\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

我们需要指出的是K_3与K_4的估计与K_2的估计相同。接下来我们将K_1，K_2，K_3，K_4的估计代入(4.3)中有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)+\mu\left\|\Lambda^{1+\alpha}u\right\|_{L^2}^2+\sigma\|\Delta b\|_{L^2}^2 \\
&\le C\frac{\|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}}}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\|\nabla u\|_{L^2}^2\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)\right)+\frac{\mu}{4}\left\|\Lambda^{1+\alpha}u\right\|_{L^2}^2 \\
&\quad +C\frac{\|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\|\nabla u\|_{L^2}^2\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)\right)+\frac{\sigma}{4}\|\Delta b\|_{L^2}^2 \\
&\le C\frac{\|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}}+\nabla b_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)\right).
\end{aligned}
$$

即我们有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)\le C\frac{\|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}}+\|\nabla b\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)\right).
$$

对于上式，我们可以运用 Gronwall 不等式得到

$$
\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\le\left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\nabla b_0\|_{L^2}^2\right)\exp\left\{C\int_0^T\frac{\|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}}+\|\nabla b\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)\right)\mathrm{d}t\right\}.
$$

我们可以确定上式中的指数函数是大于 1 的，所以再次利用上式，我们不难得出

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right) \\
&\le\ln\left(e+\|u_0\|_{\dot{H}^1}^2+\|b_0\|_{\dot{H}^1}^2\right)+C\int_0^T\frac{\|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}}+\|\nabla b\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

对于上式，我们再次运用 Gronwall 不等式，可以得到

$$
\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)\le C\left(u_0,b_0\right)\exp\left\{C\int_0^T\frac{\|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2\alpha}{2\alpha-\gamma}}+\|\nabla b\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\mathrm{d}t\right\}.
$$

由条件(2.1)我们得出结论

$$
\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\right)<\infty.
$$

5. 总结

由于 MHD 方程在物理学中有极重要的地位，所以站在数学的角度上来研究 MHD 方程解的适定性与解的性质是十分有必要的。对于正则性问题，目前众多学者的研究工作主要集中在保证弱解正则性的基础上，寻找更弱的附加条件。这是一个具有挑战性的开放问题。本文旨在更具有优势的空间：Besov 空

间中来研究 MHD 方程对数型正则性准则，丰富了此研究领域的研究成果。

参考文献

[1] Abidi, H. and Paicu, M. (2007) Existence globale pour un fluide inhomogene. *Annales de l'institut Fourier*, **57**, 883-917. https://doi.org/10.5802/aif.2280

[2] Paicu, M. and Zhang, P. (2012) Global Solutions to the 3-D Incompressible Inhomogeneous Navier-Stokes System. *Journal of Functional Analysis*, **262**, 3556-3584. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2012.01.022

[3] Qian, C.Y. and Zhang, P. (2021) Global Well-Posedness of 3-D Incompressible Inhomogeneous Navier-Stokes Equations. *Methods and Applications of Analysis*, **28**, 507-546. https://doi.org/10.4310/MAA.2021.v28.n4.a6

[4] Abidi, H. and Paicu, M. (2008) Global Existence for the Magnetohydrodynamic System in Critical Spaces. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, **138**, 447-476. https://doi.org/10.1017/S0308210506001181

[5] Zhai, X.P., Li, Y.S. and Yan, W. (2015) Global Well-Posedness for the 3-D Incompressible Inhomogeneous MHD System in the Critical Besov Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **432**, 179-195. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.06.048

[6] Chen, Q., Tan, Z. and Wang, Y.J. (2011) Strong Solutions to the Incompressible Magnetohydrodynamic Equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **34**, 94-107. https://doi.org/10.1002/mma.1338

[7] Gui, G. (2014) Global Well-Posedness of the Two-Dimensional Incompressible Magnetohydrodynamics System with Variable Density and Electrical Conductivity. *Journal of Functional Analysis*, **267**, 1488-1539. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.06.002

[8] Cao, C., Wu, J. and Yuan, B. (2014) The 2D Incompressible Magnetohydrodynamics Equations with Only Magnetic Diffusion. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **46**, 588-602. https://doi.org/10.1137/130937718

[9] Fan, J., Malaikah, H., Monaquel, S., Nakamura, G. and Zhou, Y. (2014) Global Cauchy Problem of 2D Generalized MHD Equations. *Monatshefte für Mathematik*, **175**, 127-131. https://doi.org/10.1007/s00605-014-0652-0

[10] Jiu, Q. and Niu, D. (2006) Mathematical Results Related to a Two-Dimensional Magneto-Hydrodynamic Equations. *Acta Mathematica Scientia. Series B. English Edition*, **26**, 744-756. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(06)60101-X

[11] Tran, C.V., Yu, X. and Zhai, Z. (2013) Note on Solution Regularity of the Generalized Magnetohydrodynamic Equations with Partial Dissipation. *Nonlinear Analysis*, **85**, 43-51. https://doi.org/10.1016/j.na.2013.02.019

[12] Wu, J. (2011) Global Regularity for a Class of Generalized Magnetohydrodynamic Equations. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **13**, 295-305. https://doi.org/10.1007/s00021-009-0017-y

[13] Heywood, J.G. (1980) The Navier-Stokes Equations: On the Existence, Regularity and Decay of Solution. *Indiana University Mathematics Journal*, **29**, 639-681. https://doi.org/10.1512/iumj.1980.29.29048

[14] He, B.B. (2021) Regularity Criteria of Weak Solutions to the 3D Micropolar Fluid Equations. *Advances in Applied Mathematics*, **10**, 3039-3044. https://doi.org/10.12677/AAM.2021.109318

[15] Le, A.T. (2021) The Logarithmic Regularity Criteria for Velocity of Boussinesq Equations with Fractional Laplacian Dissipation. *Advances in Applied Mathematics*, **10**, 2917-2922. https://doi.org/10.12677/AAM.2021.109305