Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(4), 1483-1486
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124153

不含平衡圈的符号图的分解

朱晨波

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年3月13日；录用日期：2023年4月9日；发布日期：2023年4月19日

摘 要

本文主要在符号图框架拟阵的定义下，通过证明所含的圈中没有平衡圈的符号图G上的参数$\beta(M)=max_{\varnothing\neq X\subseteq E}\frac{|X|}{r_M(X)}$大于等于$\frac{1}{2}mad(G)$，从而证明在$k=1$，以及任意的非负整数$d$的条件下，不含平衡圈的符号图能分解成两个独立集$B_1$和$I$，且$I$在$G$中导出图$G[I]$中顶点最大度为$d$。

关键词

符号图，拟阵，图的分解，最大平均度

Decomposition of Signed Graphs without Contain Balanced Cycle

Chenbo Zhu

School of Mathematical Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 13th, 2023; accepted: Apr. 9th, 2023; published: Apr. 19th, 2023

Abstract

In this paper, we study the signed graph based on the frame matroid. For the signed graph G without contains any balanced cycle, we prove the parameter $\beta(M)=max_{\varnothing\neq X\subseteq E}\frac{|X|}{r_M(X)}$ is greater than $\frac{1}{2}mad(G)$, then we prove when $k=1$ and any positive integers d, the signed graph G without contains any balanced cycle can decompose into two independent sets B_1 and I, the degree of vertex in the induced graph $G[I]$ is at most d.

文章引用: 朱晨波. 不含平衡圈的符号图的分解[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1483-1486.
DOI: 10.12677/aam.2023.124153

Keywords

Signed Graphs, Matroids, Decomposition of Graphs, Maximum Average Degree

1. 基本概念

在本文中，我们只研究有限图，所研究的有限图中允许存在平行边但不存在环，给定一个图 G，我们用 $V(G)$ 来定义图 G 的顶点集，用 $E(G)$ 来定义图 G 的边集。令 $v(G)=|V(G)|$ 是图 G 中顶点的个数，$e(G)=|E(G)|$ 是图 G 中的边的个数。如果 X 是顶点集 $V(G)$ 的子集，则用 $G[X]$ 来表示是 G 的由顶点集 X 所导出的导出子图，以及 $G-X$ 是图 G 通过删去顶点集 X 后得到的子图。如果 S 是一组边集，则边导出子图 $G[S]$ 是指 G 的一个子图且它的边集是 S，顶点集合是由所有 S 中的边的端点所构成的。

用 $N_G(v)$ 定义为所有 v 的邻点的集合，$E_G(v)$ 是所有与 v 相关联的边的集合，令 $d_G(v)$ 表示 v 的度，我们有 $d_G(v)=|E_G(v)|$。

给定一个图 G，图 G 的分解组成了所有边不交的子图使得它们的并是 G。图 G 的荫度是指最小数目的森林需要去分解图 G 的。图 G 的分数荫度定义如下：

$$\Gamma_f(G)=\max_{H\subseteq G,v(H)>1}\frac{e(H)}{v(H)-1}.$$

一个符号图 (G,σ)，它是由一个基础图 $G=(V(G),E(G))$ 和一个映射 σ 组成。这个映射满足 $\sigma:E(G)\to\{+1,-1\}$，它是 G 的边集映到 $\{+1,-1\}$ 的有序对。设 e 为图 G 的一条边，当 $\sigma(e)=1$ 时称 e 为正边，当 $\sigma(e)=-1$ 时称 e 为负边。如果符号图 (G,σ) 中的一个圈包含偶数条负边，则称这个圈为平衡圈，如果它包含奇数条负边，则称这个圈为非平衡圈。有时候平衡圈被称为正圈而非平衡圈也被称为负圈。

下面我们介绍一些拟阵的相关性质。拟阵的性质在很多场合都有用到，尤其是在组合领域。给定一个有限集 E，E 上的一个遗传系统 M 是由 2^E 的子集的集合 I_M 组成，I_M 中的每个元素都是 2^E 的一个子集。我们称 I_M 是拟阵 M 上的一个独立集，并且 2^E-I_M 中的任何集合都不是独立集。记 B_M 是所有基的集合(基指的是最大独立集)。记 C_M 是所有最小非独立集的集合。若 $X\subseteq E$，用 $r_M(X)$ 表示为集合 X 的秩函数，它代表 X 中所包含的最大独立集的个数。

一个 E 中的元素 e 被称为环，如果它不出现在任何独立集中。在这篇文章中所讨论的拟阵都是无环的。对于 E 上的拟阵 M，下面的两个参数是我们主要感兴趣的：

$$\beta(M)=max_{\varnothing\neq X\subseteq E}\frac{|X|}{r_M(X)},\varphi(M)=min_{r_M(X)<r(M)}\frac{|E|-|X|}{r_M(E)-r_M(X)}$$

令 $X=E$ 且 $X\neq\varnothing$，我们能得到 $\beta(M)\geq\frac{|E|}{r(M)}\geq\varphi(M)$。以下两个定理已经被学者 Edmonds 证明了。

定理 1.1 ([1])对于 E 上的拟阵 M，它的独立集的并能覆盖 E 的最小数目为 $\beta(M)$。

定理 1.2 ([2])对于 E 上的拟阵 M，E 上含有最大的不相交的基的数目为 $\varphi(M)$。

下面我们回到图论上，给出一个图 G 最大平均度的定义，图 G 的最大平均度数 $mad(G)$ 定义如下：

$$mad(G)=max_{H\subseteq G}\frac{2e(H)}{v(H)}$$

其中 H 是 G 的子图。

下面的定理是我们所熟知的。

定理 1.3 ([3])令 G 是一个图，则存在 G 的一个定向 σ 使得 $\Delta^{+}(G^{\sigma})\le k$ 当且仅当 $mad(G)\le 2k$。

推论 1.4 对任何图 G，如果 $mad(G)\le 2k$，则 G 可以分解成 k 个伪森林。

一个伪树是一个连通图且包含至多一个圈的，一个图是一个伪森林是指它的每个连通分支中包含至多一个圈，在文献[4]中证明了如下伪森林分解的类九龙树猜想。

定理 1.5 ([4])对于任意的非负整数 k,d，如果 G 是一个图且满足 $mad(G)\le 2k+\frac{2d}{k+d+1}$，则 G 可以分解成 $k+1$ 个伪森林，且其中一个伪森林它的顶点最大度为 d。

2. 主要定理

本文主要证明的定理如下：

定理 2.1 对 $k=1$ 和任意的非负整数 d，令 G 是所含圈中不含平衡圈的连通符号图。M 是 $E(G)$ 上的一个框架拟阵。若它的边集满足 $\beta(M)=max_{\varnothing\ne X\subseteq E}\frac{|X|}{r_M(X)}\le 1+\frac{d}{d+2}$，则 G 能分解成两个独立集 B_1 和 I，且 I 在 G 中的导出图 $G[I]$ 的顶点最大度为 d。

3. 主要定理证明

在这一章节中我们证明定理 2.1，我们先给出符号图上框架拟阵的定义：

定义 3.1 对于符号图 (G,σ) 的边集 E，E 上的框架拟阵 (E,I_M) 定义如下：它的独立集是指它的每个连通分支中至多包含一个圈，且如果恰好包含一个圈，则这个圈一定是非平衡圈。

下面我们开始证明定理 2.1。

证明采用反证法，假设定理 2.1 是不正确的，令 G 是一个顶点极小反例。若 G 中至多含有一个非平衡圈，这种情况已经在文献[5]中被证明。下面我们证明 G 中至少存在两个非平衡圈的情况。首先我们能证明如下的定理。

定理 3.1 对于 G 中的任意一个基 B，都满足 B 中包含一个非平衡圈。

在证明上述定理之前，我们可以得到如下引理。

引理 3.2 G 的边集能分解成一个基 B_1 和一个独立集 I。

这个引理的证明已经在文献[5]中被证明。下面我们回过头来证明定理 3.1。

定理 3.1 的证明假设 $G[B_1]$ 中不包含非平衡圈，因为 G 中至少包含两个非平衡圈，并且 G 中不含平衡圈，则存在一条边 $e\in G[I]=G-G[B_1]$，使得 $G[B_1]+e$ 中至多包含一个非平衡圈，因此 $G[B_1]+e$ 还是一个独立集，但 $|G[B_1]+e|>|G[B_1]|$，这与 B_1 是一个基矛盾。这就完成了定理 3.1 的证明。

下面我们开始证明定理 2.1。对于这个定理的证明，我们需要用到定理 1.3 的 $k=1$ 的特殊情况。

引理 3.3 令 G 是一个图，则存在一个 G 的定向 σ 使得 $\Delta^{+}(G^{\sigma})\le 1$ 当且仅当 $mad(G)\le 2$。

我们首先证明它满足 $mad(G)\le 2$ 这个条件。

假设我们找了一个子图 H，且有 $\beta(M)=\frac{|H|}{r_M(H)}$，则我们能得到这个子图 H 一定是连通的。假设 H 不连通，因为 G 是一个连通图，则存在边 $e\in G-H$，使得 $H+e$ 这个子图有 $\frac{|H+e|}{r_M(H+e)}\ge\frac{|H|}{r_M(H)}$。这样我们

就得到了一个子图 $H+e$，使得 $\frac{|H+e|}{r_M(H+e)}=\frac{|H|}{r_M(H)}$。如果 $\frac{|H+e|}{r_M(H+e)}>\frac{|H|}{r_M(H)}$，这就矛盾于我们选择 $\beta(M)=max_{\varnothing\neq X\subseteq E}\frac{|X|}{r_M(X)}=\frac{|H|}{r_M(H)}$。因此如果我们选择了一个不连通的子图 H，则通过增加一条边 $e\in G-H$ 使得 $H+e$ 这个子图满足 $\beta(M)=max_{\varnothing\neq X\subseteq E}\frac{|X|}{r_M(X)}=\frac{|H+e|}{r_M(H+e)}=\frac{|H|}{r_M(H)}$，如果 $H+e$ 是连通图，则它就是我们想要的，如果 $H+e$ 不连通，则继续通过加边的方式使得新得到的子图的参数是等于 $\frac{|H|}{r_M(H)}$，每经过一次这个过程，子图的连通分支数就会少 1，不断重复上述过程最后能得到一个连通的子图。

下面我们通过对 H 中是否包含非平衡圈来证明 $mad(G)\leq 2\beta(M)$。如果 H 中不包含非平衡圈，那么 H 中就无圈，因为 G 是不含平衡圈的图，则我们有 H 是一棵树，所以 $\beta(M)=\frac{|H|}{r_M(H)}=\frac{e(H)}{v(H)-1}=1$。如果 H 中包含非平衡圈，则 H 中至少包含一个非平衡圈，我们有 $\beta(M)=\frac{|H|}{r_M(H)}=\frac{e(H)}{v(H)}\geq 1$。又因为我们假设 G 中至少包含两个非平衡圈且 $r_M(H)\leq v(H)$，可以得到 $2\beta(M)\geq mad(G)$。

我们知道定理 2.1 中的条件 $\beta(M)\leq 1+\frac{d}{d+2}$，则有 $mad(G)\leq 2\beta(M)\leq 2+\frac{2d}{d+2}$，我们忽视符号图 G 中边的符号，由引理 3.3 可以得到存在 G 的一个定向 σ 使得 $\Delta^+(G^\sigma)\leq 1$。通过定理 1.5 的得到的特殊情况如下：

引理 3.4 对于 $k=1$ 以及任意的非负整数 d，如果 G 是一个图且满足 $mad(G)\leq 2+\frac{2d}{d+2}$，则 G 可以分解成 2 个伪森林，且其中一个伪森林它的顶点最大度为 d。

由引理 3.4 知道 G 能分解成 2 个伪森林且其中一个伪森林中顶点的最大度为 d。回想起我们在定理 2.1 中对符号图的限制可得，符号图中是不含平衡圈的，因此在忽视符号的图 G 中加上边集的符号之后会发现，对于符号图 (G,σ)，它的每个连通分支中至多含有一个圈，且如果含有一个圈，这个圈一定是非平衡圈不可能是平衡圈，这就结束了证明。

4. 结语

在图论中，对森林分解方向的研究，很多学者做出了杰出的贡献，但对于不同的拟阵，在不同的图类上的分解研究还值得进一步探讨。本文给出了在符号图的框架拟阵下，通过应用伪森林类似的九龙树猜想，来证明符号图上框架拟阵下，不含平衡圈的符号图能分解成两个独立集 B_1 和 I，且 I 在 G 中导出图 $G[I]$ 中顶点最大度为 d，对于把 k 拓展成任意的非负整数后的研究是值得进一步探讨的问题。

参考文献

[1] Edmonds, J. (1965) Minimum Partition of a Matroid into Independent Subsets. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, *Section B*, **69B**, 67-72. https://doi.org/10.6028/jres.069B.004

[2] Edmonds, J. (1965) Lehman's Switching Game and a Theorem of Tutte and Nash-Williams. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, *Section B*, **69B**, 73-77. https://doi.org/10.6028/jres.069B.005

[3] Kierstead, H.A. and Yang, D. (2005) Very Asymmetric Marking Games. *Order*, **22**, 93-107. https://doi.org/10.1007/s11083-005-9012-y

[4] Fan, G., Li, Y., Song, N. and Yang, D. (2015) Decomposing a Graph into Pseudoforests with One Having Bounded Degree. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **115**, 72-95. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2015.05.003

[5] 方旭倩. 强九龙树猜想及九龙树定理的推广研究[D]: [硕士学位论文]. 金华: 浙江师范大学, 2021.