Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(4), 1496-1503
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124155

全测地黎曼叶状结构中的 Hopf-Rinow 定理

隗世玲

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023 年 3 月 13 日；录用日期：2023 年 4 月 9 日；发布日期：2023 年 4 月 19 日

摘 要

本文研究全测地黎曼叶状结构中关于广义 Bott 联络的测地线理论, 并将部分 Hopf-Rinow 定理推广到全测地黎曼叶状结构上. 它已被推广到一般的可求长的度量空间和伪厄米流形上. 在我们研究的过程中, 高斯引理的不成立带来了一些困难. 从而我们引入了自然距离 δ, 并得到若 (M, δ) 完备则测地线完备. 但由于条件的局限性, 另一面不成立.

关键词

全测地，黎曼叶状结构，广义 Bott 联络，Hopf-Rinow 定理

Hopf-Rinow Theorem on Totally Geodesic Riemannian Foliations

Shiling Wei

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 13^{th}, 2023; accepted: Apr. 9^{th}, 2023; published: Apr. 19^{th}, 2023

Abstract

In this paper, we study the theory of geodesics with respect to the generalized Bot-

文章引用: 隗世玲. 全测地黎曼叶状结构中的 Hopf-Rinow 定理 [J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1496-1503.
DOI: 10.12677/aam.2023.124155

t connection on totally geodesic Riemannian foliations, and part of the Hopf-Rinow theorem is generalized to totally geodesic Riemannian foliations. It has been generalized to length-metric spaces and pseudo-Hermitian manifolds. In the course of our research, the invalidity of Gauss lemma poses some difficulties. Thus we introduce the natural distance δ, and state that if (M, δ) is complete, then the geodesic is complete. However, due to the limitations of the conditions, the other side is not true.

Keywords

Totally Geodesic, Riemannian Foliations, The Generalized Bott Connection, Hopf-Rinow Theorem

1. 引言

Hopf-Rinow 定理说明了黎曼流形中度量完备和测地线完备的等价性. Hopf-Rinow 定理也已被推广到一般的可求长的度量空间, 具体可参见 Bridson 和 Haefliger 的文章 [1] 和 Gromov 的文章 [2].

全测地黎曼叶状结构有水平测地线, 黎曼几何有测地线, 这两个测地线的概念都对应着某个常微分方程的解而且它们都可引导出指数映照. 此外, 它们都是度量空间且度量的距离函数都可以由相应的联络来导出.

Sasakian 流形是一个特殊的全测地黎曼叶状结构. Dong 和 Zhang 在 [3] 中, 研究了 Sasakian 流形中的 Hopf-Rinow 定理, 即: 若 Sasakian 流形 M 在由 Tanaka-Webster 联络 ∇ 的指数映照所定义的距离函数 δ 下是完备的, 则 (M, ∇) 也是完备的, 即 exp^{∇} 在整个 TM 上有定义. 进一步, 如果 M 关于黎曼联络是完备的, 则它在 Tanaka-Webster 联络下也是完备的.

而本文的主要目的就是将 Hopf-Rinow 定理推广至全测地黎曼叶状结构上, 主要结果如下：

定理 1.1. *设 $(M, \mathscr{F}, g)$ 是全测地黎曼叶状结构,∇ 为广义 Bott 联络,δ 是 M 上的距离函数. 若 (M, δ) 是完备的, 则 (M, ∇) 也是完备的, 即 exp^{∇} 在整个 TM 上有定义.*

黎曼几何中的 Hopf-Rinow 定理说明 (M, ∇^R) 的完备性等价于 (M, d) 的完备性, 而由下文我们知道 (M, d) 完备可以引出 (M, δ) 的完备性, 再根据定理 1.1, 我们得到如下定理：

定理 1.2. 设 $(M,\mathscr{F},g)$ 是全测地黎曼叶状结构,∇ 为广义 *Bott* 联络, ∇^R 为黎曼联络. 若 (M,∇^R) 是完备的, 则 (M,∇) 也是完备的.

2. 预备知识

全测地黎曼叶状结构的简介可以参看 [4] 和 [5]. 设 (M,g) 是 $n+p$ 维黎曼流形, $\mathscr{F}$ 是 M 上余维为 p 的叶状结构. 一般, 在黎曼流形 (M,g) 上有 Levi-Civita 联络, 我们用 ∇^R 表示, 但这种联络不适用于研究叶状结构, 因为水平丛和垂直丛可能不平行. 更适合研究叶状结构的是我们接下来介绍的广义 Bott 联络 ∇. 根据 Levi-Civita 联络, 广义 Bott 联络可以写成

$$\nabla_X Y=\begin{cases}\pi_H(\nabla^R_X Y) & X,Y\in\Gamma(H)\\ \pi_H([X,Y]) & X\in\Gamma(V),Y\in\Gamma(H)\\ \pi_V([X,Y]) & X\in\Gamma(H),Y\in\Gamma(V)\\ \pi_V\left(\nabla^R_X Y\right) & X,Y\in\Gamma(V)\end{cases}$$

其中下标 H(或 V) 表示在水平 (或垂直) 上的投影. 对任意的 $\xi\in\Gamma(V)$, 若 $\nabla_\xi g_H=0$, 则称叶状结构 $\mathscr{F}$ 为黎曼叶状结构; 若 $\mathscr{F}$ 为全测地黎曼叶状结构, 则有 $\nabla g=0$. 我们把三元组 $(M,\mathscr{F},g)$ 称为具有黎曼叶状结构 $\mathscr{F}$ 的黎曼流形, 此时称 g 为 bundle-like 度量.

参照 [6], 我们给出本文所需的广义 Bott 联络的一些性质. 首先它满足 $\nabla_H g_H=0$ 和 $\nabla_V g_V=0$. 我们记广义 Bott 联络 ∇ 的挠率为 T, 则有

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y],\quad X,Y\in\Gamma(TM).$$

因为本文是在全测地黎曼叶状结构上, 所以 T 还满足下列等式

$$T(X,Y)=-\pi_V([\pi_H(X),\pi_H(Y)]).\tag{2.1}$$

设 $(M,\mathscr{F},g)$ 是全测地黎曼叶状结构, ∇ 是它的广义 Bott 联络. 我们称一条 C^1 曲线 $\gamma:[0,l]\to M$ 是 ∇-测地线, 如果在 $[0,l]$ 上几乎处处有 $\nabla_{\gamma'}\gamma'=0$(参考 [7]).

类似黎曼几何, 由常微分方程理论可知经过点 p 沿着 v 方向的 ∇-测地线总是存在的. 由于广义 Bott 联络是保持度量的, 从而 ∇-测地线的模长是常数, 所以指数映射 $exp_p^\nabla:T_pM\to M$ 可以被定义为 $\gamma_v(1)$.

定义 2.1. 全测地黎曼叶状结构是完备的, 如果每个 ∇-测地线都可以扩展到定义为 $-\infty<t<\infty$ 的测地线 $\gamma(t)$ 上, 其中 t 是仿射参数.

因此, 若 (M,∇) 是完备的, 则 exp^∇ 在整个 TM 上有定义, 反之亦然.

为了研究 ∇-测地线的度量性质, 我们引入一个不同于黎曼距离的距离函数. 称连续曲线

$c:[a,b]\to M$ 为分段 ∇-测地线, 如果存在 $a=a_1<a_2<\cdots<a_n=b$, 使得 $c:[a_i,a_{i+1}]\to M$ 是一个 ∇- 测地线, $i=1,2,\ldots,n-1$. $\forall p,q\in M$, 令 $\Gamma(p,q)$ 表示所有连接 p 和 q 的分段 ∇-测地线. 定义 p,q 之间的 δ 距离为 $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma(p,q)} L(\gamma)$, 其中 $L(\cdot)$ 表示曲线的长度. 易证上述 δ 是 M 上的距离函数. 令 d 表示黎曼距离函数, 显然 $d(p,q)\le\delta(p,q)$, $\forall p,q\in M$. 因此若 (M,d) 完备, 则 (M,δ) 也完备.

显然指数映射在局部上是微分同胚的, 据此我们可以给出法坐标系的概念. 已知 T_pM 中每个点 p(更确切地说是 p 处的零向量) 都有一个邻域 D_p, 并通过指数映射微分同胚地映射到 M 中 p 的邻域 U_p 上. 在 p 处选取一个线性坐标系 $u=\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$, 则微分同胚映射 $exp_p^\nabla:D_p\to U_p$ 以自然的方式在 U_p 中定义了局部坐标系. 这个局部坐标系称为 p 点的法坐标系, 此时的 U_p 被称为 p 的法坐标邻域 (参考 [8]). 一个区域是凸的就是指该区域内两点之间可以用 ∇-测地线相连接. 由于指数映射在 0 点处的切映射是恒等映射, 所以对于任何连接 p 和 q 的连续曲线, 它都可以被有限个的法坐标邻域覆盖. 从而使得两点之间总存在分段 ∇-测地线, 所以距离 δ 是有限的.

类似于 Dong 和 Zhang 他们的结果, 由距离函数 δ 所定义的拓扑和 M 的原来的拓扑是相同的.

定理 2.2. 距离函数 δ 定义了与 M 的拓扑相同的拓扑.

证明. 只需要验证黎曼距离 d 和 δ 的拓扑相同 (参考 [9]). 一方面, 由 d 定义的开子集显然也是 δ 定义的一个开子集. 另一方面, 假设 W 是由 δ 定义的开子集, 即 $\forall p\in W$, 都存在正常数 ε, 使得 $B_\delta(p;\varepsilon)\subset W$, 其中 $B_\delta(p;\varepsilon)=\{q|\delta(p,q)<\varepsilon\}$. 令

$$D_p(\varepsilon)=\{v\in T_pM,||v||<\varepsilon\},B^\nabla(p;\varepsilon)=exp^\nabla(D_p(\varepsilon)).$$

令 exp^{∇^R} 表示黎曼指数映射. 对于足够小的 ε, 有

$$exp_p^{\nabla^R}(D_p(\varepsilon))=B_d(p;\varepsilon).$$

此外 $exp_p^\nabla:D_p(\varepsilon)\to B^\nabla(p;\varepsilon)$ 和 $exp_p^{\nabla^R}:D_p(\varepsilon)\to B_d(p;\varepsilon)$ 都是微分同胚映射. 因此 $B^\nabla(p;\varepsilon)$ 是 (M,d) 中开子集. 注意, 若 γ 是法邻域 $B^\nabla(p;\varepsilon)$ 中连接 p,q 两点的 ∇-测地线, 则有 $\delta(p,q)\le L(\gamma)<\varepsilon$. 这意味着 $B^\nabla(p;\varepsilon)\subset B_\delta(p,\varepsilon)\subset W$. 所以 W 也是 d 定义的一个开子集. □

3. Gauss 引理

引理 3.1. 设 $(M,\mathscr{F},g)$ 是全测地黎曼叶状结构,∇ 为广义 *Bott* 联络. 设 $c(s)$ 是 T_pM 中到原点距离相等的曲线. 记 $\rho_s(t):[0,1]\to T_pM$ 是 T_pM 中从原点到 $c(s)$ 的射线. 令 $\alpha(t,s)=exp^\nabla(\rho_s(t))$ 且 $\gamma(t)=\alpha(t,0)$, 则有

$$g(V(t),\gamma'(t))=-\int_0^t g(T(V,\gamma'),\gamma')dt. \tag{3.1}$$

其中 $V(t)=d\alpha(\frac{\partial}{\partial s})_{(t,0)}$ 是 α 沿着 ∇-测地线 γ 的变分向量场.

证明. 由题易得

$$\begin{aligned}
0&=\frac{dL[exp^{\nabla}(\rho_s|_{[0,t]})]}{ds}|_{s=0}=\frac{d}{ds}\int_0^t\langle\alpha'(t,0),\alpha'(t,0)\rangle^{\frac{1}{2}}dt=\int_0^t V\langle\gamma',\gamma'\rangle^{\frac{1}{2}}dt\\
&=\int_0^t\langle\gamma',\gamma'\rangle^{\frac{-1}{2}}V\langle\gamma',\gamma'\rangle dt=\frac{1}{2}(L(\gamma'))^{-1}\int_0^t V\langle\gamma',\gamma'\rangle dt=(L(\gamma'))^{-1}\int_0^t g(\nabla_V\gamma',\gamma')dt\\
&=(L(\gamma'))^{-1}\int_0^t[g(T(V,\gamma'),\gamma')+g(\nabla_{\gamma'}V,\gamma')+g([V,\gamma'],\gamma')]dt\\
&=(L(\gamma'))^{-1}g(V,\gamma')|_0^t+(L(\gamma'))^{-1}\int_0^t[g(T(V,\gamma'),\gamma')+g([V,\gamma'],\gamma')]dt.
\end{aligned}$$

由于在 α 上

$$[\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial s}]=0.$$

故最终可得

$$g(V(t),\gamma'(t))=-\int_0^t g(T(V,\gamma'),\gamma')dt.\quad\square$$

注记 3.2. 设 $(M,\mathscr{F},g)$ 是全测地黎曼叶状结构,∇ 为广义 Bott 联络. 对于 $v\in T_pM$, 假设 $w\in T_v(T_pM)$ 垂直于 v 且将 w 看作 T_pM 中向量. T_pM 中显然存在曲线 $c(s)$ 使得 $c(0)=v,c'(0)=w$ 且 c 中每点到 T_pM 的原点的距离相等. 这种情况下, (3.1) 可以写成

$$\langle(dexp^{\nabla})_{tv}(tw),(dexp^{\nabla})_{tv}(v)\rangle=-\int_0^t g(T(V,\gamma'),\gamma')dt.\tag{3.2}$$

由此可得 Gauss 引理不成立, 但是它仍然适用于一些特殊的测地线.

引理 3.3. 设 $(M,\mathscr{F},g)$ 是全测地黎曼叶状结构, ∇ 为广义 *Bott* 联络. 令 $\rho(t)=tv(t\in[0,1])$ 是经过 T_pM 原点的射线, $w\in T_v(T_pM)$ 是垂直于 v 的向量. 若 v 垂直或 v 水平, 则有

$$\langle(dexp^{\nabla})_{tv}(tw),(dexp^{\nabla})_{tv}(v)\rangle=0,\quad\forall t\in[0,1].\tag{3.3}$$

证明. 要证 (3.3), 只需证 $g(T(V,\gamma'),\gamma')=0$.

(1) 因为 v 垂直, 所以 γ' 也垂直, 即得 $T(V,\gamma')=0$, 得证;

(2) 因为 v 水平, 所以 γ' 也水平, 即得

$$T(V,\gamma')=-\pi_V([\pi_H(V),\pi_H(\gamma')])$$

是垂直的, 所以 $g(T(V,\gamma'),\gamma')=0$, 得证. $\square$

4. Hopf-Rinow 型定理

本节将证明定理 1.1. 在证明主要结果之前, 我们先给出以下结论.

引理 4.1. *设 $(M, \mathscr{F}, g)$ 是全测地黎曼叶状结构, ∇ 为广义 Bott 联络. 令 $x^1, ..., x^n$ 是原点 p 的法坐标系, 则在 p 点附近存在一个正常数 a, 使得任意的 ρ 在 0 和 a 之间, 都有*

(1) $U(p;\rho)$ 是凸的;

(2) 对于任意的 $q \in U(p;\rho)$, 存在 q 点的法坐标邻域包含 $U(p;\rho)$.

证明. 设 $(x^1, ..., x^m)$ 为 $W(\subset M)$ 上的局部坐标, 点 $p \in W$ 的切向量可表示成 $\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. 令 $\varepsilon > 0$, 给定点 $p \in M$, $V \subset M$ 是 p 的邻域, 使得 $u = \{(q, v); q \in V, v \in T_qM, |v| < \varepsilon\}$. 定义光滑映射 $F : u \to M \times M$ 为 $F(q, v) = (q, exp_q^{\nabla} v)$. 用 $(y^1, ..., y^m; y^{m+1}, ..., y^{2m})$ 表示 $W \times W$ 上的诱导坐标, 则有

$$F(x^1, ..., x^m; \xi^1, ..., \xi^m) = (y^1, ..., y^m; y^{m+1}, ..., y^{2m}).$$

设 $\gamma_q^v(1)$ 为测地线使得 $\gamma(0) = q, \gamma'(0) = v, exp_q v = \gamma_q^v(1)$. 其中 $\gamma(t) = (y^{m+1}(t), ..., y^{2m}(t))$, $\gamma' = \frac{dy^{m+i}}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$. 所以测地线满足

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y^{m+j}}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \dfrac{dy^{m+j}}{dt} \dfrac{dy^{m+i}}{dt} = 0 \\ y^{m+i}(0) = x^i \\ \dfrac{dy^{m+i}}{dt}|_{t=0} = \xi^i \end{cases} \tag{4.1}$$

则 F 的局部坐标表示为

$$\begin{cases} y^i = x^i \\ y^{m+i} = x^i + \xi^i - \dfrac{1}{2}\Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j \cdots \end{cases} \tag{4.2}$$

因此 F 在 $(p, 0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

是非奇异的, 由反函数定理, F 是 $(p, 0)$ 邻域内的局部微分同胚.

这意味着 TM 中存在 $(p, 0)$ 的一个邻域 $u' \subset u$, 使得 F 将 u' 微分同胚映射到 $M \times M$ 中 (p, p) 的邻域 $F(u')$ 上. 那么对任意的 p, 都存在 a, 使得 $U(p;a) \times U(p;a) \subset F(u')$. 又因为 $0 < \rho < a$, 所以有 $U(p;\rho) \times U(p;\rho) \subset U(p;a) \times U(p;a) \subset F(u')$.

(1) 对于任意两点 $q_1, q_2 \in U(p;\rho)$, 由于 F 是微分同胚, 故存在 $v \in T_{q_1}M, |v| < \varepsilon$ 使得

$F^{-1}(q_1,q_2)=(q_1,v)\in u'$. 显然 $q_2=exp_{q_1}(v)$, 因此 $\gamma_v(t)=exp_{q_1}(tv)$ 为所求 ∇-测地线.

(2) 要证 $U(p;\rho)$ 中每一点都有一个包含 $U(p;\rho)$ 的法坐标邻域, 即证 $\forall q\in U(p;\rho), exp_q^{\nabla}$ 是 $B_\varepsilon(0)\subset T_qM$ 上微分同胚且 $exp_q^{\nabla}(B_\varepsilon(0))\supset U$.

$\forall q\in U(p;\rho)$, 有 $\{q\}\times U(p;\rho)\subset F(u')$. 令 $B_\varepsilon(0)\subset T_qM$, 因为 F 是 u' 上微分同胚映射, 所以 $F(\{q\}\times B_\varepsilon(0))\supset\{q\}\times U(p;\rho)$. 由 F 的定义有 exp_q^{∇} 是 $B_\varepsilon(0)$ 上微分同胚且

$$exp_q^{\nabla}(B_\varepsilon(0))\supset U(p;\rho).\quad\square$$

接下来我们证明定理 1.1.

证明. 给定点 $p\in M$ 和 $0\neq v\in T_pM$, 假设 γ 是满足

$$\gamma(0)=p,\gamma'(0)=v$$

的 ∇-测地线. 此时参数 t 和弧长成正比, 假设 $[0,t_0)$ 是使这样的 γ 存在的最大开区间. 因此, 若 t_0 有限且 $t_i\to t_0$, 那么当 $i,j\to\infty(i<j)$ 时, 有

$$\delta(\gamma(t_i),\gamma(t_j))\leq L(\gamma|_{[t_i,t_j]})=c|t_j-t_i|\to 0.$$

其中 c 为正常数, 所以 $\{\gamma(t_i)\}$ 是 Cauchy 序列且在 (M,δ) 中有极限 q.

对于足够大的 i, $\gamma(t_i)\in U(q;\rho)$. 令 $\sigma:[0,r_0)\to M$ 是满足

$$\sigma(0)=\gamma(t_i),\sigma'(0)=\gamma'(t_i)$$

的 ∇-测地线且 $[0,r_0)$ 是使得 $\sigma(t)$ 存在的最大开区间. 由引理 4.1 得, $\gamma(t_i)$ 有一个法坐标邻域包含 $U(q;\rho)$. 因此 $r_0>t_0-t_i$ 且 $\gamma(t_0)\in\sigma$. 从而 $\gamma\sqcup\sigma$ 是一个光滑 ∇-测地线且 γ 可以拓展到 t_0 以上, 与假设矛盾. $\square$

参考文献

[1] Bridson, M.R. and Haefliger, A. (1999) Metric Spaces of Non-Positive Curvature. In: *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Vol. 319, Springer-Verlag, Berlin.

[2] Gromov, M., *et al.* (1999) Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Vol. 152. Birkhäuser, Boston.

[3] Dong, Y.X. and Zhang, W. (2018) Comparison Theorems in Pseudo-Hermitian Geometry and Applications. *Osaka Journal of Mathematics*, **55**, 347-367.

[4] Baudoin, F. and Bonnefont, M. (2015) Curvature-Dimension Estimates for the Laplace-Beltrami Operator of a Totally Geodesic Foliation. *Nonlinear Analysis*, **126**, 159-169. https://doi.org/10.1016/j.na.2015.06.025

[5] Baudoin, F., Grong, E., Kuwada, K. and Thalmaier, A. (2019) Sub-Laplacian Comparison Theorems on Totally Geodesic Riemannian Foliations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **58**, Article No. 130. https://doi.org/10.1007/s00526-019-1570-8

[6] Dong, Y.X. (2020) Eells-Sampson Type Theorems for Subelliptic Harmonic Maps from Sub-Riemannian Manifolds. *The Journal of Geometric Analysis*, **31**, 3608-3655. https://doi.org/10.1007/s12220-020-00408-z

[7] Petersen, P. (2006) Riemannian Geometry. Springer, New York.

[8] Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1969) Foundations of Differential Geometry, Vol. I. Interscience, New York.

[9] Chavel, I. (2006) Riemannian Geometry: A Modern Introduction. Cambridge University Press, Cambridge.