Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(4), 1683-1689
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124174

Hans汉斯

带状域无浮力扩散的二维Boussinesq方程的稳定性

成子强，任晓霞*

华北电力大学数理学院，北京

收稿日期：2023年3月24日；录用日期：2023年4月18日；发布日期：2023年4月26日

摘 要

我们证明了带状域 $\mathbb{R}\times(0,1)$ 中不含浮力扩散具有Navier型滑移边界条件的二维Boussinesq方程在平衡状态 $(0,x_2)$ 附近的全局适定性。值得一提的是，本文仅利用能量估计，方程自身结构以及 $\partial_1 u$ 利普希茨范数的衰减率即可获得低正则性结果。

关键词

Boussinesq方程，带状域，低正则性

Stability of the 2D Boussinesq Equations without Buoyancy Diffusion in Strip Domain

Ziqiang Cheng, Xiaoxia Ren*

Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing

Received: Mar. 24th, 2023; accepted: Apr. 18th, 2023; published: Apr. 26th, 2023

Abstract

We prove the global well-posedness for the 2D Boussinesq equations without buoyancy diffusion around the equilibrium state $(0,x_2)$ in the strip domain $\mathbb{R}\times(0,1)$ with Navier-type slip boundary condition. It is worth mentioning that the results of low regularity are obtained using only the energy estimate, the structure of the equations and the decay rate of Lip norm of $\partial_1 u$.

*通讯作者 Email: xiaoxiaren@ncepu.edu.cn

文章引用: 成子强, 任晓霞. 带状域无浮力扩散的二维 Boussinesq 方程的稳定性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1683-1689. DOI: 10.12677/aam.2023.124174

Keywords

Boussinesq Equations, Strip Domain, Low Regularity

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

在本文中，我们研究了以下具有速度阻尼项的二维 Boussinesq 方程：

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u + u + \nabla P - \Theta e_2 = 0 & x\in\Omega, t>0, \\ \partial_t \Theta + u\cdot\nabla\Theta = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$，$u=(u_1,u_2)$ 表示流体的运动速度，P 是流体所受压力，Θ 表示流体温度，e_2 表示二维空间中垂直方向上的单位向量。这个系统通常用于模拟海洋环流和大气锋面等流体运动，相关物理背景在文献[1]中有详细的讨论。

近年来，稳定性问题受到了人们的广泛关注。对于全空间 $\mathbb{R}^2$，万[2]采用 two-tier 能量方法，先假设高阶正则性得到低阶衰减性，然后再利用低阶衰减性来获得高阶正则性。对于有界区域[3] [4]，周期区域 $\mathbb{T}^2$ [5]和带状域[6]，有相应的高阶稳定性结果。

在本文中，我们感兴趣的是 Boussinesq 系统(1)在带状域中平衡状态 $(0,x_2)$ 附近的低阶稳定性。

$$\Omega := \{x=(x_1,x_2) \mid -\infty < x_1 < +\infty, 0 < x_2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

这里速度场满足 Navier 型滑移边界条件：

$$(u\cdot n)(x,t)=0, \quad (\nabla\times u)(x,t)=0 \quad 在\ \partial\Omega 上, t>0$$

其物理意义是存在一个靠近边界的流体停滞层，它允许流体以与剪切应力成比例的滑移速度滑移。

通过设 $\theta=\Theta-x_2$，我们得到系统(1)的扰动方程：

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u - \Delta u + \nabla p - \theta e_2 = 0, & x\in\Omega, t>0, \\ \partial_t\theta + u\cdot\nabla\theta + u_2 = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_2 u_1 = u_2 = 0, \quad x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x),\ \theta(x,0)=\theta_0(x), \quad x\in\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

并且我们添加初始边界条件 $\theta_0|_{\partial\Omega}=0$ 来获得稳定性结果。

注记 1：这里我们对所选择的边界条件作一些解释：

由于 Navier 型滑移边界条件 $u_2(t)|_{\partial\Omega}=0$，(3)方程组的解 $\theta(t)$ 在带状域的边界上遵循以下传输方程：

$$\partial_t\theta|_{\partial\Omega} + u_1\partial_1\theta|_{\partial\Omega} = 0.$$

如果选择条件 $\theta_0|_{\partial\Omega}=0$，那么只要解存在，初始边界条件就会随时间保持下来，即 $\theta(t)|_{\partial\Omega}=0$。

为了消除压力项，我们也考虑涡度方程。

$$\begin{cases}\partial_t\omega+u\cdot\nabla\omega-\Delta\omega-\partial_1\theta=0, & x\in\Omega, t>0,\\ \partial_t\theta+u\cdot\nabla\theta+u_2=0, \\ \omega=0, \quad x\in\partial\Omega, t>0.\end{cases} \tag{4}$$

注记 2： 由于 $\operatorname{div} u=0$，速度场可以被流函数表示：

$$u=\left(\partial_2\psi,-\partial_1\psi\right),$$

那么

$$\begin{cases}-\Delta\psi=\omega, & x\in\Omega,\\ \psi=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{5}$$

通过椭圆估计，我们得到

$$\|\nabla u\|_{H^k}\lesssim\|\omega\|_{H^k}, \quad k=0,1,2\cdots. \tag{6}$$

符号说明： 在本文中，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 用来表示 L^2 空间上的内积，为简明起见，我们令

$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i=1,2$$

我们还将使用 $A\lesssim B$ 来表示 $A\le CB$ 对某个绝对常数 $C>0$ 成立，该常数在不同式子中可能是不同的。

2. 带状域中的先验估计

为了证明具有 Navier 型滑移边界条件的系统(3)或(4)的全局适定性，关键是对系统(3)或(4)的解建立全局一致的先验估计。

我们首先引入如下的能量

$$\mathcal{E}(t):=\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2+\|\theta(t)\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

以及耗散能量

$$\mathcal{F}(t):=\|\nabla u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2+\|\partial_1\theta(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

则我们有下述一致估计：

性质 1： 假设系统(3)的解 (u,θ) 满足

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2+\|\theta(t)\|_{H^1(\Omega)}^2\right)\le c_0^2.$$

若 c_0 充分小，则存在某正常数 $C_0>0$ 使得

$$\mathcal{E}(t)+\int_0^t\mathcal{F}(s)\,\mathrm{d}s\le C_0\left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2+\|\theta_0\|_{H^1(\Omega)}^2\right)+\mathcal{E}(t)\int_0^t\|\partial_1u(s)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}s$$

对任意的 $t\in[0,T]$ 成立。

证明： 性质 1 的证明基于以下几个细致的能量估计步骤。

2.1. u,θ 的 L^2 估计

因为在带状域边界 $\partial\Omega$ 上满足 $u_2=\partial_2u_1=\theta=0$，我们分别用 u 和 θ 与(3)$_1$、(3)$_2$ 式做 L^2 内积，分部积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2\right)+\|\nabla u\|_{L^2}^2=0, \tag{7}$$

这里 $t\in[0,T]$。

2.2. ω 和 $\nabla\theta$ 的 L^2 估计

由于 Navier 型滑移边界条件，在 $\partial\Omega$ 上 $\omega=\theta=0$，因此我们关于方程$(4)_1$ 和 ω 做 L^2 内积。然后，通过把梯度算子 ∇ 作用到方程$(4)_2$ 上并作新方程和 $\nabla\theta$ 的 L^2 内积来得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\omega\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2\right)+\|\nabla\omega\|_{L^2}^2=-\left\langle\nabla\theta,\nabla\left(u\cdot\nabla\theta\right)\right\rangle, \tag{8}$$

这里我们用到

$$\begin{aligned}\left\langle\nabla\theta,\nabla u_2\right\rangle&=\left\langle\partial_1\theta,\partial_1u_2\right\rangle+\left\langle\partial_2\theta,\partial_2u_2\right\rangle\\&=\left\langle\partial_1\theta,\partial_1u_2\right\rangle-\left\langle\partial_2\theta,\partial_1u_1\right\rangle\\&=\left\langle\partial_1\theta,\partial_1u_2\right\rangle-\left\langle\partial_1\theta,\partial_2u_1\right\rangle=\left\langle\partial_1\theta,\omega\right\rangle.\end{aligned}$$

对于非线性项，利用在边界 $\partial\Omega$ 上 $u_2=0$，我们有

$$\begin{aligned}-\left\langle\nabla\theta,\nabla\left(u\cdot\nabla\theta\right)\right\rangle&=-\left\langle\nabla\theta,\nabla u\cdot\nabla\theta\right\rangle\\&=-\left\langle\nabla\theta,\nabla u_1\partial_1\theta\right\rangle-\left\langle\partial_1\theta,\partial_1u_2\partial_2\theta\right\rangle-\left\langle\partial_2\theta,\partial_2u_2\partial_2\theta\right\rangle\\&:=I_{21}+I_{22}+I_{23}.\end{aligned}$$

对于 I_{21} 和 I_{22}，我们有

$$I_{21}+I_{22}\lesssim\|\nabla\theta\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\partial_1\theta\|_{L^2}\lesssim\|\nabla\theta\|_{L^2}\left(\|\nabla u\|_{H^2}^2+\|\partial_1\theta\|_{L^2}^2\right). \tag{9}$$

对于 I_{23}，使用 $\operatorname{div}u=0$，我们可以得到

$$I_{23}=\left\langle\partial_2\theta,\partial_1u_1\partial_2\theta\right\rangle\lesssim\|\partial_1u_1\|_{L^\infty}\|\nabla\theta\|_{L^2}^2. \tag{10}$$

2.3. ω_t 的耗散估计

我们关于方程$(4)_1$ 和 ω_t 做 L^2 内积得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\omega\|_{L^2}^2-2\left\langle\omega,\partial_1\theta\right\rangle\right)+\|\omega_t\|_{L^2}^2-\left\langle\omega,\partial_1u_2\right\rangle\\&=-\left\langle\omega_t,u\cdot\nabla\omega\right\rangle+\left\langle\omega,\partial_1\left(u\cdot\nabla\theta\right)\right\rangle,\end{aligned} \tag{11}$$

其中我们用到

$$\begin{aligned}-\left\langle\omega_t,\partial_1\theta\right\rangle&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\omega,\partial_1\theta\right\rangle+\left\langle\omega,\partial_1\theta_t\right\rangle\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\omega,\partial_1\theta\right\rangle-\left\langle\omega,\partial_1\left(u_2+u\cdot\nabla\theta\right)\right\rangle.\end{aligned}$$

现在我们估计(11)右端的非线性项

$$\begin{aligned}&-\left\langle\omega_t,u\cdot\nabla\omega\right\rangle+\left\langle\omega,\partial_1\left(u\cdot\nabla\theta\right)\right\rangle\\&=-\left\langle\omega_t,u\cdot\nabla\omega\right\rangle-\left\langle\partial_1\omega,u\cdot\nabla\theta\right\rangle\\&\lesssim\|\omega_t\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\omega\|_{L^2}+\|\partial_1\omega\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\theta\|_{L^2}\\&\lesssim\|\nabla u\|_{H^1}\left(\|\omega_t\|_{L^2}^2+\|\nabla\omega\|_{L^2}^2\right)+\|\nabla\theta\|_{L^2}\left(\|\nabla\omega\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{H^1}^2\right),\end{aligned}$$

这里我们用到庞加莱不等式

$$\|u\|_{L^\infty} \lesssim \left\| \|u\|_{L^2_{x_2}}^{\frac{1}{2}} \|\partial_2 u\|_{L^2_{x_2}}^{\frac{1}{2}} + \|u\|_{L^2_{x_2}} \right\|_{L^\infty_{x_1}} \lesssim \|\partial_2 u\|_{L^2_{x_2} L^\infty_{x_1}} \lesssim \|\nabla u\|_{H^1}. \tag{12}$$

2.4. $\partial_1\theta$ 的耗散估计

由于在边界 $\partial\Omega$ 上 $\omega=\theta=0$，因此我们关于方程$(4)_1$ 和 $-\partial_1\theta$ 做 L^2 内积。然后，我们把梯度算子 ∇ 作用到方程$(4)_2$ 上，并对新方程和 $-\nabla u_2$ 做 L^2 内积得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\omega,\partial_1\theta\rangle+\|\partial_1\theta\|_{L^2}^2-\langle\partial_1\theta,\Delta\omega\rangle-\|\nabla u_2\|_{L^2}^2\\&=\langle\partial_1\theta,u\cdot\nabla\omega\rangle+\langle\nabla u_2,\nabla(u\cdot\nabla\theta)\rangle.\end{aligned} \tag{13}$$

现在我们估计(13)右端的非线性项。由于在边界 $\partial\Omega$ 上 $u_2=\theta=0$ 以及利用庞加莱不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\langle\partial_1\theta,u\cdot\nabla\omega\rangle+\langle\nabla u_2,\nabla(u\cdot\nabla\theta)\rangle\\&=\langle\partial_1\theta,u\cdot\nabla\omega\rangle-\langle\Delta u_2,u\cdot\nabla\theta\rangle\\&\lesssim\|\partial_1\theta\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\omega\|_{L^2}+\|\Delta u\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\theta\|_{L^2}\\&\lesssim\left(\|u\|_{H^2}+\|\nabla\theta\|_{L^2}\right)\left(\|\partial_1\theta\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{H^1}^2\right).\end{aligned} \tag{14}$$

2.5. $\nabla^2\omega$ 的耗散估计

为了获得 ω 的 $\dot{H}^2$ 估计，我们将$(4)_1$ 重写为

$$\begin{cases}-\Delta\omega=-\omega_t+\partial_1\theta-u\cdot\nabla\omega, & x\in\Omega,\\ \omega=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{15}$$

然后由椭圆估计得到

$$\begin{aligned}\|\nabla^2\omega\|_{L^2}&\lesssim\|\omega_t\|_{L^2}+\|\partial_1\theta\|_{L^2}+\|u\cdot\nabla\omega\|_{L^2}\\&\lesssim\|\omega_t\|_{L^2}+\|\partial_1\theta\|_{L^2}+\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\omega\|_{L^2}\\&\lesssim\|\omega_t\|_{L^2}+\|\partial_1\theta\|_{L^2}+c_0\|\nabla\omega\|_{L^2}.\end{aligned}$$

如果 $c_0\in(0,1)$，则我们得到

$$\|\nabla^2\omega\|_{L^2}\lesssim\|\omega_t\|_{L^2}+\|\partial_1\theta\|_{L^2}.$$

2.6. 先验估计的封闭

由于 $c_0\in(0,1)$，通过庞加莱不等式，椭圆估计(6)和步骤 2.5，能够存在一个正常数 c_1 使得

$$\begin{aligned}&\left(\|u\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2\right)+\delta\left(\|\omega\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2\right)+\delta^2\left(\|\nabla\omega\|_{L^2}^2-2\langle\omega,\partial_1\theta\rangle\right)-\delta^3\langle\omega,\partial_1\theta\rangle\\&\geq c_1\left(\|u\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{H^1}^2+\|\omega\|_{H^1}^2\right)\geq c_1\left(\|u\|_{H^2}^2+\|\theta\|_{H^1}^2\right)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&2\|\nabla u\|_{L^2}^2+2\delta\|\nabla\omega\|_{L^2}^2+2\delta^2\left(\|\omega_t\|_{L^2}^2-\langle\omega,\partial_1 u_2\rangle\right)+2\delta^3\left(\|\partial_1\theta\|_{L^2}^2-\langle\partial_1\theta,\Delta\omega\rangle-\|\nabla u_2\|_{L^2}^2\right)\\&\geq c_1\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\partial_1\theta\|_{L^2}^2+\|\nabla\omega\|_{H^1}^2\right)\\&\geq c_1\left(\|\nabla u\|_{H^2}^2+\|\partial_1\theta\|_{L^2}^2\right)\end{aligned}$$

对充分小的 $\delta>0$ 成立。

于是，我们推导出

$$\begin{aligned}&\left(\|u(t)\|_{H^2}^2+\|\theta(t)\|_{H^1}^2\right)+\int_0^t\left(\|\nabla u\|_{H^2}^2+\|\partial_1\theta\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}s\\&\le C\left(\|u_0\|_{H^2}^2+\|\theta_0\|_{H^1}^2\right)+\mathcal{E}(t)\int_0^t\|\partial_1 u(s)\|_{L^\infty}\mathrm{d}s+Cc_0\int_0^t\mathcal{F}(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

对于任意的 $t\in[0,T]$ 成立。

最后，通过取 c_0 使得 $Cc_0\le 1/2$，我们可以得到

$$\mathcal{E}(t)+\int_0^t\mathcal{F}(s)\mathrm{d}s\le C_0\left(\|u_0\|_{H^2}^2+\|\theta_0\|_{H^1}^2\right)+\mathcal{E}(t)\int_0^t\|\partial_1 u(s)\|_{L^\infty}\mathrm{d}s$$

对正常数 C_0 成立，于是我们完成性质 1 的证明。

3. 带状域中的整体稳定性

通过观察性质 1，我们发现如果

$$\int_0^t\|\partial_1 u(s)\|_{L^\infty}\mathrm{d}s\lesssim\varepsilon,$$

则可以利用连续性方法证明系统(3)的全局存在性(值得注意的是，系统(3)的全局存在性即系统(1)在 $(0,x_2)$ 附近的全局稳定性)。

本文的主要结果如下。

定理 1：假设 $u_0\in H^2(\Omega),\theta_0\in H^1(\Omega)$ 在 $\partial\Omega$ 上满足 $\theta_0|_{\partial\Omega}=0$，如果

$$\|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2+\|\theta_0\|_{H^1(\Omega)}^2\le\epsilon^2$$

对充分小的 ϵ 都成立，并且 $\partial_1 u$ 的利普希茨范数存在如下的衰减

$$\int_0^t\|\partial_1 u(s)\|_{L^\infty}\mathrm{d}s\lesssim\varepsilon,$$

则 Boussinesq 系统(3)就有唯一的全局解

$$u\in C\left([0,+\infty);H^2(\Omega)\right),\theta\in C\left([0,+\infty);H^1(\Omega)\right),$$

且存在常数 $C_0>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\left(\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2+\|\theta(t)\|_{H^1(\Omega)}^2\right)+\int_0^t\left(\|\nabla u(s)\|_{H^2(\Omega)}^2+\|\partial_1\theta(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\mathrm{d}s\\&\le C_0\left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2+\|\theta_0\|_{H^1(\Omega)}^2\right)\end{aligned}$$

对所有 $t>0$ 成立(说明：这里我们对初值仅要求低阶正则性)。

4. 结论

在本文中，我们研究了仅具有速度场耗散的二维 boussinesq 方程在 Navier 滑移边界情形下，稳态解附近低正则空间中的稳定性。

主要创新点在于：一、从方程的结构来看，速度场和温度场正则性不同，我们通过考虑涡度方程来进行转化；二、由于边界的出现，我们引入不改变边界条件的时间导数，后续再采用 Stokes 估计来获得速度场的二阶正则性；三、由于扰动方程中温度场仅具有弱耗散，我们利用精细的各向异性能量估计来处理非线性项。值得主要的是，本文与参考文献[6]的主要区别在于对初值的正则性要求更低。

今后，对于 Navier 滑移边界条件，我们希望通过预解估计获得$\|\partial_1 u\|_{L^\infty}$的衰减速率，从而去掉定理中利普希茨范数的条件，直接获得整体适定性。此外，对于更具有物理意义的非滑移边界条件，也期待能够获得整体适定性结果。

参考文献

[1] Majda, A. (2003) Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean. *Courant Lecture Notes*, **9**. https://doi.org/10.1090/cln/009

[2] Wan, R. (2019) Global Well-Posedness for the 2D Boussinesq Equations with a Velocity Damping Term. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 39, 2709-2730.

[3] Doering, C.R., Wu, J., Zhao, K. and Zheng, X. (2018) Long Time Behavior of the Two-Dimensional Boussinesq Equations without Buoyancy Diffusion. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **376-377**, 144-159. https://doi.org/10.1016/j.physd.2017.12.013

[4] Lai, M., Pan, R. and Zhao, K. (2011) Initial Boundary Value Problem for Two-Dimensional Viscous Boussinesq Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **199**, 739-760. https://doi.org/10.1007/s00205-010-0357-z

[5] Tao, L., Wu, J., Zhao, K. and Zheng, X. (2020) Stability Near Hydrostatic Equilibrium to the 2D Boussinesq Equations Without Thermal Diffusion. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **237**, 585-630. https://doi.org/10.1007/s00205-020-01515-5

[6] Dong, L. and Sun, Y. (2022) Asymptotic Stability of the 2D Boussinesq Equations without Thermal Conduction. *Journal of Differential Equations*, **337**, 507-540. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.08.015