Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(4), 1713-1721
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124178

Hans汉斯

基于Hamacher三角模的对称毕达哥拉斯集成算子及其应用

李卓明，张铭皓，张明雪，崔 旭，马振明*
临沂大学数学与统计学院，山东 临沂

收稿日期：2023年3月24日；录用日期：2023年4月18日；发布日期：2023年4月27日

摘 要

在毕达哥拉斯模糊集和Hamacher三角模基础上，研究了一类带参数且具有对称性的集成算子。首先给出了毕达哥拉斯模糊数的对称运算规则；其次，提出了基于Hamacher三角模的对称毕达哥拉斯集成算子，讨论了它的性质；之后，提出一种决策方法来解决毕达哥拉斯模糊信息环境下的多属性决策问题；最后，用示例验证所给方法的有效性。

关键词

Hamacher三角模，对称毕达哥拉斯集成算子，多属性决策

Symmetric Pythagorean Fuzzy Aggregation Operator Based on the Hamacher T-Norm and Its Application

Zhuoming Li, Minghao Zhang, Mingxue Zhang, Xu Cui, Zhenming Ma*
School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong

Received: Mar. 24th, 2023; accepted: Apr. 18th, 2023; published: Apr. 27th, 2023

Abstract

Based on the Pythagorean fuzzy set and Hamacher triangular norm, a class of aggregation operators with papameters and symmetric is studied. Firstly, the operational rules of Pythagorean fuzzy numbers is provided; secondly, the symmetric Pythagorean fuzzy aggregation operator based on the Hamacher triangular norm is defined, and some properties of it are investigated in detail; af-

*通讯作者。

文章引用: 李卓明, 张铭皓, 张明雪, 崔旭, 马振明. 基于 Hamacher 三角模的对称毕达哥拉斯集成算子及其应用[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1713-1721. DOI: 10.12677/aam.2023.124178

terwards, an approach to Pythagorean fuzzy multi-attribute decision making is presented based on the proposed operators. Finally, a practical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords

Hamacher T-Norm, Symmetric Pythagorean Fuzzy Aggregation Operator, Multi-Attribute Decision Making

1. 引言

由于客观事物的复杂性和不确定性，很多实际问题都表现出一定的模糊性，Zadeh 教授[1]于 1965 年引入模糊集合理论来处理模糊信息，其核心是隶属度概念。之后，Atanassov 教授[2]引入了同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫度的直觉模糊集，其要求隶属度和非隶属度之和小于或等于 1。许多学者以此为基础对直觉模糊集进行充分的推广，如区间直觉模糊集[3]，直觉梯形模糊集[4]，直觉不确定语言集[5]。然而在实际决策中，有时会出现隶属度和非隶属度之和大于 1 的情况，用上述概念无法进行描述。为解决这一问题，Yager 教授[6]定义了毕达哥拉斯模糊集，相比较直觉模糊集，它在处理模糊信息和不确定信息等方面比直觉模糊集更具灵活性，引起了国内外一些学者的关注。比如：缑迅杰[7]研究了毕达哥拉斯模糊集的连续性和可导性。张小路[8]将 QUALIFLEX 方法应用于毕达哥拉斯模糊信息环境下的多属性群决策问题。彭新东[9]提出毕达哥拉斯模糊集上的多参数相似测度，并应用于模式识别。集成算子在多属性决策中发挥重要作用，因此许多学者对毕达哥拉斯模糊环境下的集成算子进行了研究。Yager 教授[6]提出了毕达哥拉斯算术和几何平均算子。马振明[10]提出毕达哥拉斯对称几何和算术平均算子。梁德翠[11]提出了毕达哥拉斯模糊 Bonferroni 平均算子，Garg [12]提出基于中立运算的毕达哥拉斯模糊几何平均算子。朱建忠等[13]提出了毕达哥拉斯模糊 Muirhead 平均算子。彭丁红等[14]提出了毕达哥拉斯模糊 Frank 平均算子。杜玉琴等[15]提出了毕达哥拉斯模糊 Hamacher 集结算子。Abdullah 等[16]提出了毕达哥拉斯模糊 Hamacher Choquet 积分算子。通过对已有文献分析我们发现，已有的毕达哥拉斯算术和几何平均算子，对称几何和算术平均算子和中立几何平均算子能够公平的对待毕达哥拉斯模糊数中的隶属度和非隶属度信息，但这些算子中都不含有参数；而其他一些算子虽然含有参数能够体现决策者的偏好，但不能够公平的对待毕达哥拉斯模糊数中的隶属度和非隶属度信息。因此，结合上述两类算子的优点，引入一种既能体现决策者偏好又能够公平对待毕达哥拉斯模糊数中的隶属度和非隶属度信息的集成算子是一件非常有意义的工作。

本文在上述文献工作基础上，首先基于带参数的 Hamacher 三角模定义了毕达哥拉斯模糊数之间的对称型运算，提出了带参数的对称毕达哥拉斯模糊 Hamacher 集成算子，并证明了这些算子的幂等性、单调性、有界性等。其次，将提出的算子应用于毕达哥拉斯模糊信息环境下的多属性群决策问题中。最后，通过示例验证了所提出方法的有效性。

2. 预备知识

本节我们主要给出本文所需要一些预备知识，如毕达哥拉斯模糊集和 Hamacher 三角模等。

2.1. 毕达哥拉斯模糊集

Yager 教授在文献[6]提出了非标准的直觉模糊集——毕达哥拉斯模糊集：

定义 2.1：[6]设 X 为论域，则 X 上的毕达哥拉斯模糊集 A 定义为：

$$A=\left\{x,\mu_A(x),\nu_A(x)\mid x\in X\right\},$$

其中 $\mu_A(x),\nu_A(x)\in[0,1]$ 称为 x 相对于 A 的隶属度和非隶属度，且满足约束条件 $\left(\mu_A(x)\right)^2+\left(\nu_A(x)\right)^2\le 1$。

在文献[8]中，$\pi_A^P(x)=\sqrt{1-\mu_A^2(x)-\nu_A^2(x)}$ 称为 x 的犹豫度。对给定 $x\in X$，称偶对 $\left(\mu_A(x),\nu_A(x)\right)$ 为毕达哥拉斯模糊数，简记为 $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)$，其中 $\mu_\alpha,\nu_\alpha\in[0,1]$，$\mu_\alpha^2+\nu_\alpha^2\le 1$。为了对毕达哥拉斯模糊数进行比较，对于毕达哥拉斯模糊数 α 定义如下得分函数 s 和准确函数 h：

$$s(\alpha)=\begin{cases}\sqrt{\mu_\alpha^2-\nu_\alpha^2}, & \mu_\alpha\ge\nu_\alpha,\\ -\sqrt{\nu_\alpha^2-\mu_\alpha^2}, & \mu_\alpha\le\nu_\alpha,\end{cases}\tag{1}$$

$$h(\alpha)=\sqrt{\mu_\alpha^2+\nu_\alpha^2},\tag{2}$$

明显地，$s(\alpha)\in[-1,1]$，$h(\alpha)\in[0,1]$，得分 $s(\alpha)$ 越大，毕达哥拉斯模糊数 α 越大。当得分相同时，准确值 $h(\alpha)$ 越大 α 越大。

定义 2.2：[7]设 α,β 为两个毕达哥拉斯模糊数。

1) 如果 $s(\alpha)<s(\beta)$，则称 α 小于 β，即，$\alpha\prec\beta$。

2) 如果 $s(\alpha)=s(\beta)$

a) $h(\alpha)<h(\beta)$，则称 α 小于 β，即，$\alpha\prec\beta$；

b) $h(\alpha)=h(\beta)$，即，$\alpha=\beta$。

定义 2.3：设 $\alpha_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 为一族毕达哥拉斯模糊数且 $\sum_{i=1}^{n}\varpi_i=1,\varpi_i\in[0,1]$。

1) 称

$$\mathrm{PFWG}_\omega^Y(\alpha)=\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_{\alpha_j}^{\omega_j},\prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j}\right),$$

为毕达哥拉斯模糊加权几何平均算子[6]；

2) 称

$$\mathrm{PFWA}_\omega^Y(\alpha)=\left(\sum_{j=1}^{n}\omega_j\mu_{\alpha_j},\sum_{j=1}^{n}\omega_j\nu_{\alpha_j}\right),$$

为毕达哥拉斯模糊加权算术平均算子[6]；

3) 称

$$\mathrm{SPFWG}_\omega(\alpha)=\left(\frac{\prod_{j=1}^{n}\mu_{\alpha_j}^{\omega_j}}{\left[\prod_{j=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_j}^2\right)^{\omega_j}+\prod_{j=1}^{n}\mu_{\alpha_j}^{2\omega_j}\right]^{\frac{1}{2}}},\frac{\prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j}}{\left[\prod_{j=1}^{n}\left(1-\nu_{\alpha_j}^2\right)^{\omega_j}+\prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j}^{2\omega_j}\right]^{\frac{1}{2}}}\right)$$

对称毕达哥拉斯模糊几何集成算子[10]。

2.2. Hamacher 三角模

定义 2.4：[17] Hamacher 三角模定义如下：

$$T_H(x,y)=\frac{xy}{1+(\lambda-1)(1-x-y+xy)},\quad \gamma\in[0,\infty)$$

特别地，定义 $x_{T_H}^{\gamma}=\frac{\lambda x^{\gamma}}{x^{\gamma}(\lambda-1)+(1+(\lambda-1)(1-x))^{\gamma}}$，当 $\gamma\to 0$ 时，T_H 为 drastic 积三角模记为 T_D；当 $\gamma=1$ 时，T_H 为代数积三角模记为 T_P。

利用 Hamacher 三角模和数学归纳法可以给出如下 Hamacher 集成算子：

定义 2.5：[17]设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$，定义 Hamacher 集成算子如下：

$$\mathrm{HO}_w(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\lambda\prod_{i=1}^{n}x_i^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(1+(\lambda-1)(1-x_i))^{w_i}+(\lambda-1)\prod_{i=1}^{n}x_i^{w_i}}。$$

引理 2.1：[17] HO 算子具有幂等性，单调性和有界性。

引理 2.2：[10]如果 $x,y\in[0,1]$ 且 $x\le y$，那么 $x\le\frac{x}{x+1-y}\le y$。

3. 基于 Hamacher 三角模的对称毕达哥拉斯集成算子

定义 3.1：设 α,β 为两个毕达哥拉斯模糊数，定义如下运算：

1) $\alpha\otimes\beta=\left(\left(\frac{T_H(\mu_\alpha^2,\mu_\beta^2)}{T_H(\mu_\alpha^2,\mu_\beta^2)+T_H(1-\mu_\alpha^2,1-\mu_\beta^2)}\right)^{0.5},\left(\frac{T_H(\nu_\alpha^2,\nu_\beta^2)}{T_H(\nu_\alpha^2,\nu_\beta^2)+T_H(1-\nu_\alpha^2,1-\nu_\beta^2)}\right)^{0.5}\right)$

2) $\alpha_{T_H}^{\gamma}=\left(\left(\frac{\mu_{\alpha T_H}^{2\gamma}}{\mu_{\alpha T_H}^{2\gamma}+(1-\mu_\alpha^2)_{T_H}^{\gamma}}\right)^{0.5},\left(\frac{\nu_{\alpha T_H}^{2\gamma}}{\nu_{\alpha T_H}^{2\gamma}+(1-\nu_\alpha^2)_{T_H}^{\gamma}}\right)^{0.5}\right),\quad\gamma>0$

定理 3.1：设 α,β 为两个毕达哥拉斯模糊数，那么 $\alpha\otimes\beta$ 和 α^{γ} 为毕达哥拉斯模糊数。

证明：只证明 $\alpha\otimes\beta$ 为毕达哥拉斯模糊数，α^{γ} 为毕达哥拉斯模糊数类似可证。

明显地，$\left(\frac{T_H(\mu_\alpha^2,\mu_\beta^2)}{T_H(\mu_\alpha^2,\mu_\beta^2)+T_H(1-\mu_\alpha^2,1-\mu_\beta^2)}\right)^{0.5},\left(\frac{T_H(\nu_\alpha^2,\nu_\beta^2)}{T_H(\nu_\alpha^2,\nu_\beta^2)+T_H(1-\nu_\alpha^2,1-\nu_\beta^2)}\right)^{0.5}\in[0,1]$。

由 $\mu_\alpha^2+\nu_\alpha^2\le 1,\mu_\beta^2+\nu_\beta^2\le 1$ 和 T_H 单调性，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{T_H(\mu_\alpha^2,\mu_\beta^2)}{T_H(\mu_\alpha^2,\mu_\beta^2)+T_H(1-\mu_\alpha^2,1-\mu_\beta^2)}+\frac{T_H(\nu_\alpha^2,\nu_\beta^2)}{T_H(\nu_\alpha^2,\nu_\beta^2)+T_H(1-\nu_\alpha^2,1-\nu_\beta^2)}\\&\le\frac{T_H(\mu_\alpha^2,\mu_\beta^2)}{T_H(\mu_\alpha^2,\mu_\beta^2)+T_H(\nu_\alpha^2,\nu_\beta^2)}+\frac{T_H(\nu_\alpha^2,\nu_\beta^2)}{T_H(\nu_\alpha^2,\nu_\beta^2)+T_H(\mu_\alpha^2,\mu_\beta^2)}=1\end{aligned}。$$

所以 $\alpha\otimes\beta$ 为毕达哥拉斯模糊数。

容易验证，上述两种运算具有如下性质：

定理 3.2：设 α_1,α_2,α 是 3 个毕达哥拉斯模糊数，$\gamma_1,\gamma_2,\gamma\in[0,\infty)$。那么

1) $\alpha_1\otimes\alpha_2=\alpha_2\otimes\alpha_1$；

2) $\alpha_{T_H}^{\gamma_1+\gamma_2}=\alpha_{T_H}^{\gamma_1}\otimes\alpha_{T_H}^{\gamma_2}$；

3) $(\alpha_1\otimes\alpha_2)_{T_H}^{\gamma}=(\alpha_1)_{T_H}^{\gamma}\otimes(\alpha_2)_{T_H}^{\gamma}$。

定义 3.2： 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 n 个毕达哥拉斯模糊数，称

$$\mathrm{SHPM}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\mathop{\otimes}_{i=1}^{n}\alpha_{T_H}^{\omega_i}$$

为基于 Hamacher 三角模的对称毕达哥拉斯集成算子，其中 $\sum_{i=1}^{n}\varpi_i=1,\varpi_i\in[0,1]$，且

$$\mathrm{SHPM}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\left(\left(\frac{\mathrm{HO}_w(\mu_1^2,\cdots,\mu_n^2)}{\mathrm{HO}_w(\mu_1^2,\cdots,\mu_n^2)+\mathrm{HO}_w(1-\mu_1^2,\cdots,1-\mu_n^2)}\right)^{0.5},\left(\frac{\mathrm{HO}_w(v_1^2,\cdots,v_n^2)}{\mathrm{HO}_w(v_1^2,\cdots,v_n^2)+\mathrm{HO}_w(1-v_1^2,\cdots,1-v_n^2)}\right)^{0.5}\right)。$$

特别地，当参数 $\gamma=1$ 时，SHPM 算子为 SPFWG 算子。下面给出 SHPM 算子的一些性质：

定理 3.3： (幂等性)设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_0$ 为一族毕达哥拉斯模糊数，如果 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=\alpha_0$，则 $\mathrm{SHPM}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\alpha_0$。

证明：由 HO 算子的幂等性，我们有

$$\mathrm{SHPM}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\left(\left(\frac{\mu_0^2}{\mu_0^2+1-\mu_0^2}\right)^{0.5},\left(\frac{v_0^2}{v_0^2+1-v_0^2}\right)^{0.5}\right)=(\mu_0,v_0)。$$

定理 3.4： (有界性)设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为一族毕达哥拉斯模糊数，如果 $\alpha^-=(\min(\mu_1,\cdots,\mu_n),\max(v_1,\cdots,v_n))$ 且 $\alpha^+=(\max(\mu_1,\cdots,\mu_n),\min(v_1,\cdots,v_n))$，则 $\alpha^-\le\mathrm{SHPM}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\le\alpha^+$。

证明因为 $\mathrm{HO}_w(\mu_1^2,\cdots,\mu_n^2)\le 1-\mathrm{HO}_w(1-\mu_1^2,\cdots,1-\mu_n^2)$，所以由引理 2.2 有

$$\mathrm{HO}_w(\mu_1^2,\cdots,\mu_n^2)\le\frac{\mathrm{HO}_w(\mu_1^2,\cdots,\mu_n^2)}{\mathrm{HO}_w(\mu_1^2,\cdots,\mu_n^2)+\mathrm{HO}_w(1-\mu_1^2,\cdots,1-\mu_n^2)}\le 1-\mathrm{HO}_w(1-\mu_1^2,\cdots,1-\mu_n^2)。$$

由 HO 算子的有界性，我们有

$$\min(\mu_1^2,\cdots,\mu_n^2)\le\frac{\mathrm{HO}_w(\mu_1^2,\cdots,\mu_n^2)}{\mathrm{HO}_w(\mu_1^2,\cdots,\mu_n^2)+\mathrm{HO}_w(1-\mu_1^2,\cdots,1-\mu_n^2)}\le\max(\mu_1^2,\cdots,\mu_n^2)。$$

所以，

$$\min(\mu_1,\cdots,\mu_n)\le\left(\frac{\mathrm{HO}_w(\mu_1^2,\cdots,\mu_n^2)}{\mathrm{HO}_w(\mu_1^2,\cdots,\mu_n^2)+\mathrm{HO}_w(1-\mu_1^2,\cdots,1-\mu_n^2)}\right)^{0.5}\le\max(\mu_1,\cdots,\mu_n)。$$

类似地，我们有

$$\min(v_1,\cdots,v_n)\le\left(\frac{\mathrm{HO}_w(v_1^2,\cdots,v_n^2)}{\mathrm{HO}_w(v_1^2,\cdots,v_n^2)+\mathrm{HO}_w(1-v_1^2,\cdots,1-v_n^2)}\right)^{0.5}\le\max(v_1,\cdots,v_n)。$$

所以结论成立。

定理 3.5： (单调性)设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_1^*,\cdots,\alpha_n^*$ 为两族毕达哥拉斯模糊数，如果 $\alpha_i\le\alpha_i^*$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\mathrm{SHPM}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\le\mathrm{SHPM}(\alpha_1^*,\cdots,\alpha_n^*)$。

证明： 证明与定理 3.4 类似，此处省略。

4. 基于 SHPM 算子的多属性决策方法

在一个多属性决策问题中，设 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 为方案集，$C=(C_1,C_2,C_3,C_n)$ 为属性集，w 表示属

性权重向量且 $\sum_{i=1}^{n}\varpi_i=1,\varpi_i\in[0,1]$。假设专家对决策方案 A_i 在属性 C_j 下的评价值用毕达哥拉斯模糊数表示为：$\alpha_{ij}=(\mu_{ij},\nu_{ij})$，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$，$(\alpha_{ij})_{mn}$ 为毕达哥拉斯模糊决策矩阵。下面给出如下具体步骤获得最佳方案：

步骤 1：专家确定属性权重 ϖ，其中 $\sum_{i=1}^{n}\varpi_i=1,\varpi_i\in[0,1]$；

步骤 2：利用 SHPM 算子对决策矩阵 $(\alpha_{ij})_{mn}$ 的第 i 行进行集成，获得每个方案的综合评价值

$$\alpha_i=\mathrm{SHPM}(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{in})$$

$$=\left(\left(\frac{\mathrm{HO}_w(\mu_{i1}^2,\cdots,\mu_{in}^2)}{\mathrm{HO}_w(\mu_{i1}^2,\cdots,\mu_{in}^2)+\mathrm{HO}_w(1-\mu_{i1}^2,\cdots,1-\mu_{in}^2)}\right)^{0.5},\left(\frac{\mathrm{HO}_w(\nu_1^2,\cdots,\nu_n^2)}{\mathrm{HO}_w(\nu_{i1}^2,\cdots,\nu_{in}^2)+\mathrm{HO}_w(1-\nu_{i1}^2,\cdots,1-\nu_{in}^2)}\right)^{0.5}\right)。$$

步骤 3：根据公式(1)计算 α_i 的得分函数值 $s(\alpha_i)$；

步骤 4：根据定义 2.2 对方案 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 得分进行排序，从而得到最佳方案。

5. 实例与对比分析

5.1. 实例

某风险投资公司要进行项目投资，现有 4 个备选企业 $A=(A_1,A_2,A_3,A_4)$ 4 项评估属性：$C=(C_1,C_2,C_3,C_4)$ 分别表示产品的创新力、产品的生产能力、产品的销售能力、产品的售后服务能力，属性权重向量为 $w=(0.25,0.35,0.2,0.2)$。对每个企业进行评估，得到如下决策矩阵(表 1)：

Table 1. Pythagorean fuzzy decision matrix
表 1. 毕达哥拉斯模糊决策矩阵

数量	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$(0.7,0.5)$	$(0.7,0.4)$	$(0.6,0.4)$	$(0.7,0.4)$
A_2	$(0.6,0.4)$	$(0.7,0.4)$	$(0.7,0.4)$	$(0.6,0.5)$
A_3	$(0.6,0.3)$	$(0.5,0.5)$	$(0.8,0.3)$	$(0.7,0.4)$
A_4	$(0.5,0.3)$	$(0.7,0.4)$	$(0.6,0.4)$	$(0.5,0.5)$

步骤 1：属性权重向量为 $w=(0.25,0.35,0.2,0.2)$；

步骤 2：利用 SHPM 算子对决策矩阵 $(\alpha_{ij})_{mn}$ 的第 i 行($i=1,2,3,4$)进行集成，获得每个方案的综合评价值，为了方便这里以 $\lambda=1$ 为例进行计算，则

$$\alpha_1=(0.62,0.42),\quad \alpha_2=(0.66,0.49),$$

$$\alpha_3=(0.50,0.38),\quad \alpha_4=(0.59,0.39);$$

步骤 3：根据公式(1)计算 $\alpha_i\,(i=1,2,3,4)$ 的得分函数值如下：

$$s(\alpha_1)=(0.62^2-0.42^2)^{0.5}=0.456,\quad s(\alpha_2)=(0.66^2-0.49^2)^{0.5}=0.442,$$

$$s(\alpha_3)=(0.50^2-0.38^2)^{0.5}=0.325,\quad s(\alpha_4)=(0.59^2-0.39^2)^{0.5}=0.443;$$

步骤 4： 根据定义 2.2 对方案 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 得分进行排序，由于 $s(\alpha_1) > s(\alpha_4) > s(\alpha_2) > s(\alpha_3)$，从而得到 $A_1 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3$，所以最佳方案为 A_1。

此外，为了更好地研究参数 γ 对决策结果的影响，我们给出得分函数随参数变化曲线如下图 1。

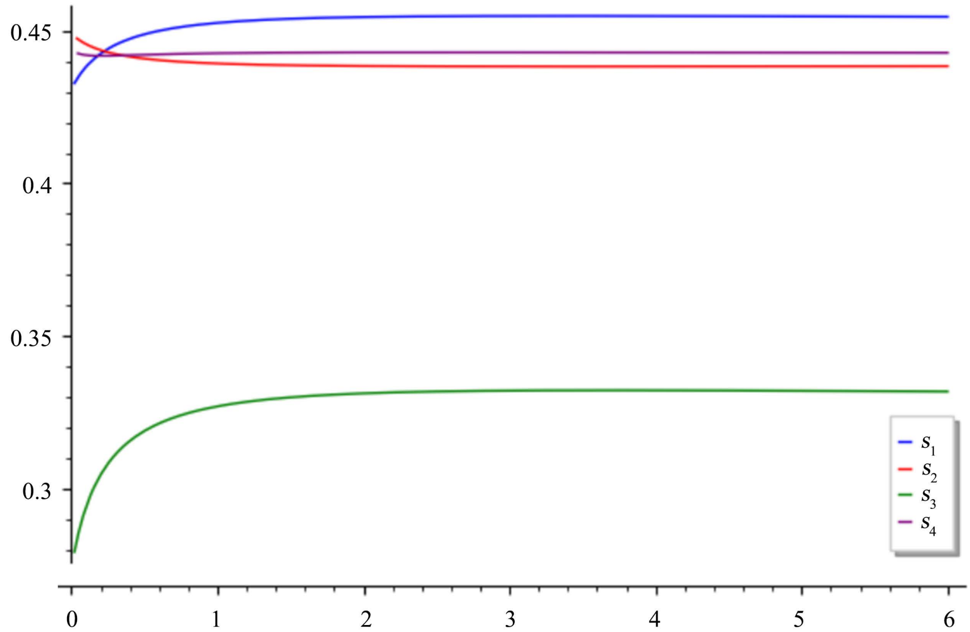

Figure 1. Score varies with parameters γ
图 1. 得分函数随参数 γ 变化曲线

从图 1 我们发现随着参数从小变大用 SHPM 算子得出的排序结果有如下种情况：

1) $A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$

2) $A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$

3) $A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$

4) $A_1 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3$

由分析可知，根据不同的 γ 值，我们用 SHPM 算子形成的决策方法进行优劣排序，γ 值可以用来体现决策者的心态，专家或决策者可以根据自身的兴趣和实际需求，来选择适当的值。从 γ 曲线稳定性来看，A_1 最优。

5.2. 对比分析

由于 SHPM 算子中参数 $\gamma = 1$ 时就是文献[10]中提出的 SPFWG 算子，当 SHPM 算子无法包含定义 2.1 中 Yager 教授给出的另外两种算子，因此，下面我们将利用这两种算子计算本文中的例子来验证提出方法的正确性和实用性。限于篇幅，这里我们只给出结果如下：

1) 用 PFWG^{Y} 算子集成结果为 $s(\alpha_1) = 0.4352$，$s(\alpha_2) = 0.4406$，$s(\alpha_3) = 0.3022$，$s(\alpha_4) = 0.4345$，所以排序为 $A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$；

2) 用 PFWA^{Y} 算子集成结果为 $s(\alpha_1) = 0.7706$，$s(\alpha_2) = 0.7204$，$s(\alpha_3) = 0.6026$，$s(\alpha_4) = 0.7629$ 所以排序为 $A_1 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3$。

上述结果分别与 SHPM 算子中参数 $\gamma = 0$ 和 $\gamma = 1$ 时结果一致，这说明本文提出的算法得到的结果是有效的。

6. 结论

针对毕达哥拉斯模糊集，研究了基于 Hamacher 三角模的对称集成算子，并将其应用于多属性决策问题中。首先定义了毕达哥拉斯模糊数的对称运算规则，验证了它的一些性质，提出了基于 Hamacher 三角模的 Hamacher 对称集成算子，并研究了这些算子具有的性质，如幂等性，有界性和单调性。之后，通过示例根据不同的参数得出排序结果和已有对称算子的结果对比，进而验证了文中所提方法的有效性和实用性。本文创新点：1) 提出了带参数的具有对称性的集成算子，既能体现决策者偏好，又能公平对待集成信息中的隶属度和非隶属度信息；2) 提出了一种决策方法来解决多属性决策问题。文中所提的方法为解决决策问题提供了一种新思路。这些方法可进一步应用到投资决策、风险管理、项目评估等诸多领域。

基金项目

临沂大学大学生创新创业训练计划项目资助(X202210452039)，临沂大学教学质量与教学改革工程项目资助(K2022SZ025)，山东省自然科学基金(ZR2017MG027)。

参考文献

[1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] Atanassov, K.T. (1986) Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, 87-96. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3

[3] Atanassov, K.T. (1994) Operators over Interval Valued Intultionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **64**, 159-174. https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90331-X

[4] 王坚强, 张忠. 基于直觉模糊数的信息不完全的多准则规划方法[J]. 控制与决策, 2008, 23(10): 1145-1148.

[5] Liu, P.D. and Jin, F. (2012) Methods for Aggregating Intuitionistic Uncertain Linguistic Variables and Their Application to Group Decision Making. *Information Sciences*, **205**, 58-71. https://doi.org/10.1016/j.ins.2012.04.014

[6] Yager, R.R. (2014) Pythagorean Membership Grades in Muticriteria Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **22**, 958-965. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2013.2278989

[7] Gou, X.J., Xu, Z.S. and Ren, P.J. (2015) The Properties of Continuous Pythagorean Fuzzy Information. *International Journal of Intelligent Systems*, **31**, 401-424.

[8] Zhang, X.L. (2016) Multicriteria Pythagorean Fuzzy Decision Analysis: A Hierarchical Qualiflex Approach with the Closeness Index-Based Ranking Methods. *Information Sciences*, **330**, 104-124. https://doi.org/10.1016/j.ins.2015.10.012

[9] Peng, X. and Garg, H. (2019) Multiparametric Similarity Measures on Pythagorean Fuzzy Sets with Applications to Pattern Recognition. *Applied Intelligence*, **49**, 4058-4096. https://doi.org/10.1007/s10489-019-01445-0

[10] Ma, Z. and Xu, Z. (2016) Symmetric Pythagorean Fuzzy Weighted Geometric/Averaging Operators and Their Application in Multicriteria Decision-Making Problems. *International Journal of Intelligent Systems*, **31**, 1198-1219. https://doi.org/10.1002/int.21823

[11] Liang, D., Zhang, Y., Xu, Z. and Darko, A.P. (2018) Pythagorean Fuzzy Bonferroni Mean Aggregation Operator and Its Accelerative Calculating Algorithm with the Multithreading. *International Journal of Intelligent Systems*, **33**, 615-633. https://doi.org/10.1002/int.21960

[12] Garg, H. (2019) Novel Neutrality Operation-Based Pythagorean Fuzzy Geometric Aggregation Operators for Multiple Attribute Group Decision Analysis. *International Journal of Intelligent Systems*, **34**, 2459-2489. https://doi.org/10.1002/int.22157

[13] Zhu, J. and Li, Y. (2018) Pythagorean Fuzzy Muirhead Mean Operators and Their Application in Multiple-Criteria Group Decision-Making. *Information*, **9**, Article 142. https://doi.org/10.3390/info9060142

[14] Peng, D. and Yang, Y. (2019) Multi-Attribute Decision Making Method Based on Pythagorean Fuzzy Frank Operator. *Journal of Computer Applications*, **39**, 316-322.

[15] 杜玉琴, 侯福均, 翟玉冰, 于倩. Pythagorean 三角模糊语言 Hamacher 集结算子及其应用[J], 运筹与管理, 2018, 27(3): 104-112.

[16] Abdullah, L., Rosanisah, W. and Mohd, W. (2019) Pythagorean Fuzzy Hamacher Choquet Integral Operators and Their Application to Multi-Criteria Decision Making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **37**, 1259-1274. https://doi.org/10.3233/JIFS-182704

[17] Beliakov, G., Pradera, A. and Calvo, T. (2007) Aggregation Functions: A Guide for Practitioners. Springer, Berlin.