Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(4), 1753-1761
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124182

Hans汉斯

磁场作用下Vlasov-Euler-Fokker-Planck解的全局存在性和正则性

宋颖聪

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年3月24日；录用日期：2023年4月18日；发布日期：2023年4月27日

摘 要

本文研究了磁场作用下不可压缩Euler方程与Vlasov-Fokker-Planck方程通过斯托克斯阻力耦合而成的偏微分方程组系统。得到了接近平衡状态时经典解的整体时间存在性、正则性，并且得到了此系统具有瞬时的平滑效果。证明方法采用能量估计。

关键词

不可压，经典解，正则性，能量估计

Global Existence and Regularity of Vlasov-Euler-Fokker-Planck Solution with Magnetic Field

Yingcong Song

School of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 24th, 2023; accepted: Apr. 18th, 2023; published: Apr. 27th, 2023

Abstract

In this paper, we consider the partial differential equation system of the incompressible Euler equation and the Vlasov-Fokker-Planck equation coupled by Stokes drag force. The global existence and regularity of classical solutions near equilibrium are obtained and we get the system has an instantaneous smoothing effect. Energy estimation is used to prove the method.

文章引用: 宋颖聪. 磁场作用下 Vlasov-Euler-Fokker-Planck 解的全局存在性和正则性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1753-1761. DOI: 10.12677/aam.2023.124182

Keywords

Incompressible, Classical Solution, Regularity, Energy Estimation

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文考虑周期边界条件 $x\in[-\pi,\pi]^3=\mathrm{T}^3$ 上的偏微分方程组经典解的全局时间存在性和正则性：

$$\begin{cases}\partial_t F+v\cdot\nabla_x F=\nabla_v\cdot\left[(v-u)F+\nabla_v F\right],\\ \nabla_x\cdot u=0,\nabla_x\cdot H=0,\\ \partial_t u+u\cdot\nabla_x u+\nabla_x p=\int_{\mathbb{R}^3}(v-u)F\mathrm{d}v+H\cdot\nabla_x H-\frac{1}{2}\nabla_x|H|^2,\\ \partial_t H-\Delta_x H+u\cdot\nabla_x H-H\cdot\nabla_x u=0.\end{cases}\tag{1.1}$$

初始值为：

$$u(0,x)=u_0,F(0,x)=F_0,H(0,x)=H_0,\nabla_x\cdot u_0=0,\nabla_x\cdot H_0=0\text{。}$$

其中 $(t,x,v)\in\mathbb{R}^+\times\mathrm{T}^3\times\mathbb{R}^3$， $H(t,x)$、 $u(t,x)\in\mathbb{R}^3$、 $p(t,x)$、 $F=F(t,x,v)\geq 0$ 分别表示磁场、速度、压强、密度分布函数。假设粒子的存在不影响流体的密度，粒子之间的碰撞忽略。两相之间的耦合只是由于阻力，相对速度为 $u-v$ 。在这里，我们限制在最简单的情况下，相对于相对速度阻力是线性的。

事实上，根据流体的物理性质，可以使用大量的模型来模拟喷雾：可压缩或不可压缩流体，粘性或无粘性流体方程，有或没有作用于颗粒的热扩散……无论如何，数学分析仍然很困难，因为系统总是耦合非线性旋转方程的未知数，而这些未知数不依赖于同一组变量。关于系统(1.1)，Hamdache [1]研究了没有 Fokker-Planck 项的弱解的全局存在性。Boudin，Desvillettes，Grandmont 和 Moussa [2]重新讨论了在没有对流的情况下弱解的全局存在性。可压缩情况 Mellet 和 Vasseur [3]进行了研究。Mellet 和 Vasseur [4]研究了标度和稳定性问题。Baranger 和 Desvillettes [5]研究局部的时间适定性。

本文采取了不同的策略。我们首先讨论 $u=0,F=V\mathrm{e}^{-|v|^2/2},V\geq 0$ 是(1.1)的平衡解。然后我们感兴趣的是平衡态的扰动状态下的解。更具体地说，我们考虑了标准化的麦克斯韦变换：

$$M(v)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}|\mathrm{T}|^3}\mathrm{e}^{-v^2/2},$$

令 $F=M+M^{1/2}f$ ，则原系统转换为

$$\begin{cases}\partial_t f+v\cdot\nabla_x f+u\cdot\nabla_v f-\frac{1}{2}u\cdot vf-u\cdot vM^{1/2}=-\frac{|v|^2}{4}f+\frac{3}{2}f+\Delta_v f,\\ \nabla_x\cdot u=0,\nabla_x\cdot H=0,\\ \partial_t u+u\cdot\nabla_x u+\nabla_x p+u+u\int_{\mathbb{R}^3}M^{1/2}f\mathrm{d}v=\int_{\mathbb{R}^3}vM^{1/2}f\mathrm{d}v+H\cdot\nabla_x H-\frac{1}{2}\nabla_x|H|^2,\\ \partial_t H-\Delta_x H+u\cdot\nabla_x H-H\cdot\nabla_x u=0.\end{cases}\tag{1.2}$$

则相应的初始条件变为 $u(0,x)=u_0,f(0,x)=f_0,H(0,x)=H_0$ 。

且满足

$$\int_{\mathrm{T}^3} u_0 \mathrm{d}x + \int_{\mathrm{T}^3\times\mathbb{R}^3} vM^{1/2} f_0 \mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0. \tag{1.3}$$

这个假设对分析至关重要。由动量守恒知，这意味着每个扰动有一个消失的动量，因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathrm{T}^3} u\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{T}^3\times\mathbb{R}^3} vM^{1/2} f\mathrm{d}v\mathrm{d}x\right) = 0.$$

同样的，如果我们假设

$$\int_{\mathrm{T}^3\times\mathbb{R}^3} M^{1/2} f_0 \mathrm{d}v\mathrm{d}x = 0. \tag{1.4}$$

那么扰动就不会影响整体质量守恒。

本文的新颖之处在于证明解的存在性时通过构造近似问题的解和证明对近似参数一致的估计得到。并且我们假设存在一个正时间 T，使得系统(1.2)在$[0,\mathrm{T}]$上有一个唯一的足够光滑的解，我们将给出这种解的先验估计获得关于 T 的一致估计再构造全局解。对于正则性分析，我们利用了 Fokker-Planck 算子的良好结构，它避免了对分布时刻的任何估计。

2. 预备知识

2.1. 符号说明

设 $a=(a_1,a_2,a_3)\in \mathrm{N}^3$ 是一个多指标，多指标的长度定义为$|a|=a_1+a_2+a_3$。∂^a 表示相应的空间导数 $\partial^a=\partial_{x_1}^{a_1}\partial_{x_2}^{a_2}\partial_{x_3}^{a_3}$。类似的，速度变量可表示为$\partial_v^b=\partial_{v_1}^{b_1}\partial_{v_2}^{b_2}\partial_{v_3}^{b_3}$。指数 a,b 满足 $b_i\le a_i$，且

$$\binom{a}{b}=\prod_{i=1}^{3}\frac{a_i!}{b_i!(a_i-b_i)!}.$$

符号$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示在 $\mathbb{R}^3$ 或者 $\mathrm{T}^3\times\mathbb{R}^3$ 上的标准的 L^2 内积：

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathrm{T}^3} fg\mathrm{d}x \text{ 或者 } \langle f,g\rangle=\int_{\mathrm{T}^3\times\mathbb{R}^3} fg\mathrm{d}v\mathrm{d}x.$$

$\|\cdot\|_{L^2}$ 表示相应的范数，同样，给定 $s\in\mathrm{N}$，$\|\cdot\|_{H^s}$ 表示在 $\mathbb{R}^3$ 或者 $\mathrm{T}^3\times\mathbb{R}^3$ 上基于所有变量直到 s 阶的所有导数的 L^2 空间上的 Sobolev 范数。对于函数 $\varphi:\mathrm{T}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，关于偏导的 Sobolev 范数 $|\varphi|_s=\left\{\int_{\mathrm{T}^3\times\mathbb{R}^3}\sum_{|a|\le s}\left|\partial^a\varphi\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right\}^{\frac{1}{2}}$。最后，我们使用这样一个约定，即同一个字母 C 表示的常量的值对于数据是一致的。

定义平均流体速度 $\bar{u}(t)\equiv\frac{1}{|\mathrm{T}|^3}\int_{\mathrm{T}^3} u(t,x)\mathrm{d}x$。满足

$$\bar{u}_t+\bar{u}+\frac{1}{|\mathrm{T}|^3}\int_{\mathrm{T}^3} u\int_{\mathbb{R}^3} M^{1/2} f\mathrm{d}v\mathrm{d}x-\frac{1}{|\mathrm{T}|^3}\int_{\mathrm{T}^3\times\mathbb{R}^3} vM^{1/2} f\mathrm{d}v\mathrm{d}x=0.$$

进而，由动量守恒定律和兼容性条件可知

$$-\int_{\mathrm{T}^3\times\mathbb{R}^3} vM^{1/2} f\mathrm{d}v\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{T}^3} u\mathrm{d}x.$$

因此 $\bar{u}$ 的发展方程改写为

$$\bar{u}_t+2\bar{u}+\frac{1}{|\mathrm{T}|^3}\int_{\mathrm{T}^3} u\int_{\mathbb{R}^3} M^{1/2} f\mathrm{d}v\mathrm{d}x=0. \tag{2.1}$$

2.2. 主要结论

定理 2.1：设 $F = M + M^{1/2} f \ge 0$、$s \ge 2$ 且为整数，(u_0, f_0, H_0) 满足系统(1.2)，则存在一个充分小的常数 ε 使得，当

$$\|u_0\|_{H^s}^2 + |f_0|_s^2 + \|H_0\|_{H^s}^2 \le \varepsilon \tag{2.2}$$

时，系统(1.2)有唯一的全局经典解 (u, f, H) 满足

$$\sup_{t\ge 0}\left(\|u(t)\|_{H^s}^2 + |f(t)|_s^2 + \|H(t)\|_{H^s}^2\right) + \int_0^t \left[|\overline{u}|^2 + \|\nabla_x u\|_{H^s}^2 + \left|M^{1/2}u - \left(\nabla_v f + \frac{v}{2} f\right)\right|_s^2\right] \mathrm{d}\tau \le C\varepsilon. \tag{2.3}$$

此外，当 $s \ge 3$ 时，对于任意的 $t \ge t_0 > 0$，有

$$\begin{aligned}&\sup_{t\ge 0}\left(\|u(t)\|_{H^s}^2 + \|f(t)\|_{H^s}^2 + \|H(t)\|_{H^s}^2 + \|vf(t)\|_{H^{s-1}}^2\right)\\ &+\int_t^{t+1}\left[\left\|\nabla_v f + \frac{v}{2} f\right\|_{H^s}^2 + \left\|v\otimes\nabla_v f + \frac{v\otimes v}{2} f\right\|_{H^{s-1}}^2\right]\mathrm{d}\tau \le C(t_0, \varepsilon).\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $C(t_0, \varepsilon)$ 在 t_0 趋于 0 时发生爆破。

3. 全局存在性和正则性定理

3.1. 全局存在性

众所周知，非线性偏微分方程的解的存在性可以通过构造近似问题的解和证明与近似参数一致的估计来得到。对于系统(1.2)，我们可以通过 Galerkin 近似来构造这样的近似解，就像[6]一样。本文中我们假设存在一个正时间 T，使得(1.2)在 $[0,T]$ 上有一个唯一的足够光滑的解，我们将给出这种解的先验估计，进而得到关于 T 的一致估计，再构造全局解。

性质 3.1：设 $s \ge 2$，(u, f, H) 为系统(1.2)的一个解，则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_{H^s}^2 + |f|_s^2 + \|H\|_{H^s}^2 + |\overline{u}|^2\right) + \|\nabla u\|_{H^s}^2 + 2|\overline{u}|^2 + \left|uM^{1/2} - \nabla_v f - \frac{v}{2} f\right|_s^2\\ &\le C\left(|f|_s + \|u\|_{H^s}\right)\left(\|\nabla u\|_{H^s}^2 + |\overline{u}|^2 + \left|uM^{1/2} - \nabla_v f - \frac{v}{2} f\right|_s^2\right).\end{aligned} \tag{3.1}$$

证明：设 $s \ge 2$ 为正整数，$a \in \mathrm{N}^3$，$|a| \le s$。将 ∂^a 作用于(1.2)，然后将得到的方程乘以 $\partial^a u$，在 T^3 上积分。我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial^a u\|_{L^2}^2 + \left\langle \partial^a (u\cdot\nabla u), \partial^a u\right\rangle + \|\partial^a u\|_{L^2}^2 + \left\langle \partial^a \left(u\int_{\mathbb{R}^3} M^{1/2} f \mathrm{d}v\right), \partial^a u\right\rangle\\ &-\left\langle \int_{\mathbb{R}^3} vM^{1/2}\partial^a f \mathrm{d}v, \partial^a u\right\rangle + \left\langle \partial^a (H\cdot\nabla_x H), \partial^a u\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \partial^a \left(\nabla_x |H|^2\right), \partial^a u\right\rangle = 0,\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial^a f\|_{L^2}^2 + \left\langle \partial^a \left(u\cdot\nabla_v f - \frac{1}{2} u\cdot vf\right), \partial^a f\right\rangle - \left\langle \partial^a \left(u\cdot vM^{1/2}\right), \partial^a f\right\rangle = -\left\|\nabla_v \partial^a f + \frac{v}{2}\partial^a f\right\|_{L^2}^2, \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial^a H\|_{L^2}^2 + \left\langle \partial^a (u\cdot\nabla_x H), \partial^a H\right\rangle - \left\langle \partial^a (H\cdot\nabla_x u), \partial^a H\right\rangle = 0, \tag{3.4}$$

注意 $\nabla\cdot u = 0$，因此可以通过分部积分得 $\langle u\cdot\nabla_x u, u\rangle = 0$。由于 $s \ge 2 > 3/2$，则有

$$\left|\left\langle \partial^a (u\cdot\nabla_x u), \partial^a u\right\rangle\right| = \left|\left\langle \partial^a (u\cdot\nabla_x u) - u\cdot\partial^a\nabla_x u, \partial^a u\right\rangle\right| \le C\|u\|_{H^s}\|\nabla u\|_{H^s}^2.$$

由 Hölder 不等式可得：

$$\left\langle \partial^a\left(H\cdot\nabla_x H\right),\partial^a u\right\rangle=\sum_{i,j}\sum_{b\le a}C_a^b\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial^{a-b}H_i\partial_i\left(\partial^b H_j\right)\right)\partial^a u_j\mathrm{d}x\le C\|u\|_{H^{s-1}}\|H\|_{H^s}^2,$$

$$\frac{1}{2}\left\langle \partial^a\left(\nabla_x|H|^2\right),\partial^a u\right\rangle\le C\left\|\partial^a u\right\|_{L^2}\left\|\partial^a\left(\nabla_x|H|^2\right)\right\|_{L^2},$$

$$\left\langle \partial^a\left(u\cdot\nabla_x H\right),\partial^a H\right\rangle=\sum_{b<a}C_a^b\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial^{a-b}u\cdot\nabla_x\partial^b H\right)\cdot\partial^a H\mathrm{d}x\le C\left\|\partial^a u\right\|_{L^2}\|\nabla_x H\|_{H^{s-1}}^2,$$

$$\left\langle \partial^a\left(H\cdot\nabla_x u\right),\partial^a H\right\rangle=\sum_{i,j}\sum_{b\le a}C_a^b\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial^{a-b}H_i\partial_i\left(\partial^b u_j\right)\right)\partial^a H_j\mathrm{d}x\le C\|\nabla_x u\|_{L^2}\|H\|_{H^{s-1}}^2,$$

此外，由于 M 是标准化的并且满足 $\nabla_v M^{1/2}=-\frac{v}{2}M^{1/2}$，我们通过分部积分得到

$$\left\|\partial^a u\right\|_{L^2}^2-2\left\langle \partial^a\left(u\cdot vM^{1/2}\right),\partial^a f\right\rangle+\left\|\nabla_v\partial^a f+\frac{v}{2}\partial^a f\right\|_{L^2}^2=\left\|\partial^a uM^{1/2}-\nabla_v\partial^a f-\frac{v}{2}\partial^a f\right\|_{L^2}^2,$$

则可得

$$\begin{aligned}&\left\langle \partial^a\left(u\int_{\mathbb{R}^3}M^{1/2}f\mathrm{d}v\right),\partial^a u\right\rangle+\left\langle \partial^a\left(u\cdot\nabla_v f-\frac{1}{2}u\cdot vf\right),\partial^a f\right\rangle\\&=\left\langle \partial^a\left(uf\right),\partial^a uM^{1/2}-\nabla_v\partial^a f-\frac{v}{2}\partial^a f\right\rangle\end{aligned}$$

将以上等式相加可得；

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\partial^a u\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial^a f\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial^a H\right\|_{L^2}^2\right)+\left\|\partial^a uM^{1/2}-\nabla_v\partial^a f-\frac{v}{2}\partial^a f\right\|_{L^2}^2\\&\le C\|u\|_{H^s}\|\nabla_x u\|_{H^s}^2+C\|u\|_{H^{s-1}}\|H\|_{H^s}^2+C\left\|\partial^a u\right\|_{L^2}\left\|\partial^a\left(\nabla_x|H|^2\right)\right\|_{L^2}\\&\quad+C\left\|\partial^a u\right\|_{L^2}\|\nabla_x H\|_{H^{s-1}}^2+C\|\nabla_x u\|_{L^2}\|H\|_{H^{s-1}}^2\\&\quad+\left|\left\langle \partial^a\left(uf\right),\partial^a uM^{1/2}-\nabla_v\partial^a f-\frac{v}{2}\partial^a f\right\rangle\right|,\end{aligned}\tag{3.5}$$

由于 $s\ge 2$，我们得到(参见[7]引理 3.1 的类似估计)

$$\left\|\partial^a\left(uf\right)\right\|_{L^2}\le|uf|_s\le C\|u\|_{H^s}|f|_s\le C\left(\|u\|_{L^2}+\|\nabla_x u\|_{H^{s-1}}\right)|f|_s,$$

现在，利用平均速度 $\overline{u}$，通过 Poincaré-Wirtinger 不等式，存在一个常数 C_p，使得

$$\|u\|_{L^2}\le\|u-\overline{u}\|_{L^2}+\sqrt{\left|\mathrm{T}^3\right|}|\overline{u}|\le C_p\left(\|\nabla_x u\|_{L^2}+|\overline{u}|\right)\le C_p\left(|\overline{u}|+\|\nabla_x u\|_{H^{s-1}}\right),$$

因为 $s-1\ge 0$，因此可以得到 $\left\|\partial^a\left(uf\right)\right\|_{L^2}\le C\left(|\overline{u}|+\|\nabla_x u\|_{H^{s-1}}\right)|f|_s$，

将(3.5)对 a 求和可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_{H^s}^2+|f|_{H^s}^2+\|H\|_{H^s}^2\right)+\left|uM^{1/2}-\nabla_v f-\frac{v}{2}f\right|_s^2\\&\le C\left(|f|_s+\|u\|_{H^s}+\|H\|_{H^s}\right)\left(\|\nabla u\|_{H^s}^2+|\overline{u}|^2+\left|uM^{1/2}-\nabla_v f-\frac{v}{2}f\right|_s^2\right),\end{aligned}\tag{3.6}$$

它仍然需要推导出平均流体速度的估计值。为此，我们回到(2.1)。我们推导出以下估计

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\bar{u}|^2+2|\bar{u}|^2 &= -\frac{\bar{u}}{|\mathbb{T}^3|}\cdot\int_{\mathbb{T}^3}u\int_{\mathbb{R}^3}M^{1/2}f\mathrm{d}v\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{|\mathbb{T}^3|}\|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2}|\bar{u}| \\
&\le C\|f\|_{L^2}\left(\|\nabla_x u\|_{L^2}^2+|\bar{u}|^2\right),
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

最后一步应用了 Poincaré-Wirtinger 不等式。结合(3.6)和(3.7)，我们得到(3.1)，这就完成了对性质 3.1 的证明。

定理 2.1 的证明(存在性(2.3))：设初始数据具有充分小的条件，(2.2)与 Sobolev 嵌入 $H^2(\mathbb{T}^3)\subset L^1(\mathbb{T}^3)$ 的相结合可得，当 $C_0>0$ 时

$$
\|u_0\|_{H^s}^2+|\bar{u}_0|^2+|f_0|_s^2+\|H_0\|_{H^s}^2\le C_0\varepsilon, \tag{3.8}
$$

然后利用时间的连续性，我们定义

$$
T^*\equiv\sup\left\{\tilde{T}\ge 0:\sup_{0\le t<\tilde{T}}\left(\|u(t)\|_{H^s}^2+|\bar{u}|^2+|f(t)|_s^2+\|H(t)\|_{H^s}^2\right)\le 2C_0\varepsilon\right\}. \tag{3.9}
$$

则

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_{H^s}^2+|f|_s^2+\|H\|_{H^s}^2+|\bar{u}|^2\right) \\
&+\left(1-C\left(\|u\|_{H^s}^2+|f|_s^2+\|H\|_{H^s}^2\right)\right)\left(\|\nabla u\|_{H^s}^2+2|\bar{u}|^2+\left|uM^{1/2}-\nabla_v f-\frac{v}{2}f\right|_s^2\right)\le 0.
\end{aligned}
$$

我们把 ε 设为 $0<\varepsilon<1/(2CC_0)$。因此，对于 $0\le t\le T^*$，我们得到

$$
1-C\left(\|u\|_{H^s}^2+|f|_s^2+\|H\|_{H^s}^2\right)>0
$$

且当 $0\le t\le T^*$ 时有

$$
\|u\|_{H^s}^2+|f|_s^2+\|H\|_{H^s}^2+|\bar{u}|^2\le\|u_0\|_{H^s}^2+|f_0|_s^2+\|H_0\|_{H^s}^2+|\bar{u}_0|^2\le C_0\varepsilon,
$$

这样，定理 2.1 解的存在部分的证明就完成了。

3.2. Sobolev 准则的估计

到目前为止，我们只得到了粒子分布函数的一个部分正则性，因为范数 $|f|_s$ 只包含空间导数。我们希望加强正则性分析，表明对于正时间，f 相对于空间变量的正则性可以转化为速度变量。我们利用了 Fokker-Planck 算子的良好结构，它避免了对分布时刻的任何估计，就像在[8]中对哑铃模型所做的那样。

定义 3.1：考虑非负连续函数 $C_+(\mathbb{R}_+)\equiv\{f\in C(\mathbb{R}_+):f\ge 0\}$，则对任意 $R,r>0$ 令

$$
\Re(R,r)\equiv\left\{f\in C_+(\mathbb{R}_+):\int_t^{t+1}f(\tau)\mathrm{d}\tau\le R,\forall t\ge r\right\}.
$$

引理 3.1：设 $\theta(t),\omega(t)\in\Re(R,r),\eta(t)\in C_+(\mathbb{R}_+)$ 满足

$$
\theta'(t)+\eta(t)\le R(1+\omega(t)). \tag{3.10}
$$

则对于 $t_0>r$，存在与 R,r,t_0 有关的常数 $\tilde{R}$ 使得 $\sup_{t\ge t_0}\theta(t)\le\tilde{R},\eta(t)\in\Re(\tilde{R},t_0)$ 成立。

证明：我们首先证明 θ 上的一致估计。设 n 是满足 $t_0<r+n$ 的最小整数。由于 $\theta\in\Re(R,r)$，因此我

们有

$$\int_r^{t_0}\theta(\tau)\mathrm{d}\tau \le \int_r^{r+n}\theta(\tau)\mathrm{d}\tau \le nR.$$

由中值定理知，存在 $\tau_0 \in]r,t_0[$ 使得 $\theta(\tau_0)\le \dfrac{nR}{t_0-r}$。

则对于 $t\in[t_0,\tau_0+n+1]$ 有

$$\begin{aligned}\theta(t)&=\theta(\tau_0)+\int_{\tau_0}^{t}\theta'(\tau)\mathrm{d}\tau\\&\le \theta(\tau_0)+\int_{\tau_0}^{\tau_0+n+1}R\big(1+\omega(\tau)\big)\mathrm{d}\tau\\&\le \frac{nR}{t_0-r}+(n+1)\big(R+R^2\big),\end{aligned}$$

通过(3.10)和 ω 是非负的可得，对于 $t\ge\tau_0+n+1>r+1$，由于 $\theta\in\Re(R,r)$，则有 $\int_{t-1}^{t}\theta(\tau)\mathrm{d}\tau\le R$。

因此存在 $\tilde{t}\in[t-1,t[$ 使得 $\theta(\tilde{t})\le R$。对(3.10)在 $[\tilde{t},t]$ 上积分有

$$\begin{aligned}\theta(t)&=\theta(\overline{t})+R\int_{\overline{t}}^{t}\big(1+\omega(\tau)\big)\mathrm{d}\tau\\&\le R+R\int_{t-1}^{t}\big(1+\omega(\tau)\big)\mathrm{d}\tau\\&\le R+R(R+1),\end{aligned}$$

其中我们使用了 $\overline{t}$ 的定义，还有 $\omega\in\Re(R,r),\eta\ge 0$。

结合所得到的估计，我们得到

$$\sup_{\tau\ge t_0}\theta(\tau)\le\max\left(2R+R^2,\frac{nR}{t_0-r}+(n+1)\big(R+R^2\big)\right):=R_1.$$

最后，让我们在 $[t,t+1]$ 上对(3.10)积分，则对任意 $t\ge t_0$ 有

$$\int_t^{t+1}\eta(\tau)\mathrm{d}\tau\le\theta(t)+R\left[\int_t^{t+1}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\le R_1+R(R+1)\equiv\tilde{R}$$

引理 3.1 的证明到此结束。

引理 3.2：设 $s>3$，(u,f,H) 为系统(1.2)的解，满足当 $t\ge 0$ 时有

$$\sup_{t\ge 0}\left(\|u(t)\|_{H^s}^2+|f(t)|_s^2+\|H(t)\|_{H^s}^2\right)+\int_t^{t+1}\left|\nabla_v f+\frac{v}{2}f\right|_s^2\mathrm{d}\tau\le A. \tag{3.11}$$

则当 $t_0>0,t\ge t_0$ 时，有

$$\sup_{t\ge 0}\left(\left|\partial_{v_i}f\right|_{s-1}^2+\left|v_i f\right|_{s-1}^2\right)+\int_t^{t+1}\left[\left|\nabla_v\partial_{v_i}f+\frac{v}{2}\partial_{v_i}f\right|_{s-1}^2+\left|v\otimes\nabla_v f+\frac{v\otimes v}{2}f\right|_{s-1}^2\right]\mathrm{d}\tau\le C(t_0,A). \tag{3.12}$$

根据引理 3.2，我们现在可以通过一个归纳论证给出 f 的混合导数的估计。

引理 3.3：在引理 3.2 的假设下，对于任意 $t\ge t_0>0$，我们有

$$\begin{aligned}&\sup_{t\ge 0}\left(\|u(t)\|_{H^s}^2+|f(t)|_s^2+\|H(t)\|_{H^s}^2+\|vf(t)\|_{s-1}^2\right)\\&+\int_t^{t+1}\left[\left\|\nabla_v f+\frac{v}{2}f\right\|_{H^s}^2+\left\|v\otimes\nabla_v f+\frac{v\otimes v}{2}f\right\|_{s-1}^2\right]\mathrm{d}\tau\le C(t_0,A).\end{aligned} \tag{3.13}$$

证明：我们希望得到 $|a|+|b|\le s$ 时的混合偏导估计 $\partial_x^a\partial_v^b f$，由引理 3.2 知，当 $|a|+|b|\le s$、$|b|\le 1$ 时，

我们有

$$\sup_{t\ge t_0>0}\left\|\partial_x^a\partial_v^b f\right\|_{L^2}^2+\int_t^{t+1}\left[\left\|\nabla_v\left(\partial_x^a\partial_v^b f\right)+\frac{v}{2}\partial_x^a\partial_v^b f\right\|_{L^2}^2\right]\mathrm{d}\tau\le C\left(t_0,A\right). \tag{3.14}$$

对于 $N\in\{1,\cdots,s\}$，我们定义 $P(N)$ 为下列性质：

对于所有 $t_1>0$，都存在一个常数 $C(t_1,A)$，这样：

1) 对于所有多指标 a 和 b，使 $|a|+|b|\le s$， $0\le|b|\le N<s$，

$$\sup_{t\ge t_1>0}\left\|\partial_x^a\partial_v^b f\right\|_{L^2}^2+\int_t^{t+1}\left\|\nabla_v\left(\partial_x^a\partial_v^b f\right)+\frac{v}{2}\partial_x^a\partial_v^b f\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\le C\left(t_1,A\right).$$

2) 对于 $|a|+|b|\le s-1, 0\le|b|\le N-1<s, t\ge t_1>0$ 的所有多指标 a 和 b，

$$\sup_{t\ge t_1>0}\left\|v\partial_x^a\partial_v^b f\right\|_{L^2}^2+\int_t^{t+1}\left\|v\otimes\nabla_v\left(\partial_x^a\partial_v^b f\right)+\frac{v\otimes v}{2}\partial_x^a\partial_v^b f\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\le C\left(t_1,A\right).$$

证明利用了归纳法，当 $|b|=s$ 时，这个过程停止，得到(3.13)，这就完成了引理 3.3 的证明。

定理 2.1 的最后证明((2.4)的证明)：根据引理 3.3，我们只剩下证明(3.11)成立。实际上，由(2.3)知，只需证明对任意 $t\ge 0$ 存在正常数 A 满足

$$\int_t^{t+1}\left|\nabla_v f+\frac{v}{2}f\right|_s^2\mathrm{d}\tau\le A. \tag{3.15}$$

根据 $\left|\nabla_v f\pm\frac{v}{2}f\right|_s^2=\left|\nabla_v f\mp\frac{v}{2}f\right|_s^2\mp 3|f|_s^2$。可由(3.3)推导出

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|f|_s^2+\left|\nabla_v f+\frac{v}{2}f\right|_s^2\le C\|u\|_{H^s}|f|_s\left(1+\left|\nabla_v f+\frac{v}{2}f\right|_s\right).$$

利用基本不等式 $|\alpha\beta|\le\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\beta^2}{2}$ 我们得出结论：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|f|_s^2+\left|\nabla_v f+\frac{v}{2}f\right|_s^2\le C\|u\|_{H^s}|f|_s\left(1+\|u\|_{H^s}|f|_s\right).$$

在 $[t,t+1]$ 上对这个不等式进行积分可以得到

$$\int_t^{t+1}\left|\nabla_v f+\frac{v}{2}f\right|_s^2\mathrm{d}\tau\le C\varepsilon(1+\varepsilon).$$

由此证明了(3.15)，并总结了定理 2.1 的证明。

4. 总结

本文得到了磁场作用下不可压缩磁流体动力学方程组的解的全局存在性和正则性，并得到了系统具有瞬时的平滑效果。后续可继续进行解的衰减估计，这对研究具有初值的不可压缩磁流体动力学方程问题有重要意义。

参考文献

[1] Hamdache, K. (1998) Global Existence and Large Time Behaviour of Solutions for the Vlasov-Stokes Equations. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **15**, 51-74. https://doi.org/10.1007/BF03167396

[2] Boudin, L., Desvillettes, L., Grandmont, C. and Moussa, A. (2008) Global Existence of Solutions for the Coupled Vlasov and Navier-Stokes Equations. *Differential Integral Equations*, **22**, 1247-1271. https://doi.org/10.57262/die/1356019415

[3] Mellet, A. and Vasseur, A. (2007) Global Weak Solutions for a Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes System of Equations. *Mathematics Models and Methods in Applied Sciences*, **17**, 1039-1063. https://doi.org/10.1142/S0218202507002194

[4] Melletand, A. and Vasseur, A. (2008) Asymptotic Analysis for a Vlasov-Fokker-Planck/Compressible Navier-Stokes System of Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **281**, 573-596. https://doi.org/10.1007/s00220-008-0523-4

[5] Baranger, C. and Desvillettes, L. (2006) Coupling Euler and Vlasov Equations in the Context of Sprays: Local Smooth Solutions. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, **3**, 1-26. https://doi.org/10.1142/S0219891606000707

[6] Lin, F. and Zhang, P. (2008) The FENE Dumbbell Model near Equilibrium. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **24**, 529-538. https://doi.org/10.1007/s10114-007-1034-5

[7] Lin, F., Zhang, P. and Zhang, Z. (2008) On the Global Existence of Smooth Solution to the 2-DFENE Dumbbell Model. *Communications in Mathematical Physics*, **277**, 531-553. https://doi.org/10.1007/s00220-007-0385-1

[8] Lin, F., Liu, C. and Zhang, P. (2007) On a Micro-Macro Model for Polymeric Fluids near Equilibrium. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **60**, 838-866. https://doi.org/10.1002/cpa.20159