Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(4), 1804-1809
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124187

Hans汉斯

一类色散半群的基本估计

黄慧文

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年3月24日；录用日期：2023年4月18日；发布日期：2023年4月28日

摘 要

本文通过Zhang得到的估计振荡积分方法研究了色散半群 $F^{-1}e^{i[x\xi+(\xi^n+\xi)t]}F$ 在n 为奇数且有界时的一维衰减估计问题，展示了该振荡积分估计方法在研究半群衰减问题中的重要性.

关键词

"Stationary Set"估计，振荡积分，$L^{p'} - L^p$估计

Basic Estimates for a Class of Dispersive Semigroups

Huiwen Huang

Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 24^{th}, 2023; accepted: Apr. 18^{th}, 2023; published: Apr. 28^{th}, 2023

Abstract

In this paper, we study the problem of one-dimensional attenuation estimation of dispersion semigroups $F^{-1}e^{i[x\xi+(\xi^n+\xi)t]}F$ when n is odd and bounded by using the estimated oscillatory integration method obtained by Zhang. The importance of the estimated

文章引用: 黄慧文. 一类色散半群的基本估计[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1804-1809.
DOI: 10.12677/aam.2023.124187

oscillatory integration method in the study of semigroup attenuation is demonstrated.

Keywords

"Stationary Set" Estimate, Oscillation Integral, $L^{p'}-L^p$ Estimates

1. 引言

Strichartz 型估计 (时间 –空间估计) 在研究色散方程解的正则性等问题中具有广泛的应用. 人们对色散方程解的Strichartz 型估计有着充分的研究. 在 [1] 中, Strichartz 考虑缓增分布 $Fd\mu$ 的傅里叶变换的估计, 此外还研究了 d'Alembertian 波方程、Klein-Gordon 方程和Schrödinger 方程解的衰减估计. 在 [2] 中, Ben-Artzi 考虑 $\int_0^\infty e^{-i(x\lambda+\frac{t}{m}\lambda^m)}a(\lambda)d\lambda$ 的 L^∞ 估计, 在该结论的基础上得到了广义Airy 方程或 Schrödinger 方程、线性拟微分方程解的衰减估计. 进一步, 在 [3] 中, Ben-Artzi 研究了形如$\int_0^\infty \xi^\alpha e^{it(P(\xi)-x\xi)}d\xi$ 的振荡积分的一致估计, 利用该估计得到高阶线性Kadomtsev-Petviashvili 方程解的衰减估计. 在 [4] 中, Cui 利用了 [5]、 [6] 中的振荡积分定理推导出形如$\partial_t u-iP(-i\partial_x)u=f(x,t)$ 的方程解的 Strichartz 估计. 在 [7] 中, Wang 研究了色散半群 $F^{-1}e^{itP(\xi)}F$ 的 L^1-L^∞ 估计, 基于该估计改进了Klein-Gordon 方程和Bean 方程的衰减结果.

Strichartz 型估计中最重要的一步是半群的 $L^{p'}-L^p$ 估计. 与半群的 $L^{p'}-L^p$ 估计相关的振荡积分算子估计也是一直备受关注的热点问题, 在研究这类问题中最常用的基本工具是 Van der Corput 引理. 2021年Zhang 等人在 [8] 中推导的 "Stationary Set"估计定理在一定程度上推广了 Van der Corput 引理的条件. 在 [7] 中, 我们发现 Wang 在研究 $P(\xi)$ 为非齐次函数时, 先将 $P(\xi)$ 简化为径向函数, 再利用 Van der Corput 引理处理了半群在一维空间中的衰减估计问题. 于是, 我们考虑在研究形如 $P(\xi)=\xi^n+\xi$的非齐次函数的半群衰减估计问题时, 利用 [8] 中 "Stationary Set"估计定理, 不需要将非齐次函数简化为径向函数. 我们有如下结果:

设 $U(t)=F^{-1}e^{itP(\xi)}F$, $t\in\mathbb{R}^+$, $P(\xi)=\xi^n+\xi$, $\xi\in\mathbb{R}$, 其中 $p\geq 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, n 为有界的奇数, 则下面的估计成立:

$$\|U(t)u_0\|_{L^p[0,c]}\lesssim t^{\frac{2}{p}-1}\|u_0\|_{L^{p'}}.$$

Wang 在 [7] 中得到了 $P(\xi)$ 分别为 $\sqrt{1+\xi^2}$, $\sqrt{1+\xi^4}$, $\xi^4+\xi^2$ 这几类半群在一维空间中的衰减估计结果. 显然, 本文的主要结果不包含在 [7]中. Wang在处理非齐次情形的 $P(\xi)$时, 将其简化为径向函数, 并且满足 $(H1)-(H4)$ 四个条件, 其中 $(H1)$、$(H3)$ 是高频条件, $(H2)$ 、$(H4)$ 是低频条

件, 而本文直接利用的"Stationary Set"估计定理不需要将其转换为径向函数.

2. 定理1.1的证明

作为准备, 我们简要回顾 "Stationary Set"估计定理, 具体内容如下: [8] 设 d, $k \geq 1$, $Q(\xi)$ 是变量 $\xi \in [0,1]^d$ 中的有界半代数函数, 其复杂性 $\leq k$, 则

$$\left|\int_{[0,1]^d} e^{iQ(\xi)} d\xi\right| \lesssim_{d,k} \sup_{\mu\in\mathbb{R}} |\{\xi \in [0,1]^d : \mu \leq Q(\xi) \leq \mu+1\}|.$$

其中, 隐含的常数仅与 d 和 k 有关, d 是维数.

我们在应用上述定理时仅需 $Q(\xi)$ 是次数有界的多项式, 显然定理1.1中 $P(\xi)$ 满足条件. 基于上述定理, 下面证明定理1.1.

定理1.1的证明. 由 Young 不等式可得

$$\|U(t)u_0\|_{L^\infty} \leq \|F^{-1}e^{it(\xi^n+\xi)}\|_{L^\infty}\|u_0\|_{L^1} \leq (J_1+J_2+J_3+J_4)\|u_0\|_{L^1}. \tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned} J_1 &= \left|\int_0^c e^{i[t\xi^n+(t+x)\xi]} d\xi\right|; \\ J_2 &= \left|\int_c^{+\infty} e^{i[t\xi^n+(t+x)\xi]} d\xi\right|; \\ J_3 &= \left|\int_{-c}^0 e^{i[t\xi^n+(t+x)\xi]} d\xi\right|; \\ J_4 &= \left|\int_{-\infty}^{-c} e^{i[t\xi^n+(t+x)\xi]} d\xi\right|. \end{aligned}$$

由 Plancherel 定理可得

$$\|U(t)u_0\|_2 = \|F^{-1}e^{itP(\xi)}Fu_o\|_2 = \|u_0\|_2. \tag{2}$$

对 (1) 和 (2) 利用 Riesz-Thorin 插值定理, 我们得到对满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ 的任何 $p\geq 2$, 有

$$\|U(t)u_0\|_{L^p} \lesssim (J_1+J_2+J_3+J_4)^{(1-\frac{2}{p})}\|u_0\|_{L^{p'}}.$$

首先, 考虑 J_1 的估计, 令 $\eta = \frac{\xi}{c}$, 利用Stationary set 估计定理可得

$$\begin{aligned} \left|\int_0^c e^{i[t\xi^n+(t+x)\xi]} d\xi\right| &= \left|c\int_0^1 e^{i[t(\eta\cdot c)^n+(t+x)\eta\cdot c]} d\eta\right| \\ &\lesssim_k \sup_{\mu\in\mathbb{R}} \; c|\{\eta\in[0,1] : \mu \leq t(\eta\cdot c)^n + (t+x)\eta\cdot c \leq \mu+1\}| \\ &\lesssim_k \sup_{\mu\in\mathbb{R}} |\{\xi\in[0,c] : \mu \leq t\xi^n + (t+x)\xi \leq \mu+1\}|. \end{aligned} \tag{3}$$

从几何图形意义角度进一步考虑测度的估计, 这里把测度 $|\{\xi \in [0,c] : \mu \leq [t\xi^n + (t+x)\xi] \leq \mu + 1\}|$ 看做是由值域差为 1 的两条直线切割函数 $f(\xi) = t\xi^n + (t+x)\xi$ 得到的 ξ 范围长度. 易知 f' 在 $[0,c]$ 递增, 则 $f'_{\min} = t + x$. 根据斜率的定义, 当 $x \in [0,c]$ 时, 可得

$$J_1 \leq \frac{1}{t+x} \lesssim \frac{1}{t}.$$

其次, 考虑 J_2 的估计, 令 $\eta = \xi - c$, 由 (3) 式可得

$$\begin{aligned}
\left|\int_c^{+\infty} e^{i[t\xi^n+(t+x)\xi]} d\xi\right| &= \left|\lim_{a\longrightarrow+\infty}\int_c^a e^{i[t\xi^n+(t+x)\xi]} d\xi\right| \\
&= \left|\lim_{a\longrightarrow+\infty}\int_0^{a-c} e^{i[t(\eta+c)^n+(t+x)(\eta+c)]} d\eta\right| \\
&\lesssim \lim_{a\longrightarrow+\infty}\sup_{\mu\in\mathbb{R}} |\{\eta \in [0,a-c] : \mu \leq t(\eta+c)^n + (t+x)(\eta+c) \leq \mu+1\}| \qquad (4)\\
&\lesssim \lim_{a\longrightarrow+\infty}\sup_{\mu\in\mathbb{R}} |\{\eta+c \in [c,a] : \mu \leq t(\eta+c)^n + (t+x)(\eta+c) \leq \mu+1\}| \\
&\lesssim \lim_{a\longrightarrow+\infty}\sup_{\mu\in\mathbb{R}} |\{\xi \in [c,a] : \mu \leq t\xi^n + (t+x)\xi \leq \mu+1\}|.
\end{aligned}$$

易知 f' 在 $[c,a]$ 递增, 则 $f'_{\min} = (1+nc^{n-1})t + x$. 根据斜率的定义, 当 $x \in [0,c]$ 时, 可得

$$J_2 \leq \lim_{a\longrightarrow+\infty}\frac{1}{(1+nc^{n-1})t+x} \lesssim \frac{1}{t}.$$

然后, 考虑 J_3 的估计, 令 $\eta = -\frac{\xi}{c}$, 由 (3) 式可得

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-c}^{0} e^{i[t\xi^n+(t+x)\xi]} d\xi\right| &= \left|-c\int_0^1 e^{-i[t(\eta\cdot c)^n+(t+x)\eta\cdot c]} d\eta\right| \\
&\lesssim_k \sup_{\mu\in\mathbb{R}} c|\{\eta \in [0,1] : \mu \leq -[t(\eta\cdot c)^n + (t+x)\eta\cdot c] \leq \mu+1\}| \qquad (5)\\
&\lesssim_k \sup_{\mu\in\mathbb{R}} |\{\xi \in [-c,0] : \mu \leq t\xi^n + (t+x)\xi \leq \mu+1\}|.
\end{aligned}$$

易知 f' 在 $[-c,0]$ 递减, 则 $f'_{\min} = t + x$. 根据斜率的定义, 当 $x \in [0,c]$ 时, 可得

$$J_3 \leq \frac{1}{t+x} \lesssim \frac{1}{t}.$$

最后, 考虑 J_4 的估计, 令 $\eta = \xi + c$, 由 (3) 式可得

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{-c} e^{i[t\xi^n+(t+x)\xi]} d\xi\right| &= \left|\lim_{b\longrightarrow-\infty}\int_b^{-c} e^{i[t\xi^n+(t+x)\xi]} d\xi\right| \\
&= \left|\lim_{b\longrightarrow-\infty}\int_{b+c}^{0} e^{i[t(\eta-c)^n+(t+x)(\eta-c)]} d\eta\right| \\
&\lesssim \lim_{b\longrightarrow-\infty}\sup_{\mu\in\mathbb{R}} |\{\eta \in [b+c,0] : \mu \leq t(\eta-c)^n + (t+x)(\eta-c) \leq \mu+1\}| \qquad (6)\\
&\lesssim \lim_{b\longrightarrow-\infty}\sup_{\mu\in\mathbb{R}} |\{\eta-c \in [b,-c] : \mu \leq t(\eta-c)^n + (t+x)(\eta-c) \leq \mu+1\}| \\
&\lesssim \lim_{b\longrightarrow-\infty}\sup_{\mu\in\mathbb{R}} |\{\xi \in [b,-c] : \mu \leq t\xi^n + (t+x)\xi \leq \mu+1\}|.
\end{aligned}$$

易知 f' 在 $[b,-c]$ 递减, 则 $f'_{\min}=(1+nc^{n-1})t+x$. 根据斜率的定义, 当 $x\in[0,c]$ 时, 可得

$$J_4 \le \lim_{b\longrightarrow -\infty} \frac{1}{(1+nc^{n-1})t+x} \lesssim \frac{1}{t}.$$

故

$$\begin{aligned}\|U(t)u_0\|_{L^p[0,c]} &\lesssim (J_1+J_2+J_3+J_4)^{(1-\frac{2}{p})}\|u_0\|_{L^{p'}}\\ &\lesssim t^{\frac{2}{p}-1}\|u_0\|_{L^{p'}}.\end{aligned}$$

其中, $L^p[0,c]$ 表示函数变量在 $[0,c]$ 范围上的 L^p 空间.

□

3. 总结与展望

本文从 Wang [8] 研究非齐次情形的半群估计方法中获得启发, 以"Stationary Set"估计定理为主要工具, 研究了半群 $F^{-1}e^{it(\xi^n+\xi)}F$ 在一维空间的 $L^{p'}-L^p$ 估计, 并且该结果不包含在 [8] 已有的结论中. 在下一步研究中, 我们将用本文的研究方法把结果推广到高维空间.

参考文献

[1] Strichartz, R.S. (1977) Restrictions of Fourier Transforms to Quadratic Surfaces and Decay of Solutions of Wave Equations. *Duke Mathematical Journal*, **44**, 705-714. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-77-04430-1

[2] Ben-Artzi, M. and Treves, F. (1994) Uniform Estimates for a Class of Evolution Equations. *Journal of Functional Analysis*, **120**, 264-299. https://doi.org/10.1006/jfan.1994.1033

[3] Ben-Artzi, M. and Saut, J.-C. (1999) Uniform Decay Estimates for a Class of Oscillatory Integrals and Applications. *Differential Integral Equations*, **12**, 137-145. https://doi.org/10.57262/die/1367265625

[4] Cui, S. and Tao, S. (2005) Strichartz Estimates for Dispersive Equations and Solvability of the Kawahara Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **304**, 683-702. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.09.049

[5] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L. (1991) Oscillatory Integrals and Regularity of Dispersive Equations. *Indiana University Mathematics Journal*, **40**, 33-69. https://doi.org/10.1512/iumj.1991.40.40003

[6] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L. (1989) On the (Generalized) Korteweg-de Vries Equations. *Duke Mathematical Journal*, **59**, 585-610. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-89-05927-9

[7] Wang, B., Huo, Z., Hao, C. and Guo, Z. (2011) Harmonic Analysis Method for Nonlinear Evolution Equations, I. World Scientific, Singapore, Hackensack, NJ. https://doi.org/10.1142/8209

[8] Basu, S., Guo, S., Zhang, R. and Zorin-Kranich, P. (2021) A Stationary Set Method for Estimating Oscillatory Integrals. arXiv preprint arXiv:2103.08844