Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(4), 1855-1865**
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124192

一类不可压非牛顿Boussinesq方程组正则解的存在性

刘　琳[*]，王长佳

长春理工大学数学与统计学院，吉林 长春

收稿日期：2023年3月26日；录用日期：2023年4月21日；发布日期：2023年4月28日

摘　要

在三维光滑有界区域中研究了奇异情况下的非牛顿Boussinesq方程组的周期初边值问题。应用Galerkin方法、Gronwall不等式、Aubin-Lions引理，并结合能量估计、紧性方法证明了外力项适当小的情况下，该方程组正则解的存在性。

关键词

非牛顿流，Boussinesq方程组，奇异性，正则性

Existence of Regular Solution for a Class of Incompressible Non-Newton Boussinesq Equations

Lin Liu[*], Changjia Wang

School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Technology, Changchun Jilin

Received: Mar. 26th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 28th, 2023

Abstract

The periodic initial boundary value problem of non-Newtonian Boussinesq equations in singular case is studied in three-dimensional smooth bounded domain. By using Galerkin method, Gronwall inequality, Aubin-Lions lemma, energy estimation and compactness method, the existence of regular solutions for the system is proved when the external force term is appropriately small.

[*]通讯作者。

文章引用：刘琳，王长佳．一类不可压非牛顿 Boussinesq 方程组正则解的存在性[J]．应用数学进展，2023，12(4): 1855-1865. DOI: 10.12677/aam.2023.124192

Keywords

Non-Newtonian Flow, Boussinesq Equation, Singularity, Regular Solution

1. 引言

Boussinesq 方程组描述地球物理流，对生活中的气象预报、龙卷风等自然灾害等的研究都有积极现实意义[1]，该方程组在 Rayleigh-Bérnard 对流[2] [3]中扮演至关重要的角色。考虑如下一类非牛顿 Boussinesq 方程组的初边值问题：

$$\begin{cases} u_t + div(u\otimes u) - divT(Du) + \nabla p = \rho e_3\theta + f, & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ divu = 0, & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ \theta_t + u\nabla\theta - \kappa\Delta\theta = g, & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x), & x\in\Omega, \\ u|_{\Gamma_i} = u|_{\Gamma_{i+3}}, \nabla u|_{\Gamma_i} = \nabla u|_{\Gamma_{i+3}}, p|_{\Gamma_i} = p|_{\Gamma_{i+3}}, & x\in\partial\Omega, \\ \theta|_{\Gamma_i} = \theta|_{\Gamma_{i+3}}, \nabla\theta|_{\Gamma_i} = \nabla\theta|_{\Gamma_{i+3}}, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中：未知函数 $u=(u_1,u_2,u_3)$，$\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ 以及 p，e_3 分别表示流体速度、温度、压力和 $\mathbb{R}^3$ 中的单位向量。$\Omega=(0,1)^3\subset\mathbb{R}^3$，$T(Du)=|Du|^{p-2}Du$，$1<p<2$。$Du=\frac{1}{2}(\nabla u+\nabla u^{\mathrm{T}})$ 表示应力速率张量。$f=(f_1,f_2,f_3)$，$g=(g_1,g_2,g_3)$ 为给定的外力项。$\Gamma_i := \partial\Omega\cap\{x_i=0\}$ 以及 $\Gamma_{i+3} := \partial\Omega\cap\{x_i=1\}$，$i=1,2,3$。$\rho$ 表示流体密度，κ 表示热传导系数，均取常数。为讨论方便，取 $\rho=\kappa=1$。

在自然界和工业界中都存在着大量的非牛顿流体，如建筑界中的沥青、水泥浆、下水道中的污泥。食品工业中的奶油、蜂蜜和蛋白、大多数油类和润滑脂。高聚物熔体和溶液以及人体中的血液等。非牛顿流体的研究对这些工业的发展具有重大的现实意义。

当不考虑温度($\theta=0$)时，系统(1)退化为经典的不可压非牛顿流方程组，目前关于不可压非牛顿流有一系列的研究，具体参见文献[4]-[9]。当把温度($\theta\neq 0$)纳入考虑时，问题(1)成为非牛顿 Boussinesq 模型。由于 Boussinesq 方程组中温度和速度耦合项产生的困难，与不可压非牛顿流相比，关于该类方程组各类初边值解的研究还很少。文献[10]中对一类修正的双极粘性流体的 Boussinesq 近似进行了研究，并证明了当 $p>2n/(n+2)$ 时弱解的存在唯一性。文献[11]研究一类稳态不可压 Boussinesq 第一边值问题，应用迭代方法证明正则解存在唯一性。目前，关于 Boussinesq 方程组的研究主要集中在牛顿流模型，关于非牛顿 Boussinesq 方程组的研究还不多，且主要集中在弱解的存在性、唯一性等方面。本文在三维光滑有界域 Ω 中，考虑一类周期边界条件下正则解的存在性。

2. 预备知识与主要结果

本文用 $L^q(\Omega)(1\le q\le\infty)$ 表示标准的 Lebesgue 空间，其范数用 $\|\cdot\|_q$ 表示，$W^{m,q}(\Omega)$ 表示通常的 Sobolev 空间，其范数用 $\|\cdot\|_{m,q}$ 表示。设 X 为定义范数 $\|\cdot\|_X$ 的 Banach 空间，用 $L^p((0,T);X)(1\le p\le\infty)$ 表示通常的

Bochner 空间，其中范数用$\|\cdot\|_{L^p(0,T;X)}$表示。

引入函数空间

$\ell_{per}:=\left\{u\in C_{per}^{\infty}(\Omega),\int_\Omega u\mathrm{d}x=0\right\}$,

$V_{per}^{q}:=\ell_{per}$ 在$\|\cdot\|_q$-范数意义下的闭包，

$V_{per}^{m,q}:=\ell_{per}$ 在$\|\cdot\|_{m,q}$-范数意义下的闭包。

这里下标'per'表示该函数空间中的函数沿空间各方向都具有周期性且在所讨论区域上满足零均值条件。

下面给出问题(1)正则解的定义

定义 1：假设 $f\in L^{\infty}\left(0,T;L_{per}^{\frac{4}{p}}(\Omega)\right)$，$g\in L^{\infty}\left(0,T;L_{per}^{2}(\Omega)\right)$，$u_0\in V_{per}^{1,2}(\Omega)$，$\theta_0\in V_{per}^{1,2}(\Omega)$。若$(u,\theta)$满足下述条件

1) $u\in C\left(0,T;V_{per}^{1,2}(\Omega)\right)$，$\theta\in C\left(0,T;V_{per}^{1,2}(\Omega)\right)$，$u_t\in L^2(\Omega_T)$，$\theta_t\in L^2(\Omega_T)$，$u(0)=u_0$，$\theta(0)=\theta_0$；

2) $\nabla^2u\in L^2\left(0,T;L_{per}^{\frac{4}{4-p}}(\Omega)\right)$，$\nabla^2\theta\in L^2\left(0,T;L_{per}^{2}(\Omega)\right)$；

3) 对$\forall\varphi\in V_{per}^{1,p}(\Omega)$，$\phi\in V_{per}^{1,2}(\Omega)$以及$a.e.\,t\in(0,T)$有

$$\int_\Omega\partial_t u\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega(u\cdot\nabla)u\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega|Du|^{p-2}DuD\varphi\mathrm{d}x=\int_\Omega e_3\theta\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega f\varphi\mathrm{d}x,$$
$$\int_\Omega\partial_t\theta\phi\mathrm{d}x+\int_\Omega(u\cdot\nabla)\theta\phi\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla\theta\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x=\int_\Omega g\phi\mathrm{d}x,$$

则称(u,θ)为问题(1)的正则解。

在后续中，为方便起见，省略下标'per'。

设Λ,Γ,M,N为满足如下条件的常数，C是计算中产生的与p,Ω有关的常数。

$$\Lambda<\min\left\{\left(\frac{p}{10C}\right)^{\frac{2}{3-p}},\left(\frac{1}{2C}\right)^2\right\},\quad\Gamma>2CN^2,\quad\left(C\Gamma+M^2\right)<\frac{p(p-1)}{10C}\Lambda^{p-1}\tag{2}$$

本文的主要定理如下：

定理 1：设$5/3\le p<2$，u_0,θ_0,f,g满足

$$\begin{aligned}&f\in L^{\infty}\left(0,T;L^{\frac{4}{p}}(\Omega)\right),\quad u_0\in V^{1,2}(\Omega),\quad \operatorname*{ess\,sup}_{t\ge0}\|f\|_{L^{\frac{4}{p}}(\Omega)}\le M,\quad \|\nabla u_0\|_2^2<\Lambda,\\&g\in L^{\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right),\quad \theta_0\in V^{1,2}(\Omega),\quad \operatorname*{ess\,sup}_{t\ge0}\|g\|_{L^2(\Omega)}\le N,\quad \|\nabla\theta_0\|_2^2<\Gamma,\end{aligned}\tag{3}$$

则问题(1)至少存在一个定义 1 意义下的解(u,θ)。此外，对$\forall T>0$解(u,θ)满足估计

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla u(t)\|_2^2\le\Lambda,\quad\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla\theta(t)\|_2^2\le\Gamma$$

下面给出本文证明中用到的引理：

引理 1 [5]：对于$u,v,w\in H_0^1(\Omega)$，定义$b(u,v,w)=\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega u_i(x)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)w_j(x)\mathrm{d}x$，若$divu=0$，则

$$b(u,v,w)=b(u,w,v),\ b(u,v,v)=0$$

引理 2：当$0<q<1$且$q'=\dfrac{q}{q-1}$时，如果$f\in L^q(\Omega)$，$0<\int_\Omega|g(x)|^{q'}\mathrm{d}x<\infty$有

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \ge \left(\int_\Omega |f(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |g(x)|^{q'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q'}}$$

3. 定理 1 的证明

定理 1 的证明分多步完成：在 3.1 节，我们构造问题(1)的逼近方程，并证明相应的 Galerkin 近似解的存在性；在 3.2 节，我们推导近似解的一致性先验估计；最后，在 3.3 节讨论近似解的收敛性，并最终证明原问题正则解的存在性结果。

3.1. 近似解的构造

由于问题(1)具有奇异性，故我们首先对问题正则化，设 $\gamma \in (0,1)$，记 $T_\gamma(Du) = \left(\gamma + |Du|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} Du$，考虑如下初边值问题

$$\begin{cases} u_t + div(u \otimes u) - divT_\gamma(Du) + \nabla p = e_3\theta + f, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ divu = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \theta_t + u\nabla\theta - \Delta\theta = g, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_i} = u|_{\Gamma_{i+3}}, \nabla u|_{\Gamma_i} = \nabla u|_{\Gamma_{i+3}}, p|_{\Gamma_i} = p|_{\Gamma_{i+3}}, & x \in \partial\Omega, \\ \theta|_{\Gamma_i} = \theta|_{\Gamma_{i+3}}, \nabla\theta|_{\Gamma_i} = \nabla\theta|_{\Gamma_{i+3}}, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

设 $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 Stokes 算子 A 的特征函数族，λ_k 是相应的特征值且 $X_n = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$。设 $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 Laplace 算子 $-\Delta$ 的特征函数族，μ_k 是相应的特征值且 $Y_n = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$。定义投影算子

$$P^n : \left(W^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{1,2}\right) \to \left(X_n, \|\cdot\|_{1,2}\right), Q^n : \left(W^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{1,2}\right) \to \left(Y_n, \|\cdot\|_{1,2}\right)$$

分别如下

$$P^n u = \sum_{k=1}^n (u, \varphi_k) w_k, Q^n\theta = \sum_{k=1}^n (\theta, v_k) v_k$$

我们寻求问题(4)如下形式的解

$$u^n(x,t) = \sum_{k=1}^n c_k^n(t) w_k(x), \theta^n(x,t) = \sum_{k=1}^n d_k^n(t) v_k(x)$$

其中对 $k = 1, 2, \cdots, n$，系数 $c_k^n(t), d_k^n(t)$ 满足

$$\left(\partial_t u^n, w_k\right) + \left(\left(u^n \cdot \nabla\right)u^n, w_k\right) + \left(T_\gamma\left(Du^n\right), Dw_k\right) = \left(e_3\theta^n, w_k\right) + \left(f, w_k\right), \tag{5}$$

$$\left(\partial_t\theta^n, v_k\right) + \left(\left(u^n \cdot \nabla\right)\theta^n, v_k\right) + \left(\nabla\theta^n, \nabla v_k\right) = \left(g, v_k\right), \tag{6}$$

$$u^n(0) = P^n u_0, \quad \theta^n(0) = Q^n\theta_0 \tag{7}$$

由 Carathéodory 定理可知存在 $t_n\ (0 < t_n \le T)$，使得问题(5)-(7)在 $[0, t_n)$ 上存在光滑解 $u^n(x,t), \theta^n(x,t)$。接下来，我们推导 $c_k^n(t), d_k^n(t)$ 关于 n 的一致性先验估计，由这些估计可知 $t_n = T$。

3.2. 一致性先验估计

3.2.1. $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|u^n(t)\|_2^2$ 与 $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|\theta^n(t)\|_2^2$ 的估计

在式(6)两端乘以 $d_k^n(t)$ 并关于 k 求和，应用引理 1、Hölder 不等式和 Young 不等式，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\theta^n\right\|_2^2+\left\|\nabla\theta^n\right\|_2^2=\left(g,\theta^n\right)\le\left\|g\right\|_2\left\|\theta^n\right\|_2\le\frac{1}{2}\left\|g\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\theta^n\right\|_2^2,$$

从而由 Gronwall 不等式可得

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|\theta^n(t)\right\|_2^2+2\left\|\nabla\theta^n\right\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}^2\le C\left(\left\|\theta_0\right\|_2^2+T\left\|g\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}^2\right),\tag{8}$$

在式(5)两端乘以 $c_k^n(t)$ 并关于 k 求和，应用引理 1，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u^n\right\|_2^2+\int_\Omega\left(\gamma+\left|Du^n\right|_2^2\right)^{p-2}\mathrm{d}x=\left(e_3\theta^n,u^n\right)+\left(f,u^n\right),$$

又由于

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left|Du^n\right|^p\mathrm{d}x&=\int_{\left|Du^n\right|^2\ge\gamma}\left|Du^n\right|^p\mathrm{d}x+\int_{\left|Du^n\right|^2<\gamma}\left|Du^n\right|^p\mathrm{d}x\\&\le2^{\frac{2-p}{2}}\int_\Omega\left(\gamma+\left|Du^n\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left|Du^n\right|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\gamma^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\\&\le2^{\frac{2-p}{2}}\left(T_\gamma\left(Du^n\right),Du^n\right)+\gamma^{\frac{p}{2}}\left|\Omega\right|.\end{aligned}$$

并应用 Hölder 不等式、$\left\|u\right\|_{\frac{4}{4-p}}\le C\left\|Du\right\|_p$ 和 Young 不等式，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u^n\right\|_2^2+2^{\frac{p-2}{2}}\int_\Omega\left|Du^n\right|^p\mathrm{d}x&\le\left(e_3\theta^n,u^n\right)+\left(f,u^n\right)+\gamma^{\frac{p}{2}}\left|\Omega\right|\\&\le\left\|\theta^n\right\|_2\left\|u^n\right\|_2+\left\|f\right\|_{\frac{4}{p}}\left\|u^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}+\gamma^{\frac{p}{2}}\left|\Omega\right|\\&\le\frac{1}{2}\left\|\theta^n\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|u^n\right\|_2^2+C\left\|f\right\|_{\frac{4}{p}}\left\|Du^n\right\|_p+\gamma^{\frac{p}{2}}\left|\Omega\right|\\&\le\frac{1}{2}\left\|\theta^n\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|u^n\right\|_2^2+\frac{1}{4}\cdot2^{\frac{p-2}{2}}\left\|Du^n\right\|_p^p+C\left\|f\right\|_{\frac{4}{p}}^{p'}+\gamma^{\frac{p}{2}}\left|\Omega\right|.\end{aligned}$$

并对上式应用式(8)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u^n\right\|_2^2+\left\|Du^n\right\|_p^p&\le\left\|\theta^n\right\|_2^2+\left\|u^n\right\|_2^2+C\left\|f\right\|_{\frac{4}{p}}^{p'}+\gamma\left|\Omega\right|\\&\le\left\|u^n\right\|_2^2+\left\|\theta_0\right\|_2^2+t\left\|g\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}^2+C\left\|f\right\|_{\frac{4}{p}}^{p'}+\gamma\left|\Omega\right|.\end{aligned}$$

故利用 Gronwall 不等式可得

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\left\|u^n(t)\right\|_2^2+\left\|Du^n\right\|_{L^p\left(0,T;L^p(\Omega)\right)}^p\\&\le\left\|u_0\right\|_2^2+T\left\|\theta_0\right\|_2^2+\frac{1}{2}T^2\left\|g\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}^2+CT\left\|f\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^{\frac{4}{p}}(\Omega)\right)}^{p'}+\gamma^{\frac{p}{2}}\left|\Omega_T\right|.\end{aligned}\tag{9}$$

3.2.2. $\sup\limits_{t\in[0,T]}\left\|\nabla u^n(t)\right\|_2^2$ 与 $\sup\limits_{t\in[0,T]}\left\|\nabla\theta^n(t)\right\|_2^2\le\Gamma$ 的估计

在式(5)，(6)两端分别乘以 $\lambda_k c_k^n(t),\mu_k d_k^n(t)$ 并关于 k 求和，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u^n\right\|_2^2+\int_\Omega\nabla T_\gamma\left(Du^n\right)\cdot\nabla Du^n\mathrm{d}x=\left(\left(u^n\cdot\nabla\right)u^n,\Delta u^n\right)-\left(e_n\theta^n,\Delta u^n\right)-\left(f,\Delta u^n\right),\tag{10}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\theta^n\right\|_2^2+\left\|\nabla^2\theta^n\right\|_2^2=\left(\left(u^n\cdot\nabla\right)\theta^n,\Delta\theta^n\right)-\left(g,\Delta\theta^n\right) \tag{11}$$

对式(10)左端第二项进行整理可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\nabla T_\gamma\left(Du^n\right)\cdot\nabla Du^n\mathrm{d}x\\&=\left(p-2\right)\int_\Omega\left(\gamma+\left|Du^n\right|^2\right)^{\frac{p-4}{2}}\left|Du^n\right|^2\left|\nabla Du^n\right|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\left(\gamma+\left|Du^n\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left|\nabla Du^n\right|^2\mathrm{d}x\\&\ge\left(p-1\right)\int_\Omega\left(\gamma+\left|Du^n\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left|\nabla Du^n\right|^2\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{12}$$

为方便起见，记 $I=\left(p-1\right)\int_\Omega\left(\gamma+\left|Du^n\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left|\nabla Du^n\right|^2\mathrm{d}x$。

对式(10)右端第一项进行处理，由文献[12]知 $\left|\left(u\cdot\nabla\right)u,\Delta u\right|\le\left\|\nabla u\right\|_3^3$，则

$$\left(\left(u^n\cdot\nabla\right)u^n,\Delta u^n\right)\le\left\|\nabla u^n\right\|_3^3\le C\left\|\nabla u^n\right\|_2^{\frac{9p-12}{3p-2}}\left\|\nabla Du^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}^{\frac{6}{3p-2}} \tag{13}$$

事实上，当 $p\in\left[\frac{5}{3},2\right)$ 时，因为 $\frac{1}{3}=\frac{3p-4}{3p-2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3p-2}\cdot\frac{8-3p}{12}$，从而由插值不等式及 Sobolev 嵌入定理可得

$$\left\|\nabla u^n\right\|_3\le\left\|\nabla u^n\right\|_2^{\frac{3p-4}{3p-2}}\left\|\nabla u^n\right\|_{\frac{12}{8-3p}}^{\frac{2}{3p-2}}\le C\left\|\nabla u^n\right\|_2^{\frac{3p-4}{3p-2}}\left\|\nabla Du^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}^{\frac{2}{3p-2}}.$$

将式(12)，(13)代入式(10)并对等式右端应用 Hölder 不等式，Sobolev 嵌入得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u^n\right\|_2^2+I&\le\left\|\nabla u^n\right\|_3^3+\left|\left(e_3\theta^n,\Delta u^n\right)\right|+\left|\left(f,\Delta u^n\right)\right|\\&\le C\left\|\nabla u^n\right\|_2^{\frac{9p-12}{3p-2}}\left\|\nabla Du^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}^{\frac{6}{3p-2}}+\left\|\theta^n\right\|_{\frac{4}{p}}\left\|\Delta u^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}+\left\|f\right\|_{\frac{4}{p}}\left\|\Delta u^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}\\&\le C\left\|\nabla u^n\right\|_2\left\|\nabla Du^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}^2+C\left\|\nabla\theta^n\right\|_2\left\|\nabla Du^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}+\left\|f\right\|_{\frac{4}{p}}\left\|\nabla Du^n\right\|_{\frac{4}{4-p}},\end{aligned}$$

对上式左端第二项应用引理 2，右端应用 Young 不等式得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}I_t^{\frac{2-p}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u^n\right\|_2^2+\frac{p-1}{2}\left\|\nabla Du^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}^2\\&\le CI_t^{\frac{2-p}{2}}\left\|\nabla u^n\right\|_2\left\|\nabla Du^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}^2+\frac{C}{p-1}I_t^{2-p}\left\|\nabla\theta^n\right\|_2^2+\frac{1}{p-1}I_t^{2-p}\left\|f\right\|_{\frac{4}{p}}^2,\end{aligned} \tag{14}$$

这里，$I_t=\gamma_1+\left\|\nabla u^n\left(t\right)\right\|_2^2$，$\gamma_1=\gamma\left|\Omega\right|$。

对式(11)右端第一项应用引理 1，Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入有

$$\begin{aligned}\left(u^n\cdot\nabla\theta^n,\Delta\theta^n\right)&=\int_\Omega u^n\cdot\nabla\theta^n\Delta\theta^n\mathrm{d}x=\int_\Omega u_j^n\cdot\frac{\partial\theta_i^n}{\partial x_j}\cdot div\left(\nabla\theta_i^n\right)\mathrm{d}x\\&=-\int_\Omega\frac{\partial u_j^n}{\partial x_k}\frac{\partial\theta_i^n}{\partial x_j}\frac{\partial\theta_i^n}{\partial x_k}\mathrm{d}x-\int_\Omega u_j^n\frac{\partial^2\theta_i^n}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial\theta_i^n}{\partial x_k}\mathrm{d}x\\&\le\int_\Omega\left|\frac{\partial u_j^n}{\partial x_k}\frac{\partial\theta_i^n}{\partial x_j}\frac{\partial\theta_i^n}{\partial x_k}\right|\mathrm{d}x=\int_\Omega\left|\nabla u^n\right|\cdot\left|\nabla\theta^n\right|^2\mathrm{d}x\\&\le\left\|\nabla u^n\right\|_2\left\|\nabla\theta^n\right\|_4^2\le C\left\|\nabla u^n\right\|_2\left\|\nabla^2\theta^n\right\|_2^2.\end{aligned}$$

将上式代入式(11)，并应用 Hölder 不等式，Young 不等式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\theta^n\right\|_2^2+\left\|\nabla^2\theta^n\right\|_2^2 &\le C\left\|\nabla u^n\right\|_2\left\|\nabla^2\theta^n\right\|_2^2+\int_\Omega\left|g\cdot\Delta\theta^n\right|\mathrm{d}x\\ &\le C\left\|\nabla u^n\right\|_2\left\|\nabla^2\theta^n\right\|_2^2+\|g\|_2\left\|\Delta\theta^n\right\|_2\\ &\le C\left\|\nabla u^n\right\|_2\left\|\nabla^2\theta^n\right\|_2^2+\|g\|_2\left\|\nabla^2\theta^n\right\|_2\\ &\le C\left\|\nabla u^n\right\|_2\left\|\nabla^2\theta^n\right\|_2^2+\frac{1}{2}\|g\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2\theta^n\right\|_2^2,\end{aligned}$$

整理后得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\theta^n\right\|_2^2+\left\|\nabla^2\theta^n\right\|_2^2\le C\left\|\nabla u^n\right\|_2\left\|\nabla^2\theta^n\right\|_2^2+\|g\|_2^2 \tag{15}$$

由假设 $\|\nabla u_0\|_2^2<\Lambda, \|\nabla\theta_0\|_2^2<\Gamma$ 及 $\|\nabla u^n(t)\|_2, \|\nabla\theta^n(t)\|_2$ 的连续性，令 t_1, t_2 分别是满足 $\|\nabla u^n(t)\|_2^2=\Lambda$，$\|\nabla\theta^n(t)\|_2^2=\Gamma$ 的最小时刻，下面对 t_1, t_2 分情况讨论。

1) 情形一：$t_1<t_2$。

由假设知 $\|\nabla u^n(t_1)\|_2^2=\Lambda$，$\|\nabla\theta^n(t_1)\|_2^2<\Gamma$，$\|\nabla\theta^n(t_2)\|_2^2=\Gamma$，由于 γ_1 任意小，为方便起见，取 $\gamma_1=\Lambda$ 并在式(14)中取 $t=t_1$，应用式(3)，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(2\Lambda)^{\frac{2-p}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u^n(t_1)\right\|_2^2+\frac{p}{5}\left\|\nabla Du^n(t_1)\right\|_{\frac{4}{4-p}}^2\\ &\le C(2\Lambda)^{\frac{2-p}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla Du^n(t_1)\right\|_{\frac{4}{4-p}}^2+\frac{C}{p-1}(2\Lambda)^{2-p}\Gamma+\frac{1}{p-1}(2\Lambda)^{2-p}M^2,\end{aligned}$$

对上式应用式(2)，有

$$\frac{1}{2}(2\Lambda)^{\frac{2-p}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u^n(t_1)\right\|_2^2+\frac{p}{10}\left\|\nabla Du^n(t_1)\right\|_{\frac{4}{4-p}}^2-\frac{C}{p-1}(2\Lambda)^{2-p}\Gamma-\frac{1}{p-1}(2\Lambda)^{2-p}M^2<0,$$

由 Sobolev 嵌入有

$$\frac{1}{2}(2\Lambda)^{\frac{2-p}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u^n(t_1)\right\|_2^2+\frac{p}{10}C^{-1}\left\|\nabla u^n(t_1)\right\|_2^2-\frac{C}{p-1}(2\Lambda)^{2-p}\Gamma-\frac{1}{p-1}(2\Lambda)^{2-p}M^2<0,$$

即

$$\frac{1}{2}(2\Lambda)^{\frac{2-p}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u^n(t_1)\right\|_2^2+\frac{p}{10}C^{-1}\Lambda-\frac{C}{p-1}(2\Lambda)^{2-p}\Gamma-\frac{1}{p-1}(2\Lambda)^{2-p}M^2<0,$$

再次应用式(2)，得

$$\frac{1}{2}(2\Lambda)^{\frac{2-p}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u^n(t_1)\right\|_2^2<0\text{，即}\left\|\nabla u^n(t)\right\|_2^2<\Lambda\text{。}$$

在式(15)中令 $t=t_2$，应用式(3)和上式，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\theta^n(t_2)\right\|_2^2+\left\|\nabla^2\theta^n(t_2)\right\|_2^2\le C\Lambda^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla^2\theta^n(t_2)\right\|_2^2+N^2,$$

对上式应用式(2)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\theta^n(t_2)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2\theta^n(t_2)\right\|_2^2-N^2<0,$$

由 Sobolev 嵌入进而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\theta^n(t_2)\right\|_2^2+\frac{1}{2}C^{-1}\left\|\nabla\theta^n(t_2)\right\|_2^2-N^2<0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\theta^n(t_2)\right\|_2^2+\frac{1}{2}C^{-1}\Gamma-N^2<0,$$

再次应用式(2)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\theta^n(t_2)\right\|_2^2<0\text{，即}\left\|\nabla\theta^n(t)\right\|_2^2<\Gamma\text{。}$$

2) 情形二：$t_1>t_2$。

与 $t_1<t_2$ 的证明类似的步骤，可以证得 $\left\|\nabla u^n(t)\right\|_2^2<\Lambda,\left\|\nabla\theta^n(t)\right\|_2^2<\Gamma$。

3) 情形三：$t_1=t_2$。

与 $t_1<t_2$ 的证明类似的步骤，证得 $\left\|\nabla u^n(t)\right\|_2^2<\Lambda,\left\|\nabla\theta^n(t)\right\|_2^2<\Gamma$。

综合上述，对任意的 $T>0$，都有

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2\le\Lambda,\ \sup_{t\in[0,T]}\left\|\nabla\theta(t)\right\|_2^2\le\Gamma \tag{16}$$

3.2.3. $\left\|u^n\right\|_{L^2\left(0,T;W^{2,\frac{4}{4-p}}(\Omega)\right)}$ 与 $\left\|\theta^n\right\|_{L^2\left(0,T;W^{2,2}(\Omega)\right)}$ 的估计

由式(14)和式(15)知

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u^n(t)\right\|_2^2+\frac{p}{10}\left\|\nabla Du^n(t)\right\|_{\frac{4}{4-p}}^2\le\frac{C}{p-1}(\gamma_1+\Lambda)^{\frac{2-p}{2}}\Gamma+\frac{1}{p-1}(\gamma_1+\Lambda)^{\frac{2-p}{2}}\|f\|_{\frac{4}{p}}^2, \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\theta^n(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2\theta^n(t)\right\|_2^2\le\|g\|_2^2 \tag{18}$$

对式(17)，(18)在 $(0,T)$ 上积分得

$$\left\|\nabla u^n(T)\right\|_2^2+\int_0^T\left\|\nabla Du^n(t)\right\|_{\frac{4}{4-p}}^2\mathrm{d}t<C \tag{19}$$

$$\left\|\nabla\theta^n(T)\right\|_2^2+\int_0^T\left\|\nabla^2\theta^n(t)\right\|_2^2\mathrm{d}t<C \tag{20}$$

由式(19)，(20)得

$$\left\|u^n\right\|_{L^2\left(0,T;W^{2,\frac{4}{4-p}}(\Omega)\right)}\le C \tag{21}$$

$$\left\|\theta^n\right\|_{L^2\left(0,T;W^{2,2}(\Omega)\right)}\le C \tag{22}$$

3.2.4. $\left\|u_t^n\right\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}$ 与 $\left\|\theta_t^n\right\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}$ 的估计

在式(5)，(6)两端分别乘以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_k^n(t),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}d_k^n(t)$ 并关于 k 求和，得

$$\left\|u_t^n\right\|_2^2+\left(T_\gamma\left(Du^n\right),Du_t^n\right)=-\left(u^n\cdot\nabla u^n,u_t^n\right)+\left(e_3\theta^n,u_t^n\right)+\left(f,u_t^n\right) \tag{23}$$

对式(23)，(24)右端应用 Hölder 不等式、Sobolev 嵌入、Young 不等式，和式(16)得

$$\left\|\theta_t^n\right\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\theta^n\right\|_2^2=-\left(u^n\cdot\nabla\theta^n,\theta_t^n\right)+\left(g,\theta_t^n\right) \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\left\|u_t^n\right\|_2^2+\left(T_\gamma\left(Du^n\right),Du_t^n\right)&\le\left\|u^n\right\|_\infty\left\|\nabla u^n\right\|_2\left\|u_t^n\right\|_2+\left\|\theta^n\right\|_2\left\|u_t^n\right\|_2+\|f\|_{\frac{4}{p}}\left\|u_t^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}\\&\le\left\|u^n\right\|_\infty^2\left\|\nabla u^n\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|u_t^n\right\|_2^2+\left\|\theta^n\right\|_2^2+\|f\|_{\frac{4}{p}}\left\|u_t^n\right\|_2\\&\le\left\|u^n\right\|_\infty^2\left\|\nabla u^n\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|u_t^n\right\|_2^2+C\left\|\nabla\theta^n\right\|_2^2+\|f\|_{\frac{4}{p}}^2+\frac{1}{4}\left\|u_t^n\right\|_2^2\\&\le C\Lambda\left\|\nabla Du^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}^2+\frac{3}{4}\left\|u_t^n\right\|_2^2+C\Gamma+\|f\|_{\frac{4}{p}}^2\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\left\|\theta_t^n\right\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\theta^n\right\|_2^2&\le\left\|u^n\right\|_\infty\left\|\nabla\theta^n\right\|_2\left\|\theta_t^n\right\|_2+\|g\|_2\left\|\theta_t^n\right\|_2\\&\le\left\|u^n\right\|_\infty^2\left\|\nabla\theta^n\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\theta_t^n\right\|_2^2+\|g\|_2^2\\&\le C\Gamma\left\|\nabla Du^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}^2+\frac{1}{2}\left\|\theta_t^n\right\|_2^2+\|g\|_2^2\end{aligned} \tag{26}$$

对式(25)，(26)两端在$(0,T)$上积分，并应用式(3)，式(19)得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\int_0^T\left\|u_t^n(t)\right\|_2^2\mathrm{d}t+\frac{1}{p}\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\left(\gamma+\left|Du^n(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^p\mathrm{d}t\\&\le C\Lambda\int_0^T\left\|\nabla Du^n(t)\right\|_{\frac{4}{4-p}}^2\mathrm{d}t+C\Gamma T+\int_0^T\|f(t)\|_{\frac{4}{p}}^2\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}\int_0^T\left\|u_t^n(t)\right\|_2^2\mathrm{d}t+\left\|\left(\gamma+\left|Du^n(T)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^p\le C \tag{27}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T\left\|\theta_t^n(t)\right\|_2^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^T\left\|\nabla\theta^n\right\|_2^2\mathrm{d}t\le C\Gamma\int_0^T\left\|\nabla Du^n\right\|_{\frac{4}{4-p}}^2\mathrm{d}t+\int_0^T\|g\|_2^2\mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T\left\|\theta_t^n(t)\right\|_2^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\left\|\nabla\theta^n(T)\right\|_2^2\le C \tag{28}$$

由式(27)，(28)可得

$$\left\|u_t^n\right\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}\le C, \tag{29}$$

$$\left\|\theta_t^n\right\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}\le C \tag{30}$$

对所有的$T>0$和$E\subseteq\Omega$，应用 Hölder 不等式有

$$\int_0^T\int_E\left|T_\gamma\left(Du^n\right)\right|^{p'}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\int_0^T\int_E\left|Du^n\right|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le T|E|^{\frac{2-p}{2}}\Lambda^{\frac{p}{2}} \tag{31}$$

知$T_\gamma\left(Du^n\right)\in L^{p'}(\Omega)$。

3.3. 近似解的收敛性和存在性证明

由式(21)，(22)，(29)，(30)可得下列收敛性

$$u^n \rightharpoonup u^\gamma \text{ 弱收敛于 } L^2\left(0,T;W^{2,\frac{4}{4-p}}(\Omega)\right), \tag{32}$$

$$\theta^n \rightharpoonup \theta^\gamma \text{ 弱收敛于 } L^2\left(0,T;W^{2,2}(\Omega)\right), \tag{33}$$

$$u_t^n \rightharpoonup u_t^\gamma \text{ 弱收敛于 } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{34}$$

$$\theta_t^n \rightharpoonup \theta_t^\gamma \text{ 弱收敛于 } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \tag{35}$$

由于 $W^{2,\frac{4}{4-p}}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,2}(\Omega)$，$W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,2}(\Omega)$，利用 Aubin-Lions 引理可得

$$u^n \to u^\gamma \text{ 强收敛于 } L^2\left(0,T;W^{1,2}(\Omega)\right), \tag{36}$$

$$\theta^n \to \theta^\gamma \text{ 强收敛于 } L^2\left(0,T;W^{1,2}(\Omega)\right) \tag{37}$$

利用 $L^2(\Omega)$ 范数下半连续性及式(16)有

$$\left\|\nabla u^\gamma(t)\right\|_2^2 \le \Lambda, \left\|\nabla \theta^\gamma(t)\right\|_2^2 \le \Gamma \tag{38}$$

由式(32)，(34)知 $u^\gamma \in L^2\left(0,T;W^{2,\frac{4}{4-p}}(\Omega)\right)$，$u_t^\gamma \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$，进而可得

$$u^\gamma \in C\left(0,T;V^{1,2}(\Omega)\right) \tag{39}$$

由式(33)，(35)知 $\theta^\gamma \in L^2\left(0,T;W^{2,2}(\Omega)\right)$，$\theta_t^\gamma \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$，有

$$\theta^\gamma \in C\left(0,T;V^{1,2}(\Omega)\right) \tag{40}$$

由式(36)，(37)知，对 $\gamma > 0$ 有

$$\nabla u^n \to \nabla u^\gamma \quad a.e. \text{ 强收敛于 } \Omega_T \quad \nabla \theta^n \to \nabla \theta^\gamma \quad a.e. \text{ 强收敛于 } \Omega_T \tag{41}$$

由式(41)以及 $T_\gamma\left(Du^n\right)$ 的连续性知，对所有 $\gamma > 0$

$$T_\gamma\left(Du^n\right) \to T_\gamma\left(Du^\gamma\right) \quad a.e. \text{ 强收敛于 } \Omega_T, \tag{42}$$

因此，根据式(31)，应用 Vitali's 收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_T} T_\gamma\left(Du^n\right) : D\Phi = \int_{\Omega_T} T_\gamma\left(Du^\gamma\right) : D\Phi, \quad \Phi \in L^p\left(0,T;W^{1,p}(\Omega)\right) \tag{43}$$

由式(5)，(6)知，对于固定的 $n \ge m$ 和 $w \in X_m, v \in Y_m$，有

$$\begin{aligned}
&\left(u_t^n, w\right) + \left(\left(u^n \cdot \nabla\right) u^n, w\right) + \left(T_\gamma\left(Du^n\right), Dw\right) = \left(e_3 \theta^n, w\right) + \left(f, w\right), \\
&\left(\theta_t^n, v\right) + \left(\left(u^n \cdot \nabla\right) \theta^n, v\right) + \left(\nabla \theta^n, \nabla v\right) = \left(g, v\right).
\end{aligned} \tag{44}$$

在式(41)两端乘以 $\eta \in C^1(0,T;\mathbb{R})$，关于 t 在 $(0,T)$ 上积分有

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(u_t^n, \eta w\right) + \left(\left(u^n \cdot \nabla\right) u^n, \eta w\right) + \left(T_\gamma\left(Du^n\right), \eta Dw\right) \mathrm{d}t = \int_0^T \left(e_3 \theta^n, \eta w\right) \mathrm{d}t + \int_0^T \left(f, \eta w\right) \mathrm{d}t, \\
&\int_0^T \left(\theta_t^n, \eta v\right) + \left(\left(u^n \cdot \nabla\right) \theta^n, \eta v\right) + \left(\nabla \theta^n, \eta \nabla v\right) \mathrm{d}t = \int_0^T \left(g, \eta v\right) \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{45}$$

在式(45)中令 $n \to \infty$ 取极限，对任意的 $\eta \in C^1(0,T;\mathbb{R})$，由式(32)-(35)和式(43)有

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(u_t^\gamma, \eta w\right) + \left(\left(u^\gamma \cdot \nabla\right) u^\gamma, \eta w\right) + \left(T_\gamma\left(Du^\gamma\right), \eta Dw\right) \mathrm{d}t = \int_0^T \left(e_3 \theta^\gamma, \eta w\right) \mathrm{d}t + \int_0^T \left(f, \eta w\right) \mathrm{d}t, \\
&\int_0^T \left(\theta_t^\gamma, \eta v\right) + \left(\left(u^\gamma \cdot \nabla\right) \theta^\gamma, \eta v\right) + \left(\nabla \theta^\gamma, \eta \nabla v\right) \mathrm{d}t = \int_0^T \left(g, \eta v\right) \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{46}$$

由式(39)的正则性知，对 $u^{\gamma} \in C\left(\left[0,T\right);L^{3}\left(\Omega\right)\right)$ 有

$$\begin{aligned}&\left(u_t^{\gamma},\varphi\right)+\left(\left(u^{\gamma}\cdot\nabla\right)u^{\gamma},\varphi\right)+\left(T_{\gamma}\left(Du^{\gamma}\right),D\varphi\right)=\left(e_3\theta^{\gamma},\varphi\right)+\left(f,\varphi\right), \quad \varphi\in V^{1,p}\left(\Omega\right),\\&\left(\theta_t^{\gamma},\psi\right)+\left(\left(u^{\gamma}\cdot\nabla\right)\theta^{\gamma},\psi\right)+\left(\nabla\theta^{\gamma},\nabla\psi\right)=\left(g,\psi\right), \quad \psi\in V^{1,2}\left(\Omega\right).\end{aligned} \tag{47}$$

令 $\gamma \to 0$ 取极限，采用与上述 $n \to \infty$ 同样的方法，我们得到

$$\begin{aligned}&\left(u_t,\varphi\right)+\left(\left(u\cdot\nabla\right)u,\varphi\right)+\left(T_{\gamma}\left(Du\right),D\varphi\right)=\left(e_3\theta,\varphi\right)+\left(f,\varphi\right), \quad \varphi\in V^{1,p}\left(\Omega\right),\\&\left(\theta_t,\psi\right)+\left(\left(u\cdot\nabla\right)\theta,\psi\right)+\left(\nabla\theta,\nabla\psi\right)=\left(g,\psi\right), \quad \psi\in V^{1,2}\left(\Omega\right).\end{aligned}$$

定理 1 得证。

4. 总结

本文在三维空间中考虑一类不可压非牛顿 Boussinesq 方程组的周期初边值问题，给出了证明正则解存在性的详细步骤，采用 Galerkin 方法构造近似解序列 $\left\{u^n,\theta^n\right\}$，通过对近似解序列 $\left\{u^n,\theta^n\right\}$ 进行一致估计以及收敛性的证明并利用紧性方法证明其解的存在性。

基金项目

吉林省教育厅科学研究项目(项目号：JJKH20230790KJ)。

参考文献

[1] 张能球. 几类流体力学方程组的解的适定性[D]: [博士学位论文]. 上海: 华东理工大学, 2021.

[2] Majda, A.J., Bertozzi, A.L. and Ogawa, A. (2002) Vorticity and Incompressible Flow. Cambridge Texts in Applied Mathematics. *Applied Mechanics Reviews*, **55**, B77-B78. https://doi.org/10.1115/1.1483363

[3] Pedlosky, J. (1897) Geophysical Fluid Dynamics. Springer, New York.

[4] Ladyzhenskaya, O.A. (1969) The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. Gordon and Breach, New York.

[5] Lions, J.L. (1969) Quelquesméthodes de résolution des probémes aux limites non lineáires. Dunod, Paris.

[6] Bellout, H., Bloom, F. and Nečas, J. (1994) Young Measure-Valued Solutions for Non-Newtonian Incompressible Fluids. *Communications in Partial Differential Equations*, **19**, 1763-1803. https://doi.org/10.1080/03605309408821073

[7] Málek, J., Nečas, J. and Růžička, M. (1993) On the Non-Newtonian Incompressible Fluids. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **3**, 35-63. https://doi.org/10.1142/S0218202593000047

[8] Frehse, J., Málek, J. and Steinhauer, M. (2000) On Existence Results for Fluids with Shear Dependent Viscosity-Unsteady Flows. *Partial Differential Equations*, Routledge, Oxfordshire, 121-129. https://doi.org/10.1201/9780203744376-12

[9] Málek, J., Nečas, J. and Růžička, M. (2001) On Weak Solutions to a Class of Non-Newtonian Incomepressible Fluids in Bounded Three-Dimensional Domains: The Case p≥2. *Advances in Differential Equations*, **6**, 257-302. https://doi.org/10.57262/ade/1357141212

[10] Boling, G. and Yadong, S. (2002) The Periodic Initial Value Problem and Initial Value Problem for the Modified Boussinesq Approximation. *Journal of Partial Differential Equations*, **15**, 57-71.

[11] 杨惠, 王长佳. 一类稳态不可压非牛顿 Boussinesq 方程组解的存在唯一性[J]. 吉林大学学报(理学版), 2019, 57(4): 753-761.

[12] Necas, J., Málek, J., Rokyta, M., *et al.* (2019) Weak and Measure-Valued Solutions to Evolutionary PDEs. Chapman and Hall, London. https://doi.org/10.1201/9780367810771