Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(4), 1964-1970
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.124201

几类重图的阶为4的图对分解

赵依凡*，杨卫华

太原理工大学数学学院，山西 太原

收稿日期：2023年3月26日；录用日期：2023年4月21日；发布日期：2023年4月29日

摘 要

对于某个整数$t \geq 4$，如果G和H是K_t的两个边不交的、非同构的、无孤立点的生成子图且满足$E(G)\cup E(H)=E(K_t)$，那么称(G,H)是阶为t的图对。Abueida和Daven得到了$P_m\square P_n$，$P_m\square C_n$，$P_m\square K_n$，$C_m\square C_n$，$C_m\square K_n$，$K_m\square K_n$的阶为4的图对分解存在的充要条件。作为其结果的推广，本文给出$\lambda(P_m\square P_n)$，$\lambda(P_m\square C_n)$，$\lambda(P_m\square K_n)$，$\lambda(C_m\square C_n)$，$\lambda(C_m\square K_n)$，$\lambda(K_m\square K_n)$，$\lambda L(K_n)$的阶为4的图对分解存在的充要条件。

关键词

分解，图对，重图

Multidecompositions of Several Multigraphs for Graph-Pair of Order 4

Yifan Zhao*, Weihua Yang

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Mar. 26th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 29th, 2023

Abstract

For some integer $t \geq 4$, if G and H are edge disjoint, non-isomorphic and non-isolated vertices spanning subgraphs of K_t such that $E(G)\cup E(H)=E(K_t)$, then we say that (G,H) is a graph-pair of order t. Abueida and Daven have introduced the necessary and sufficient conditions of the existence of multidecompositions of $P_m\square P_n$, $P_m\square C_n$, $P_m\square K_n$, $C_m\square C_n$, $C_m\square K_n$, $K_m\square K_n$ for graph-pair of order 4. As a generalization, we obtain the necessary and sufficient conditions of the existence of multidecompositions of $\lambda(P_m\square P_n)$, $\lambda(P_m\square C_n)$, $\lambda(P_m\square K_n)$, $\lambda(C_m\square C_n)$, $\lambda(C_m\square K_n)$,

文章引用: 赵依凡, 杨卫华. 几类重图的阶为 4 的图对分解[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1964-1970.
DOI: 10.12677/aam.2023.124201

$\lambda(K_m\square K_n)$，$\lambda L(K_n)$ for graph-pair of order 4.

Keywords

Multidecompositon, Graph-Pair, Multigraph

1. 引言

对于某个整数 $t\geq 4$，如果 G 和 H 是 K_t 的两个边不交的、非同构的、无孤立点的生成子图且满足 $E(G)\cup E(H)=E(K_t)$，那么称 (G,H) 是阶为 t 的图对。如果 $H_1,H_2,\cdots,H_l$ 是图 G 的边不交的子图且 $E(G)=\bigcup_{i=1}^{l}E(H_i)$，则我们说 G 有 $\{H_1,H_2,\cdots,H_l\}$-分解，并且记为 $G=H_1\oplus H_2\oplus\cdots\oplus H_l$ 或 $G=\oplus_{i=1}^{l}H_i$。对于 $1\leq i\leq l$，如果 $H_i\cong H$，那么我们说 G 有 H-分解。对于 $1\leq i\leq l$，给定一个阶为 t 的图对 (S,T)，如果 $H_i\cong S$ 或 $H_i\cong T$ 且 $H_1,H_2,\cdots,H_l$ 中至少存在一个 S 的复制和 T 的复制，那么我们说 G 存在阶为 t 的图对分解且记为 G 有 $\{S,T\}$-分解。设 C_n 表示 n 个顶点的圈，记为 $(v_1,v_2,\cdots,v_n)$。我们把两条点不交的边记为 E_2。显然在上述定义下，阶为 4 的图对是 (C_4,E_2)。注意到，如果 G 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解，那么 λG 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

设 G 是一个简单图，将 G 的每条边变成 λ 条边得到的重图记为 λG。简单图 G 和 H 的笛卡尔积记为 $G\square H$，其中 $V(G\square H)=V(G)\times V(H)$，$E(G\square H)=\{(u_1,v_1),(u_2,v_2)\}$ $(u_1=u_2,\{v_1,v_2\}\in E(H)$ 或 $v_1=v_2,\{u_1,u_2\}\in E(G))$。显然，$G\square H\cong H\square G$。设 K_n 表示 n 个顶点的完全图，其中 $V(K_n)=Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$。设 $K_{m,n}$ 表示完全二部图 (X,Y)，其中 $|X|=m$，$|Y|=n$。尚未给出的图论术语见文献[1] [2]。

图分解的存在性问题一直受到众多学者的广泛关注[3]-[8]。其中针对阶为 t 的图对分解的问题，国内外许多学者对其进行了研究与探索并取得了许多结果。2003 年，Abueida 和 Daven [9]给出了完全图 K_n 的阶为 4 和 5 的图对分解的充要条件。作为其结论的推广：2004 年，刘萍[10]得到了完全多部图 $K_n(t)$ 的阶为 4 和 5 的图对分解的充要条件。2005 年，Abueida [11]等人研究 λK_n 的阶为 4 和 5 的图对分解的存在性，给出了 λK_n 的阶为 4 和 5 的图对分解的充要条件。2015 年，Gao 和 Roberts [12]给出了完全图 K_n 的阶为 6 的图对分解的充要条件。2013 年，Abueida 和 Daven [13]考虑特殊图的笛卡尔积的阶为 4 的图对分解的存在性，得到了 $P_m\square P_n$，$P_m\square C_n$，$P_m\square K_n$，$C_m\square C_n$，$C_m\square K_n$，$K_m\square K_n$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解的充要条件。

受以上文献的启发，本文将给出 $\lambda(P_m\square P_n)$，$\lambda(P_m\square C_n)$，$\lambda(P_m\square K_n)$，$\lambda(C_m\square C_n)$，$\lambda(C_m\square K_n)$，$\lambda(K_m\square K_n)$，$\lambda L(K_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解的充要条件。因为 $|E(C_4)|=4$，$|E(E_2)|=2$，所以 G 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解的一个必要条件是 $|V(G)|\geq 4$，$|E(G)|\geq 6$ 且 $|E(G)|$ 是偶数。显然，如果图 G 存在 C_4-分解，那么图 G 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。反过来，如果图 G 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解，那么图 G 不一定存在 C_4-分解。例如：K_4 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解，但 K_4 不存在 C_4-分解。

2. 预备知识

本节给出了本文需要的一些基本概念和符号。

令图 $G=(V(G),E(G))$，其中 $V(G)$ 是图 G 的顶点集，$E(G)$ 是图 G 的边集。如果 G 是一个多重图，那么两个相同端点之间的边视为不同的边。任意非空子集 $S\subseteq V(G)$，$G[S]$ 表示 G 的由 S 导出的子图。G 的线图记为 $L(G)=\left(\{e|e\in E(G)\},\{\{e,f\}|\{e,f\}\subseteq E(G),|e\cap f|=1\}\right)$。

定理 2.1 $H(i)$，$G(j)$ 分别表示 $(G\square H)[V(i)]$ 和 $(G\square H)[V(j)]$，其中 $V(i)=\{i\}\times V(H)$ $(i\in V(G))$，$V(j)=V(G)\times\{j\}$ $(j\in V(H))$。

定理 2.2 $Q_n(i)$ 表示 $L(K_n)[V(i)]$，其中 $V(i)=\{\{i,j\}|j\in Z_n-\{i\}\}(i\in Z_n)$。

定理 2.3 [13] $P_m\square P_n$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解当且仅 1) m,n 都是偶数且当 $m=2$ 时，$n\geq 4$，2) m,n 都是偶数且当 $n=2$ 时，$m\geq 4$，或 3) m,n 都是奇数且 $m\geq 3$，$n\geq 3$。

定理 2.4 [13] $P_m\square C_{2t}$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解当且仅当 $m\geq 2$，$t\geq 2$ 且为整数。

定理 2.5 [13] $P_m\square K_n$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解当且仅当 1) m,n 都是偶数且当 $m=2$ 时，$n\geq 4$，2) m,n 都是偶数且当 $n=2$ 时，$m\geq 4$，或 3) m 为奇数，$n\equiv 0,1(\bmod 4)$ 且 $n\geq 4$。

定理 2.6 [13] $C_m\square K_n$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解当且仅当 1) m 是偶数，$n\geq 2$，或 2) m 是奇数且 $n\equiv 0,3(\bmod 4)$。

定理 2.7 [13] $K_m\square K_n$ $(mn\geq 4)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解当且仅当满足下列条件之一：1) $m\equiv n\equiv 0(\bmod 2)$ 且当 m(或n)$=2$ 时，n(或m)$=2\geq 4$，2) m 或 n) 是奇数且 n(或m)$\equiv 0(\bmod 4)$，3) $m\equiv n\equiv 1(\bmod 4)$ 且当 m(或n)$=1$ 时，n(或m)$\neq 5$，或 4) $m\equiv n\equiv 3(\bmod 4)$。

定理 2.8 [11]如果 $m\geq 4$，下列结论是正确的：

1) K_m 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解当且仅当 $m\equiv 0,1(\bmod 4)$ 且 $m\neq 5$。

2) 如果 $m\equiv 2,3(\bmod 4)$ 且 λ 是偶数，那么 λK_m 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

定理 2.9 [14] 设 m,n,λ 是整数，$m,n\geq 3$ 且 $\lambda\geq 1$。λK_n 存在 C_m-分解当且仅当 1) $m\leq n$，2) $\lambda(n-1)$ 是偶数且 3) $m\left|\lambda\binom{n}{2}\right.$。

定理 2.10 [15] $\lambda L(K_n)(n\geq 4)$ 存在 C_4-分解当且仅当 1) n 是偶数，2) $n\equiv 1(\bmod 4)$，$\lambda\equiv 0(\bmod 2)$，3) $n\equiv 3(\bmod 4)$，$\lambda\equiv 0(\bmod 4)$，或 4) $n\equiv 1(\bmod 8)$，λ 是奇数。

3. 主要结论及其证明

定理 3.1 $\lambda(P_m\square P_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解当且仅当 1) $mn\geq 4$，2) $\lambda(2mn-m-n)\geq 6$ 且是偶数。

证明 假设 $\lambda(P_m\square P_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。因为 $|V(\lambda(P_m\square P_n))|=mn$ 且 $|E(\lambda(P_m\square P_n))|=\lambda(m(n-1)+n(m-1))=\lambda(2mn-m-n)$，所以 $mn\geq 4$，$\lambda(2mn-m-n)\geq 6$ 且偶数。因此，必要性得证。

下证充分性。设 $V(\lambda(P_m\square P_n))=Z_m\times Z_n$。我们分以下两种情况讨论：

情形 1 m,n 奇偶性相同。

当 m,n 同为奇数，由定理 2.3，我们有 $\lambda(P_m\square P_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

当 m,n 同为偶数且 $m\geq 4$ 或 $n\geq 4$，由定理 2.3，我们有 $\lambda(P_m\square P_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

当 $m=n=2$，因为 $\lambda(2mn-m-n)\geq 6$，所以 $\lambda\geq 2$。对于 $1\leq i\leq\lambda-1$，设 $C(1,i)=((0,0),(0,1),(1,1),(1,0))$，$E(1)=\{(0,0),(0,1)\}\cup\{(1,0),(1,1)\}$，$E(2)=\{(0,0),(1,0)\}\cup\{(0,1),(1,1)\}$。那么，$\lambda(P_2\square P_2)=\oplus_{i=1}^{\lambda-1}C(1,i)\oplus E(1)\oplus E(2)$。因此，$\lambda(P_2\square P_2)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

情形 2 m,n 奇偶性不同。

因为 $\lambda(2mn-m-n)$ 是偶数，所以 λ 是偶数。

对于 $0\leq i\leq m-2$，$0\leq j\leq n-2$，设 $C(i,j)=((i,j),(i,j+1),(i+1,j+1),(i+1,j))$，

$E(1,i)=\{(i,0),(i+1,0)\}\cup\{(i,n-1),(i+1,n-1)\}$，$E(2,j)=\{(0,j),(0,j+1)\}\cup\{(m-1,j),(m-1,j+1)\}$。那么，$2(P_m\square P_n)=\oplus_{j=0}^{n-2}\left(\oplus_{i=0}^{m-2}C(i,j)\right)\oplus_{i=0}^{m-2}E(1,i)\oplus_{j=0}^{n-2}E(2,j)$。因此，$\lambda(P_m\square P_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。

定理 3.2 $\lambda(P_m\square C_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解当且仅当 1) $mn\geq 4$，2) $\lambda(2mn-n)\geq 6$且是偶数。

证明 假设$\lambda(P_m\square C_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。因为$\left|V(\lambda(P_m\square C_n))\right|=mn$且$\left|E(\lambda(P_m\square C_n))\right|=\lambda(mn+n(m-1))=\lambda(2mn-n)$，所以$mn\geq 4$，$\lambda(2mn-n)\geq 6$且是偶数。因此，必要性得证。

下证充分性。设$V(\lambda(P_m\square C_n))=Z_m\times Z_n$。我们分以下两种情况讨论：

情形 1 n是偶数。

由定理 2.4，$\lambda(P_m\square C_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。

情形 2 n是奇数。

因为$\lambda(2mn-n)$是偶数，所以λ是偶数。对于$0\leq i\leq m-1$，设$E(i)=\{(i,0),(i,n-1)\}\cup\{(i+1,0),(i+1,n-1)\}$。那么，$2(P_m\square C_n)=2(P_m\square P_n)\oplus_{i=0}^{m-1}E(i)$。由定理 3.1，$\lambda(P_m\square C_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。

定理 3.3 $\lambda(P_m\square K_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解当且仅当 1) $mn\geq 4$，2) $\lambda(mn(n-1)/2+n(m-1))\geq 6$且是偶数，且 3) $n\neq 1$。

证明 假设$\lambda(P_m\square K_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。因为$\left|V(\lambda(P_m\square K_n))\right|=mn$且$\left|E(\lambda(P_m\square K_n))\right|=\lambda(mn(n-1)/2+n(m-1))$，所以$mn\geq 4$，$\lambda(mn(n-1)/2+n(m-1))\geq 6$且是偶数。当$n=1$时，$\lambda(P_m\square K_n)\cong\lambda P_m$。由于$\lambda P_m$不存在$C_4$，因此$\lambda(P_m\square K_1)$不存在$\{C_4,E_2\}$-分解。因此，必要性得证。

下证充分性。设$V(\lambda(P_m\square K_n))=Z_m\times Z_n$。当$n=2$时，$\lambda(P_m\square K_2)=\lambda(P_m\square P_2)$，由定理 3.1，我们有$\lambda(P_m\square K_2)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。当$n=3$时，$\lambda(P_m\square K_3)\cong\lambda(P_m\square C_3)$，由定理 3.2，我们有$\lambda(P_m\square K_3)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。因此，设$n\geq 4$。我们分以下四种情况讨论：

情形 1 $n\equiv 0(\bmod 4)$。

由定理 2.5，我们有$\lambda(P_m\square K_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。

情形 2 $n\equiv 1(\bmod 4)$。

当m为奇数，由定理 2.5，我们有$\lambda(P_m\square K_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。

当m为偶数。因为$\lambda(mn(n-1)/2+n(m-1))$是偶数，所以$\lambda$是偶数。对于$0\leq i\leq m-2$，$0\leq j\leq n-1$，设$E(i,j)=\{(i,j),(i+1,j)\}\cup\{(i,j+1),(i+1,j+1)\}$。$2(P_m\square K_n)=\oplus_{i=0}^{m-1}2K_n(i)\oplus_{j=0}^{n-1}\left(\oplus_{i=0}^{m-2}E(i,j)\right)$。显然，$2K_n(i)\cong 2K_n$。由定理 2.8 和 2.9，我们有$\lambda(P_m\square K_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。

情形 3 $n\equiv 2(\bmod 4)$。

当m为偶数，由定理 2.5，我们有$\lambda(P_m\square K_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。

当m为奇数。因为$\lambda(mn(n-1)/2+n(m-1))$是偶数，所以$\lambda$是偶数。对于$0\leq i\leq m-2$，$0\leq j\leq n-1$，设$E(i,j)=\{(i,j),(i+1,j)\}\cup\{(i,j+1),(i+1,j+1)\}$。$2(P_m\square K_n)=\oplus_{i=0}^{m-1}2K_n(i)\oplus_{j=0}^{n-1}\left(\oplus_{i=0}^{m-2}E(i,j)\right)$。显然，$2K_n(i)\cong 2K_n$。由定理 2.8，我们有$\lambda(P_m\square K_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。

情形 4 $n\equiv 3(\bmod 4)$。

因为$\lambda(mn(n-1)/2+n(m-1))$是偶数，所以$\lambda$是偶数。对于$0\leq i\leq m-2$，$0\leq j\leq n-1$，设$E(i,j)=\{(i,j),(i+1,j)\}\cup\{(i,j+1),(i+1,j+1)\}$。$2(P_m\square K_n)=\oplus_{i=0}^{m-1}2K_n(i)\oplus_{j=0}^{n-1}\left(\oplus_{i=0}^{m-2}E(i,j)\right)$。显然，$2K_n(i)\cong 2K_n$。由定理 2.8，我们有$\lambda(P_m\square K_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。

定理 3.4 $\lambda(C_m\square K_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解当且仅当 1) $mn\geq 4$，2) $\lambda(mn(n-1)/2+mn)\geq 6$且是偶数，且 3) 当$n=1$时，$m=4$。

证明 假设$\lambda(C_m\square K_n)$存在$\{C_4,E_2\}$-分解。因为$\left|V(\lambda(C_m\square K_n))\right|=mn$且

$\left|E\left(\lambda\left(C_m \square K_n\right)\right)\right|=\lambda\left(mn(n-1)/2+mn\right)$，所以 $mn\geq 4$，$\lambda\left(mn(n-1)/2+mn\right)\geq 6$ 且是偶数。当 $n=1$ 时，$\lambda\left(C_m \square K_1\right)\cong \lambda C_m$。假设 $m\neq 4$，那么 λC_m 不包含 C_4。因此，必要性得证。

下证充分性。设 $V\left(\lambda\left(C_m \square K_n\right)\right)=Z_m\times Z_n$。当 $n=2$，$\lambda\left(C_m \square K_2\right)\cong \lambda\left(C_m \square P_2\right)$，由定理 3.2，我们有 $\lambda\left(C_m \square P_2\right)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。因此，设 $n\neq 2$。我们分以下两种情况讨论：

情形 1 m 是偶数。

当 $n\neq 1$，由定理 2.6，我们有 $\lambda\left(C_m \square K_n\right)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

当 $n=1$。因为 $\lambda\left(mn(n-1)/2+mn\right)\geq 6$，所以 $\lambda\geq 2$。对于 $1\leq i\leq \lambda-1$，设 $C(1,i)=\left((0,0),(1,0),(2,0),(3,0)\right)$，$E(1)=\left\{(0,0),(1,0)\right\}\cup\left\{(2,0),(3,0)\right\}$，$E(2)=\left\{(1,0),(2,0)\right\}\cup\left\{(0,0),(3,0)\right\}$。那么，$\lambda\left(C_4 \square K_1\right)=\oplus_{i=1}^{\lambda-1}C(1,i)\oplus E(1)\oplus E(2)$。因此，$\lambda\left(C_4 \square K_1\right)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

情形 2 m 是奇数。

当 $n\equiv 0,3(\mathrm{mod}\,4)$。由定理 2.6，我们有 $\lambda\left(C_m \square K_n\right)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

当 $n\equiv 1,2(\mathrm{mod}\,4)$。因为 $\lambda\left(mn(n-1)/2+mn\right)$ 是偶数，所以 λ 是偶数。对于 $0\leq j\leq n-1$，设 $E(j)=\left\{(0,j),(m-1,j)\right\}\cup\left\{(0,j+1),(m-1,j+1)\right\}$。那么，$2\left(C_m \square K_n\right)=2\left(P_m \square K_n\right)\oplus_{j=0}^{n-1}E(j)$。由定理 3.3，$\lambda\left(C_m \square K_n\right)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

定理 3.5 $\lambda\left(K_m \square K_n\right)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解当且仅当 1) $mn\geq 4$，2) $\lambda mn(m+n-2)/2\geq 6$ 且是偶数，且 3) 当 $m(\text{或}n)=1$，$n(\text{或}m)=5$ 时，$\lambda>1$。

证明 假设 $\lambda\left(K_m \square K_n\right)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。因为 $\left|V\left(\lambda\left(K_m \square K_n\right)\right)\right|=mn$ 且 $\left|E\left(\lambda\left(K_m \square K_n\right)\right)\right|=\lambda\left(mn(n-1)/2+mn(m-1)/2\right)=\lambda mn(m+n-2)/2$，所以 $mn\geq 4$，$\lambda mn(m+n-2)/2\geq 6$ 且是偶数。当 $m=1$，$n=5$ 时，$\lambda\left(K_1 \square K_5\right)\cong \lambda K_5$。由定理 2.8，$K_5$ 不存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。所以，当 $m(\text{或}n)=1$，$n(\text{或}m)=5$ 时，$\lambda>1$。因此，必要性得证。

下证充分性。设 $V\left(\lambda\left(K_m \square K_n\right)\right)=Z_m\times Z_n$。当 $m=2$ 时，$\lambda\left(K_2 \square K_n\right)\cong \lambda\left(P_2 \square K_n\right)$，由定理 3.3，$\lambda\left(K_2 \square K_n\right)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。当 $m=3$ 时，$\lambda\left(K_3 \square K_n\right)\cong \lambda\left(C_3 \square K_n\right)$，由定理 3.4，$\lambda\left(K_3 \square K_n\right)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。当 $m=1$ 时，$\lambda\left(K_1 \square K_n\right)\cong \lambda K_n$。当 $n\neq 5$ 时，由定理 2.8，$\lambda\left(K_1 \square K_n\right)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。当 $n=5$ 且 λ 是偶数时，由定理 2.9，我们有 λK_5 存在 C_4-分解。因为 $C_4=E_2\oplus E_2$，所以 λK_5 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。当 $n=5$ 且 λ 是奇数时，设 $E(1)=\left\{(0,0),(0,1)\right\}\cup\left\{(0,2),(0,4)\right\}$，$E(2)=\left\{(0,1),(0,2)\right\}\cup\left\{(0,3),(0,4)\right\}$，$E(3)=\left\{(0,0),(0,4)\right\}\cup\left\{(0,2),(0,3)\right\}$，$E(4)=\left\{(0,0),(0,2)\right\}\cup\left\{(0,1),(0,3)\right\}$，$E(5)=\left\{(0,0),(0,3)\right\}\cup\left\{(0,1),(0,4)\right\}$。那么，$\lambda K_5=(\lambda-1)K_5\oplus E(1)\oplus E(2)\oplus E(3)\oplus E(4)\oplus E(5)$。因此，$\lambda K_5$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。因此，设 $m\geq 4$，$n\geq 4$。我们分以下三种情况讨论：

情形 1 m,n 是偶数。

由定理 2.7，我们有 $\lambda\left(K_m \square K_n\right)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

情形 2 m,n 是奇数。

设 $m\equiv k_1(\mathrm{mod}\,4)$，$n\equiv k_2(\mathrm{mod}\,4)$。不失一般性，我们假设 $k_1\leq k_2$。因为 m,n 是奇数，所以 $m+n-2$ 是偶数。因为 $\lambda mn(m+n-2)/2$ 是偶数，所以 $\lambda(m+n-2)/2$ 是偶数。因此，m,n,λ 满足：1) $m+n-2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$，2) $m+n-2\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$，$\lambda$ 是偶数。

当 $m+n-2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$，即 $m\equiv n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ 或 $m\equiv n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$。由定理 2.7，我们有 $\lambda\left(K_m \square K_n\right)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

当 $m+n-2\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$，即 $m\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$，$n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$。

注意到 $\lambda\left(K_m \square K_n\right)=\oplus_{i=0}^{m-1}\lambda K_n(i)\oplus_{j=0}^{n-1}\lambda K_m(j)$，$\lambda K_n(i)\cong \lambda K_n\ (0\leq i\leq m-1)$，$\lambda K_m(j)\cong \lambda K_m\ (0\leq j\leq n-1)$。由定理 2.8 和 2.9，我们有 $\lambda\left(K_m \square K_n\right)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

情形 3 m,n 是奇偶性不同。

不失一般性，假设 m 是偶数，n 是奇数。

当 $m\equiv 0(\bmod 4)$。由定理 2.7，我们有 $\lambda(K_m\Box K_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

当 $m\equiv 2(\bmod 4)$。因为 $\lambda mn(m+n-2)/2$ 是偶数，所以 λ 是偶数。注意到 $\lambda(K_m\Box K_n)=\oplus_{i=1}^{m-1}\lambda K_n(i)\oplus_{j=0}^{n-1}\lambda K_m(j)$，$\lambda K_n(i)\cong\lambda K_n(0\le i\le m-1)$，$\lambda K_m(j)\cong\lambda K_m(0\le j\le n-1)$。由定理 2.8 和 2.9，我们有 $\lambda(K_m\Box K_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

定理 3.6 $\lambda L(K_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解当且仅当 1) $n(n-1)/2\ge 4$，2) $\lambda n(n-1)(n-2)/2\ge 6$ 且是偶数。

证明 假设 $\lambda L(K_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。因为 $|V(\lambda L(K_n))|=n(n-1)/2$ 且 $|E(\lambda L(K_n))|=\lambda n(n-1)(n-2)/2$，所以 $n(n-1)/2\ge 4$，$\lambda n(n-1)(n-2)/2\ge 6$ 且是偶数。因此，必要性得证。

下证充分性。设 $V(K_n)=Z_n$。我们分以下三种情况讨论：

情形 1 n 是偶数。

由定理 2.10，$\lambda L(K_n)$ 存在 C_4-分解，因此 $\lambda L(K_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

情形 2 $n\equiv 1(\bmod 4)$。

$\lambda L(K_n)=\oplus_{i=0}^{n-1}\lambda Q_n(i)$ 且 $\lambda Q_n(i)\cong\lambda K_{n-1}$。由定理 2.8，$\lambda L(K_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

情形 3 $n\equiv 3(\bmod 4)$。

因为 $\lambda n(n-1)(n-2)/2$ 是偶数，所以 λ 是偶数。$\lambda L(K_n)=\oplus_{i=0}^{n-1}\lambda Q_n(i)$ 且 $\lambda Q_n(i)\cong\lambda K_{n-1}$。由定理 2.8，$\lambda L(K_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解。

4. 结语

本文给出了 $\lambda(P_m\Box P_n)$，$\lambda(P_m\Box C_n)$，$\lambda(P_m\Box K_n)$，$\lambda(C_m\Box K_n)$，$\lambda(K_m\Box K_n)$，$\lambda L(K_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解的充要条件。在文献[13]中，$C_m\Box C_n$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解当且仅当 $m\ge 3$，$n\ge 3$。因此，$\lambda(C_m\Box C_n)$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解的充要条件是 $m\ge 3$，$n\ge 3$。注意到，$\lambda(K_m\Box K_n)\cong\lambda L(K_{m,n})$，因此本文也给出了 $\lambda L(K_{m,n})$ 存在 $\{C_4,E_2\}$-分解的充要条件。

本文仅仅考虑了上述多重图的阶为 4 的图对分解。在已有的基础上，我们还可以考虑上述图的阶为 5 或 6 的图对分解。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. The Macmillan Press Ltd., London. https://doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2

[2] 邦迪, 默蒂. 图论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1984.

[3] Cox, B.A. (1995) The Complete Spectrum of 6-Cycle Systems of $\boldsymbol{L}(K_n)$. *Journal of Combinatorial Designs*, **3**, 353-362. https://doi.org/10.1002/jcd.3180030506

[4] Cox, B.A. and Rodger, C.A. (1996) Cycle Systems of the Line Graph of the Complete Graph. *Journal of Graph Theory*, **21**, 173-182. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199602)21:2<173::AID-JGT6>3.0.CO;2-O

[5] Ganesamurthy, S. and Paulraja, P.A. (2019) C_5-Decomposition of the λ-Fold Line Graph of the Complete Graph. *Discrete Mathematics*, **342**, 2726-2732. https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.06.004

[6] Shyu, T.W. (2010) Decomposition of Complete Graphs into Paths and Stars. *Discrete Mathematics*, **310**, 2164-2169. https://doi.org/10.1016/j.disc.2010.04.009

[7] Jeevadoss, S. and Muthusamy, A. (2014) Decomposition of Complete Bipartite Graphs into Paths and Cycles. *Discrete Mathematics*, **331**, 98-108. https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.05.009

[8] Shyu, T.W. (2013) Decomposition of Complete Bipartite Graphs into Paths and Stars with Same Number of Edges. *Discrete Mathematics*, **313**, 865-871. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.12.020

[9] Abueida, A.A. and Daven, M. (2003) Multidesigns for Graph-Pairs of Order 4 and 5. *Graphs and Combinatorics*, **19**, 433-447. https://doi.org/10.1007/s00373-003-0530-3

[10] 刘萍. 4 和 5 阶 $K_n(t)$的图对分解[J]. 徐州师范大学学报: 自然科学版, 2004, 22(4): 10-14.

[11] Abueida, A.A., Daven, M. and Roblee, K.J. (2005) Multidesigns of the λ-Fold Complete Graph for Graph-Pairs of Orders 4 and 5. *Australasian Journal of Combinatorics*, **32**, 125-136.

[12] Gao, Y. and Roberts, D. (2016) Multidecomposition and Multipacking of Complete Graph into Graph Pair of Order 6.

[13] Abueida, A.A. and Daven, M. (2013) Multidecompositions of Several Graph Products. *Graphs and Combinatorics*, **29**, 315-326. https://doi.org/10.1007/s00373-011-1127-x

[14] Bryant, D., Horsley, D., Maenhaut, B. and Smith, B.R. (2011) Cycle Decompositions of Complete Multigraphs. *Journal of Combinatorial Designs*, **19**, 42-69. https://doi.org/10.1002/jcd.20263

[15] Colby, M. and Rodger, C.A. (1993) Cycle Decompositions of the Line Graph of K_n. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **62**, 158-161. https://doi.org/10.1016/0097-3165(93)90078-M