Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(6), 2945-2950
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126296

Hans汉斯

模糊赋范线性空间的0-范数

张入化，蒋　浩

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2023年5月26日；录用日期：2023年6月21日；发布日期：2023年6月29日

摘　要

本文基于T. Bag和S.K. Samanta于2003年建立的模糊赋范线性空间。它们定义的模糊范数所导出的α-范数集是关于α-单增的范数集族$\left\{\|\bullet\|_{\alpha}:\alpha\in(0,1)\right\}$。基于模糊范数与$\alpha$-范数的联系，本文给出了模糊范数所导出的0-范数的概念，研究了0-范数是否是范数、0-范数与下确界范数的关系，同时研究了点列依0-范数收敛与依模糊范数收敛的关系。

关键词

模糊赋范线性空间，0-范数，0-范收敛，0-闭集

0-Norm of Fuzzy Normed Linear Space

Ruhua Zhang, Hao Jiang

School of Sciences, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: May 26th, 2023; accepted: Jun. 21st, 2023; published: Jun. 29th, 2023

Abstract

This paper is based on the fuzzy normed linear space established by T. Bag and S.K. Samanta in 2003. The α-norms set derived by their definition is an ascending family of norms $\left\{\|\bullet\|_{\alpha}:\alpha\in(0,1)\right\}$. Based on the connection between fuzzy norm and α-norm, we present the concept of 0-norm derived by the fuzzy norm. We study whether the 0-norm is the norm, and the relationship of 0-norm and lower boundary norm. And then we also study the relationship between the 0-norm convergence and the fuzzy norm convergence.

Keywords

Fuzzy Normed Linear Space, 0-Norm, Convergence of 0-Norm, 0-Closed Set

文章引用: 张入化, 蒋浩. 模糊赋范线性空间的 0-范数[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 2945-2950.
DOI: 10.12677/aam.2023.126296

1. 引言

T. Bag 与 S.K. Samanta [1]于 2003 年建立了模糊赋范线性空间。模糊赋范线性空间中的模糊范数所导出的 α-范数是赋范线性空间中的经典范数。它们讨论了模糊范数与 α-范数之间的有趣关系，得到了模糊范数收敛等价于 α-范数 $(\alpha\in(0,1))$ 收敛的结果，进而研究了模糊赋范线性空间的一些性质，得到了在有限维线性空间中的模糊范数等价的结论。随后，T. Bag 和 S.K. Samanta [2]给出模糊赋范空间中线性算子连续性、有界性的概念并研究模糊赋范线性空间的泛函特征。随后，许多学者研究了模糊赋范线性空间中的拓扑性质如模糊不动点问题、模糊连续映射等，进一步丰富发展了模糊泛函分析。模糊赋范空间的拓扑性质可参考文献[3] [4] [5] [6]。T. Bag 与 S.K. Samanta 在模糊赋予范线性空间中所引入的 α-范数，当 $\alpha=0$ 时，α-范数可能是不存在的。因此，我们在模糊赋范线性空间中，根据 α-范数是上升集簇的性质，定义了 0-范数的概念，并讨论了 0-范数是否为范数、0-范数与下确界范数的关系以及模糊赋范线性空间点列的收敛性质。

2. 模糊赋范线性空间

定义 1.1 [1] (模糊范数的定义)设 X 是线性空间，θ 为其零元，N 为 $X\times R$ 上的模糊子集。如果对 $\forall x,y\in X$，$c\in R$，有

(N1) $\forall t\le 0$ 有 $N(x,t)=0$；

(N2) $\forall t\in R$ 且 $t>0$，有 $N(x,t)=1$ 当且仅当 $x=\theta$；

(N3) $\forall t\in R$ 且 $t>0$，如果 $c\neq 0$，有 $\|x\|_\alpha=\wedge\{t>0:N(x,t)\ge\alpha\}$；

(N4) $\forall s,t\in R$，有

$$N(x+y,s+t)\ge\min\{N(x,s),N(y,t)\};$$

(N5) $N(x,\cdot)$ 为 R 上的不减函数且 $\lim\limits_{t\to+\infty}N(x,t)=1$。

则称 N 为 X 上的模糊范数，(X,N) 为模糊赋范线性空间。

注[2]：$N(x,t)$ 表示 x 的范数是实数 t 的真值。

例 1.2 [1]设 $(X,\|\bullet\|)$ 为赋范线性空间，对 $\forall x\in X$，$\forall t\in R$，定义：

$$N(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t}{t+\|x\|}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

则 N 为 X 上的模糊范数。

设 (X,N) 为模糊赋范线性空间，$\alpha\in(0,1)$，对 $\forall x\in X$，令

$$\|x\|_\alpha=\wedge\{t>0:N(x,t)\ge\alpha\}. \tag{1.1}$$

T. Bag 与 S.K. Samanta [1]给出了 $\|\bullet\|_\alpha$ 为 X 上范数的一个条件。

引理 1.3 [1]设 (X,N) 为模糊赋范线性空间，若模糊范数 N 满足以下条件：

(N6) $\forall t>0$，有 $N(x,t)>0$，则 $x=\theta$。

则由(1.1)式定义的$\|\bullet\|_\alpha\left(\alpha\in(0,1)\right)$为 X 上的范数，且$\left\{\|\bullet\|_\alpha:\alpha\in(0,1)\right\}$为 X 上的单增范数簇。称$\|\bullet\|_\alpha$为由模糊范数 N 导出的 α-范数。

引理 1.4 [1]设 X 是线性空间，$\left\{\|\bullet\|_\alpha:\alpha\in(0,1)\right\}$为 X 上一单增范数簇，令

$$N':X\times R\to[0,1],$$

$$N'(x,t)=\begin{cases}\bigvee\limits_{\alpha\in(0,1)}\left\{\alpha:\|x\|_\alpha\le t\right\} & (x,t)\ne(\theta,0)\\ 0 & (x,t)\ne(\theta,0)\end{cases},\tag{1.2}$$

则 N' 为 X 上的模糊范数。

定理 1.5 设 X 是线性空间，$\left\{\|\bullet\|_\alpha:\alpha\in(0,1)\right\}$为 X 上一单增范数簇，且对$\forall x\in X$，$x\ne\theta$，$\exists t_x>0$，使得$\forall\alpha\in(0,1)$，都有$\|x\|_\alpha>t_x$。对$x\in X$，令

$$N'(x,t)=\begin{cases}\bigvee\limits_{\alpha\in(0,1)}\left\{\alpha:\|x\|_\alpha\le t\right\} & (x,t)\ne(\theta,0)\\ 0 & (x,t)\ne(\theta,0)\end{cases},$$

则 N' 为 X 上的模糊范数，且 N' 满足(N6)条件。

证：由定引理 1.4 知，N' 为 X 上的模糊范数。

下证：N' 满足(N6)条件。

事实上，若存在$x\in X$，对$\forall t>0$，有$N'(x,t)>0$，但$x\ne\theta$。由定理条件和 N' 的定义知，

$$N'(x,t_x)=0\left(\left\{\alpha\in(0,1):\|x\|_\alpha\le t_x\right\}=\varphi\right),$$

这与已知的$N'(x,t)>0$矛盾，所以$x=\theta$。

引理 1.6 [1]设(X,N)为模糊赋范线性空间且模糊范数 N 满足条件(N6)。若模糊范数 N 还满足条件：

(N7) $\forall x\in X\ (x\ne\theta)$，$N(x,\cdot)$关于 t 连续且在$\{t:0<N(x,t)<1\}$上严格递增。

则$\forall x\in X(\ne\theta)$，$\forall\alpha\in(0,1)$，有$N\left(x,\|x\|_\alpha\right)=\alpha$。

下面介绍模糊赋范线性空间中点列模糊收敛的概念及其与 α-范数收敛的关系。

定义 1.7 [1]设(X,N)为模糊赋范线性空间，$\{x_n\}$是 X 中的点列，如果$\exists x_0\in X$，使得

$$N(x_n-x_0,t)=1,\ \forall t>0.$$

则称$\{x_n\}$模糊收敛且模糊收敛到x_0，记为$x_n\xrightarrow{N}x_0$，x_0称为$\{x_n\}$的模糊极限。

注[1]：模糊极限如果存在，那么极限唯一。

定义 1.8 [4]设(X,N)为模糊赋范线性空间，A 为 X 的子集。

1) A 中所有模糊收敛点列的模糊极限所成之集称为 A 的导集，记为A'。

2) 若$A'\subseteq A$，则称 A 为模糊闭集。

3) 称$A\cup A'$为 A 的模糊闭包，记为$\bar{A}$。

定义 1.9 设(X,N)为模糊赋范线性空间，$\{x_n\}$是 X 中的点列，$\alpha\in[0,1)$，如果$\exists x_0\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|_\alpha=0.$$

则称$\{x_n\}$依 α-范收敛且 α-范收敛到x_0，记为$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_\alpha}x_0$，$x_0$称为$\{x_n\}$的 α-极限。

引理 1.10 [1]设(X,N)为模糊赋范线性空间，模糊范数 N 满足条件(N6)和(N7)，$\{x_n\}$是 X 中的点列，$x_0\in X$。则$x_n\xrightarrow{N}x_0$当且仅当对$\forall\alpha\in(0,1)$，有$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_\alpha}x_0$。

从 T. Bag 与 S.K. Samanta [1]对引理 1.1.6 的证明过程知下引理成立。

引理 1.11 [1]设(X,N)为模糊赋范线性空间，$\{x_n\}$是X中的点列，$x_0\in X$。若$x_n\xrightarrow{N}x_0$，那么对$\forall\alpha\in(0,1)$，有$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_\alpha}x_0$。

3. 模糊赋范线性空间的 0-范数

本节，我们在模糊赋范线性空间中引入 0-范数的概念，并讨论其相关性质。

设(X,N)为模糊赋范线性空间且模糊范数满足(N6)条件，对$x\in X$，

$$\|x\|_0=\wedge\{t>0:N(x,t)>0\} \tag{2.1}$$

由模糊范数的定义知，$\{t>0:N(x,t)>0\}\neq\phi$，所以$\|x\|_0$有定义且$\|x\|_0\geq 0$。下面验证$\|x\|_0$满足范数的三个条件：

1) 正定性：

若$\|x\|_0=0$，则

$$\wedge\{t>0:N(x,t)>0\}=0\Rightarrow\forall t>0,N(x,t)>0.$$

由条件(N6)知，

$$x=\theta,$$

若$x=\theta$，则

$$\forall t>0,N(x,t)=1\Rightarrow\wedge\{t>0:N(x,t)>0\}=0.$$

2) 齐次性：

$\forall x\in X$，$c\in R$。

当$c\neq 0$时，

$$\begin{aligned}\|cx\|_0&=\wedge\{t>0:N(cx,t)>0\}\\&=\wedge\left\{t>0:N\left(x,\frac{t}{|c|}\right)>0\right\}\\&=\wedge\left\{t>0:N\left(x,\frac{t}{|c|}\right)>0\right\}\\&=\wedge\{|c|t>0:N(x,t)>0\}\\&=|c|\wedge\{t>0:N(x,t)>0\}\\&=|c|\|x\|_0.\end{aligned}$$

当$c=0$时，

$$\|0x\|_0=\|\theta\|_0=0=0\|x\|_0=0\|x\|_0.$$

3) 三角不等式：

对$\forall x,y\in X$，

$$\begin{aligned}\|x\|_0+\|y\|_0&=\wedge\{t>0:N(x,t)>0\}+\wedge\{s>0:N(y,s)=1\}\\&=\wedge\{t+s>0:N(x,t)>0,N(y,s)>0\}\\&\overset{\text{由}(N4)}{\geq}\wedge\{t+s>0:N(x+y,t+s)=1\}\\&\overset{\text{由}(N4)}{\geq}\wedge\{t+s>0:N(x+y,t+s)=1\}\end{aligned}$$

综上所述，0-范数是 X 上的范数。

从以上讨论知，下定理成立。

定理 2.1 设 (X,N) 为模糊赋范线性空间且模糊范数 N 满足(N6)条件，则由(2.1)式定义的 $\|\cdot\|_0$ 为 X 上的范数，称其为由模糊范数 N 导出的 0-范数。

从 $\|\cdot\|_\alpha\ (\alpha\in(0,1))$ 及 $\|\cdot\|_0$ 的定义易知下述推论成立。

推论 2.2 设 (X,N) 模糊赋范线性空间且模糊范数 N 满足(N6)条件，$\{\|\bullet\|_\alpha:\alpha\in[0,1)\}$ 为 X 上一单增范数族。

设 (X,N) 为模糊赋范线性空间，$\alpha\in(0,1)$，由(1.1)式定义的 $\|\cdot\|_\alpha$ 为 X 上范数。再由 $\|\cdot\|_\alpha$ 的定义知，$\forall x\in X$，$x\neq\theta$，$\|x\|_\alpha$ 关于 α 在 $(0,1)$ 上单增。故而 $m_x=\wedge\{\|x\|_\alpha:\alpha\in(0,1)\}$ 存在，且 $m_x=\lim\limits_{\alpha\to0^+}\|x\|_\alpha$。若模糊范数 N 满足(N6)条件，则 $\forall x\in X$，$x\neq\theta$，$\exists t_x>0$，使得 $N(x,t_x)=0$，从而 $\|x\|_\alpha\geq t_x\ (\forall\alpha\in(0,1))$。故而 $m_x=\lim\limits_{\alpha\to0^+}\|x\|_\alpha\geq t_x>0$。因此，若 $m_x=0$，则必有 $x=\theta$。从而易得如下结论。

定理 2.3 设 (X,N) 为模糊赋范线性空间且模糊范数 N 满足(N6)条件，$\|\bullet\|_\alpha$ 是由(1.1.1)式导出的 α-范数。对 $\forall x\in X$，令

$$m_x=\underset{\alpha\in(0,1)}{\wedge}\|x\|_\alpha,\tag{2.2}$$

则 m_x 为 X 上的范数，且有 $m_x\leq\|x\|_\alpha\ (\forall\alpha\in(0,1))$，称 m_x 为 X 上的下确界范数。

定理 2.4 设 (X,N) 为模糊赋范线性空间，且模糊范数 N 满足(N6) (N7)条件，则对 $\forall x\in X$，$m_x=\|x\|_0$。

证明：对 $\forall x\in X$，

1) 若 $x=\theta$，则 $m_x=0=\|x\|_0$。

2) 若 $x\neq\theta$，则对 $\forall\alpha\in(0,1)$，由引理 1.6 知，

$$N(x,\|x\|_\alpha)=\alpha.$$

由 $N(x,\cdot)$ 关于 t 在 R 上连续且 $m_x=\lim\limits_{\alpha\to0^+}\|x\|_\alpha$ 知，

$$N(x,m_x)=0.$$

又由于 $\|x\|_0>0$ 且 $N(x,t)=0\left(\forall t<\|x\|_0\right)$，再用 $N(x,\cdot)$ 关于 t 在 R 上连续得，

$$N(x,\|x\|_0)=\lim_{t\to\|x\|_0^-}N(x,t)=0.$$

因此，$N(x,m_x)=N(x,\|x\|_0)=0.$

若 $\|x\|_0<m_x$，则 $\exists t_0\in(\|x\|_0,m_x)$，使得 $N(x,t_0)>0$。故而

$$N(x,t_0)>0=N(x,m_x),$$

这与(N5) $N(x,\cdot)$ 关于 t 在 R 上不减矛盾。因此，$\|x\|_0=m_x$。

下述例子中，由模糊范数 N 所导出的 α-范数 $(\alpha\in[0,1))$ 是范数，同时 0-范数等于下确界范数也成立。

例 2.5 设 $(x,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，对 $\forall x\in X$，$\alpha\in(0,1)$，令

$$N(x,t)=\begin{cases}\underset{\alpha\in(0,1)}{\vee}\{\alpha:(\alpha+1)\|x\|_\alpha\leq t\} & (x,t)\neq(\theta,0)\\ 0 & (x,t)=(\theta,0)\end{cases},$$

则 N 为 X 上的模糊范数，且模糊范数满足(N6) (N7)条件。

证明：由引理 1.4 知，N 为 X 上的模糊范数，再由定理 1.5 知，模糊范数 N 满足(N6)条件。不难发现，模糊范数 N 也满足(N7)条件。

下面讨论，模糊赋范线性空间中点列的按 0-范数收敛与模糊收敛的关系。

定理 2.6 设 (X,N) 为模糊赋范线性空间，模糊范数 N 满足(N6)条件，$\{x_n\}$ 为 X 中点列，$x_0 \in X$。若 $x_n \xrightarrow{N} x_0$，则 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\alpha} x_0$。

证：由引理 1.11 知，$\forall x \in X \Rightarrow x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\alpha} x_0 \left(\alpha \in (0,1)\right)$。再由 $\|\bullet\|_0$ 的定义知，

对 $\alpha \in (0,1)$，有 $\|\bullet\|_0 \le \|\bullet\|_\alpha$。因此，若 $x_n \xrightarrow{N} x_0$，则 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\alpha} x_0$。

定理 2.7 设 (X,N) 为模糊赋范线性空间，模糊范数 N 满足(N6)条件，对 $\forall 0 \le \alpha < \beta < 1$，$\alpha$-闭集是 β-闭集。

证：设集合 $A \subseteq X$ 是 α-闭集，则，对任意点列 $\{x_n\} \subseteq A, x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\alpha} x_0$，则 $x_0 \in A$。

对任意点列 $\{x_n\} \subseteq A$，如果 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\beta} x_0$，那么，$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\alpha} x_0$。

因此，$x_0 \in A$。即是 α-闭集是 β-闭集。

推论 2.8 设 (X,N) 为模糊赋范线性空间，模糊范数 N 满足(N6)条件，那么 0-闭集是模糊闭集。

证：设集合 A 是 (X,N) 的任意 0-闭集，对 $\forall \{u_n\} \subset A$，如果 $\exists u_0 \in X$，使得 $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_0} u_0$，那么 $u_0 \in A$。

在模糊赋范线性空间中，若 $x_0 \in A_1'$，则 $\exists \{x_n\} \subset A$，使得 $x_n \xrightarrow{N} x_0$。

由定理 2.6 知：$x_n \xrightarrow{N} x_0 \Rightarrow u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_0} u_0$。

因此，$x_0 \in A$。再由 x_0 的任意性知 $A_0' \subset A$，所以 A 是模糊闭集。

4. 总结

本文以 T. Bag 和 S.K. Samanta 于 2003 年提出的模糊范数为研究对象，定义了 0-范数的概念，探究了 0-范数与下确界范数的关系，讨论了模糊赋范线性空间的点列性质。得到了 0-范数是范数且等于下确界范数、点列模糊收敛那么 0-范收敛等结论。并且验证了模糊赋范线性空间中 0-范数是范数且等于下确界范数是存在的。下一步我们将结合逼近理论与经典宽度理论，研究模糊赋范线性空间在 0-范数框架下的逼近特征。

致　谢

我要感谢我的导师，从本文的撰写到定稿，都给予了我极大的支持。

参考文献

[1] Bag, T. and Samanta, S.K. (2003) Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **11**, 687-705.

[2] Bag, T. and Samanta, S.K. (2005) Fuzzy Bounded Linear Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **151**, 513-547. https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.05.004

[3] Sadeqi, I. and Kia, F.S. (2009) Fuzzy Normed Linear Space and Its Topological Structure. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **40**, 2576-2589. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.10.051

[4] Sadeqi, I. and Kia, F.S. (2009) Some Fixed Point Theorems in Fuzzy Reflexive Banach Spaces. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **41**, 2606-2612. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.09.050

[5] Ji, P., Qi, W.Q. and Wei, R.H. (2014) Completeness of Fuzzy Normed Linear Space of All Weakly Fuzzy Bounded Linear Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **251**, 94-100. https://doi.org/10.1016/j.fss.2013.11.003

[6] Nădăban S. (2015) Fuzzy Continuous Mappings in Fuzzy Normed Linear Spaces. *Special Issue on Fuzzy Sets and Applications*, **10**, 834-842. https://doi.org/10.15837/ijccc.2015.6.2074