Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(6), 2965-2978**
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126299

基于Chebyshev多项式的Galerkin谱方法在求解偏微分方程问题中的应用

王 佳[1]**，成蓉华**[2]*

[1]云南财经大学教务处, 云南 昆明
[2]云南财经大学统计与数学学院, 云南 昆明

收稿日期：2023年5月28日；录用日期：2023年6月23日；发布日期：2023年6月30日

摘 要

基于Chebyshev多项式的Galerkin谱方法广泛应用于偏微分方程边值问题与初边值问题的计算中，但详细介绍该方法的具体应用过程的文章较少。本文通过求解具体例子(Helmholtz方程边值问题、含时一阶波动方程的初边值问题以及含时二阶线性热传导方程的初边值问题)来详细介绍基于Chebyshev多项式的Galerkin谱方法的实现过程。先假定方程的未知函数能够用基于Chebyshev多项式展开式来逼近，然后将该未知函数的逼近展开式代入微分方程之中，再取方程的弱形式并使其为零，进而得到未知函数展开式中的系数所满足的方程组，最终通过求解该方程组得到未知函数的近似信息. 基于Chebyshev 多项式的Galerkin谱方法具有精度高、实现过程简单等优点，本文通过算法实现过程及数值例子介绍了基于Chebyshev多项式的Galerkin 谱方法的这些优点。

关键词

Chebyshev多项式，Galerkin谱方法，数值计算

Galerkin Spectral Method Based on Chebyshev Polynomials and Its Application on Numerical Solution of Partial Differential Equations

Jia Wang[1]**, Ronghua Cheng**[2]*

* 通讯作者。

文章引用: 王佳, 成蓉华. 基于Chebyshev多项式的Galerkin谱方法在求解偏微分方程问题中的应用[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 2965-2978. DOI: 10.12677/aam.2023.126299

[1]School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan
[2]Office of Academic Affairs, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan

Received: May 28th, 2023; accepted: Jun. 23rd, 2023; published: Jun. 30th, 2023

Abstract

Galerkin spectral method based on Chebyshev polynomials has been widely used to numerically solve the boundary value problem and initial boundary value problem of partial differential equation. However detailed introduction of the method and its application have been rarely seen in Chinese Journals. In this paper, we present the detailed implementation procedure of Chebyshev Galerkin spectral method by means of solving the boundary value problem of Helmholtz equation, initial boundary value problem of time-dependent Schrodinger equation and initial boundary value problem of wave equation, respectively. Our algorithm is built on: First we assume that the unknown function can be approximated by the expansion of Chebyshev polynomials; next we plug this expansion into the differential equation; then we use the weak formulation of the equation and make it zero, and obtain the discrete system which satisfied the coefficients of approximation expansion of unknown function; finally solving the discrete system gives us the approximated value of unknown function. Galerkin spectral method based on Chebyshev polynomials has the merit of high-order accuracy, and simple implement procedure. Our numerical algorithm and numerical examples have shown all of these merits of the Chebyshev spectral collocation method.

Keywords

Chebyshev Polynomials, Galerkin Spectral Method, Numerical Computation

1. 引言

物理、化学、生物、工程等领域的许多现象可以用微分方程来描述, 但微分方程(常微分方程

或偏微分方程)的解析解不易求解, 国内外学者探讨研究微分方程的数值计算方法, 例如有限差分法、有限元法、谱方法等. 谱方法因其精度高的特点受到广泛的关注, 关于谱方法的相关英文文献较多: Gottlieb等作者(1977)最早论述谱方法原理与应用 [1]; Canuto 等人(1988) 在其专著论述了谱方法在流体力学的应用 [2]；Funaro (1992, 1997)在他的专著中分别论述了配置谱方法的基本理论、配置谱方法在求解对流项占主导的方程求解中的应用 [3,4]; 郭本瑜(1998)在其论著中详细论述了谱方法基本原理与理论分析过程 [5]; Peyret (2002) 在书中论述了求解不可压缩粘性流体的谱方法 [6]; 最近Shen 和Tang (2006), Shen,Tang 和Wang (2011)等人在其英文专著中也提供了大量基本谱方法和高精度算法及相应方法的收敛性分析及误差分析理论 [7,8].

在国内研究文献中，详细介绍Galerkin谱方法求解偏微分方程的算法过程的文献很少, 使得读者不容易了解该方法. 就我们所知, 在我国有如下研究者探讨了Galerkin谱方法: 孙涛等(2013)给出四阶混合非齐次边值问题的Petrov-Galerkin 谱方法 [9]; 吴华等(2020, 2021)分别在文章中采用Chebyshev Galerkin谱方法求解了二维非线性反应扩散方程和三阶偏微分方程 [10,11]. 谢资清等(2021) 给出一类谱Galerkin 型搜索延拓法计算半线性椭圆问题的收敛性分析 [12].

本文基于前人的研究, 详细介绍如何基于Chebyshev多项式构造Galerkin谱方法来分别数值求解Helmholtz方程边值问题、含时线性薛定谔方程的初边值问题. 该方法可用于处理一些复杂的偏微分方程，它能在实现简单化方程的同时, 可达到较高的谱精度, 这无疑成为该方法的一大应用价值. 在具体实现过程中，先假定方程中的未知函数能够用基于Chebyshev多项式展开式来逼近, 然后将该未知函数的逼近展开式代入方程之中, 再取方程的弱形式并使得方程的弱形式为零, 进而得到未知函数展开式中的系数所满足的方程组, 最终通过求解该方程组得到未知函数的近似信息.

本文的结构安排如下：第2节通过微分方程边值问题和初边值问题，介绍Galerkin谱方法的应用原理. 在第3 节中，分别详细罗列了Helmholtz 方程边值问题、含时线性薛定谔方程的初边值问题的基于Chebyshev多项式的Galerkin谱方法算法过程. 在第4节中，通过几个具体的数值例子，证实了在第3节中介绍的方法可实现求解一维、二维Helmholtz方程边值问题、一维、二维含时线性薛定谔方程的初边值问题, 数值结果证实了所提出的数值方法的高精度与高效性. 在第5节之中，我们总结了所提出的数值方法的优缺点.

2. Galerkin谱方法求解微分方程基本过程

本节主要介绍微分方程边值问题的Galerkin谱方法求解基本过程与微分方程初边值问题的Galerkin谱方法求解基本过程。

2.1. Galerkin谱方法求解边值问题

考虑求解微分方程边值问题

$$Lu = f, \quad x \in \ \Omega = (a, b), \tag{2.1}$$

$$B_{-}u = 0 \quad x = a, \quad B_{+}u = 0 \quad x = b, \tag{2.2}$$

这里$u = u(x)$是一未知函数，$f = f(x)$是一已知函数。我们还假定L, B_-, B_+均是某一已知算子(可能含有微分形式)。

那么Galerkin谱方法求解该边值问题的一般设计步骤如下：

第一步. 选定合适的试探基函数$\phi_n = \phi_n(x), n = 0, 1, 2, \cdots, N$，它们均满足边界条件(2.2)，也就是：

$$B_-\phi_n = 0 \quad x = a, \quad B_+\phi_n = 0 \quad x = b, \quad n = 0, 1, \cdots, N.$$

第二步. 利用试探基函数$\phi_n, n = 0, 1, 2, \cdots, N$展开式，得近似：

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \hat{u}_n \phi_n(x) \approx u(x),$$

$$f(x) \approx f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \hat{f}_n \phi_n(x) \approx f(x).$$

将上述展开式代入到方程$Lu_N = f_N$之中，再分别取内积，得：

$$(Lu_N, \psi_l)_w = (f_N, \psi_l)_w \quad l = 0, 1, \cdots, N,$$

这里函数的内积定义为$(u, v)_w = \int_\Omega u(x)v(x)w(x)dx$, $w = w(x)$是某一权重函数，$\psi_l = \psi_l(x), \quad l = 0, 1, \cdots, N$ 称为测试函数。

第三步. 根据上式，得到关于系数$\hat{u}_n, n = 0, 1, \cdots, N$的代数方程组。

第四步. 利用数值方法求解与系数$\hat{u}_n, n = 0, 1, \cdots, N$ 相关的代数方程组。

第五步. 将求的系数$\hat{u}_n, n = 0, 1, \cdots, N$ 代入到展开式$u_N(x)$ 之中, 我们就得到未知函数的一个谱近似。

Remark 2.1. 通常，试探基函数$\phi_n = \phi_n(x), n = 0, 1, 2, \cdots, N$与测试函数$\psi_l = \psi_l(x), \quad l = 0, 1, \cdots, N$ 形式相同。当他们形式不一样时，我们称上面的谱方法为*Petro-Galerkin* 谱方法。

Remark 2.2. 试探基函数$\phi_n = \phi_n(x), n = 0, 1, 2, \cdots, N$ 通常从某一正交函数列$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$中得到，该正交函数列关于权重函数$w = w(x)$ 正交：

$$(P_i, P_j)_w = \int_\Omega P_i(x)P_j(x)w(x)dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Remark 2.3. 如果不要求试探基函数$\phi_n(x), n = 0, 1, 2, \cdots, N$满足边界条件(2.2)，那么将下面展开式

$$u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \hat{u}_n \phi_n(x).$$

代入到边值问题(2.1)-(2.2) 之中，此时系数$\hat{u}_0, \hat{u}_1, \cdots, \hat{u}_N$满足下式

$$\sum_{n=0}^{N} \hat{u}_n (L\phi_n, \phi_i)_w = (f, \phi_i), i = 0, 1, 2, \cdots, N-2 \tag{2.3}$$

$$B_- u_N(a) = 0, \quad B_+ u_N(b) = 0. \tag{2.4}$$

通过求解上述方程组(2.3)-(2.4)可得系数$\hat{u}_0, \hat{u}_1, \cdots, \hat{u}_N$. 此时，观察式子(2.3)，我们发现其中少了$i \neq N-1, N$这两项。这种方法又称为Tau 谱方法，它是由Lanczos于1938年提出。Tau谱方法的理论误差在Gottlieb、Orszag (1977)还有Canuto (1988)等的书中有这种误差的介绍。在实际应用之中，人们有时也用它来解微分方程边值问题。

2.2. Galerkin谱方法求解初边值问题

如果我们考虑微分方程初边值问题

$$u_t = Lu + f, \quad x \in \ \Omega = (a, b), \tag{2.5}$$

$$B_- u = 0 \quad x = a, \quad B_+ u = 0 \quad x = b, \tag{2.6}$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \ \Omega. \tag{2.7}$$

这里我们假定L, B均是某一已知形式的微分算子，$u = u(x, t)$为未知函数. 其余函数均是已知函数。

那么谱方法的一般设计步骤如下：

第一步. 选试探基函数$\phi_n, n = 0, 1, 2, \cdots, N$, 使得它们满足边界条件：

$$B_- \phi_n = 0 \quad x = a, \quad B_+ \phi_n = 0 \quad x = b, \quad n = 0, 1, \cdots, N.$$

第二步. 利用试探基函数$\phi_n = \phi_n(x), n = 0, 1, 2, \cdots, N$展开式，得：

$$u(x, t) \approx u_N(x, t) = \sum_{n=0}^{N} \hat{u}_n(t) \phi_n(x),$$

$$u(x, t) \approx f_N(x, t) = \sum_{n=0}^{N} \hat{f}_n(t) \phi_n(x),$$

$$g(x) \approx g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \hat{g}_n \phi_n(x).$$

将上述展开式代入到方程组$_t u = Lu + f$与$u(x, 0) = g(x)$之中，使得下式恒成立：

$$\left(\frac{\partial u_N}{\partial t} - (L_N u_N + f_N), v \right)_w = 0, \quad \forall v = \psi_l, \quad l = 0, 1, \cdots, N,$$

$$(u_N(x, 0) - g_N(x), v)_w = 0, \quad \forall v = \psi_l, \quad l = 0, 1, \cdots, N, .$$

第三步. 根据上式，得到关于系数$\hat{u}_n(t)$ $(n=0,1,\cdots,N)$的常微分方程组初值问题。

第四步. 利用数值方法（例如有限差分法）求解与系数$\hat{u}_n(t)$ $(n=0,1,\cdots,N)$ 相关的常微分方程组初值问题。

第五步. 将求的系数$\hat{u}_n(t)$ $(n=0,1,\cdots,N)$ 代入到展开式$u_N(x,t)$ 之中, 我们就得到一个谱近似。

在上面试探基函数$\phi_n(x)$的选取过程之中，如果未知函数u是定义域$[a,b]$上的周期函数(这里假定$a=0,b=2\pi$；如果$a\neq 0,b\neq 2\pi$, 可做一线性变换，将未知函数u的定义域由$[a,b]$变为$[0,2\pi]$)，我们可以选择函数$\sin(nx)$或$\cos(nx)$或$e^{(inx)}$$(i^2=-1)$等作为基函数；如果未知函数$u$是定义域$[a,b]$上的非周期函数，先做变换，将未知函数$u$的定义域由$[a,b]$变为$[-1,1]$), 可选择多项式，例如Chebyshev 多项式, Legendre 多项式等作为基函数；如果未知函数u是定义域$[0,+\infty]$上的非周期函数(此时假定$a=0,b=+\infty$), 可选择Hermit 多项式作为基函数; 如果未知函数u是定义域$[-\infty,+\infty]$上的非周期函数(此时假定$a=-\infty,b=+\infty$), 可选择Laguree多项式作为基函数。在下一节中，我们将介绍基于Chebyshev多项式的Galerkin 谱方法设计过程。

3. 基于Chebyshev多项式的Galerkin谱方法

3.1. 解Helmholtz方程的Chebyshev-Galerkin 方法

本节中，分别介绍一维及二维Helmholtz边值问题的Chebyshev-Galerkin方法

先考虑一维Helmholtz方程边值问题的求解

$$\alpha u-u''=f \quad in \quad \Omega=I,u|_{\Omega}=0, \tag{3.1}$$

这里$I=(-1,1)$。

假定$T_n(x)$为n次Chebyshev多项式，并且假定函数空间S_N, V_N分别为

$$S_N=span\{T_0(x),T_1(x),\dots,T_N(x)\},\quad V_N=\{v\in S_N: v(\pm 1)=0\}.$$

很明显，$V_N=span\{\phi_0(x),\phi_1(x),\dots,\phi_{N-2}(x)\}$, 这里$\phi_k(x)=T_k(x)-T_{k+2}(x)$.

利用Chebyshev-Galerkin方法，假定函数$u\approx u_N=\sum\limits_{j=0}^{N-2}\widehat{u}_j\phi_j(x)$, 将之代入到一维Helmholtz方程方程得$\alpha u_N-u_N''=f$, 即$\alpha\sum\limits_{j=0}^{N-2}\widehat{u}_j\phi_j(x)-\sum\limits_{j=0}^{N-2}\widehat{u}_j\phi_j''(x)=f(x)$. 这样直接做，要求太强。

近似计算过程中，我们要求下述弱形式成立

$$(\alpha\sum_{j=0}^{N-2}\widehat{u}_j\phi_j(x)-\sum_{j=0}^{N-2}\widehat{u}_j\phi_j''(x),\phi_k(x))_\omega=(f(x),\phi_k(x))_\omega,\quad k=0,1,\cdots,N-2.$$

于是得

$$\alpha\sum_{j=0}^{N-2}\widehat{u}_j b_{kj}+\sum_{j=0}^{N-2}\widehat{u}_j a_{kj}=(f(x),\phi_k(x))_\omega,\quad k=0,1,\cdots,N-2.$$

这里权重函数$w=w(x)=1/\sqrt{1-x^2}$, $a_{kj}=-(\phi_j''(x),\,\phi_k(x))_\omega$ 以及$b_{kj}=(\phi_j(x),\phi_k(x))_\omega$. 通过计算可知

$$b_{kj}=b_{jk}=\begin{cases}\frac{(c_k+1)}{2}\pi, & j=k\\ -\frac{\pi}{2}, & j=k-2\text{ 或 }j=k+2;\\ 0, & \text{其余情形}\end{cases}\tag{3.2}$$

以及

$$a_{kj}=\begin{cases}2\pi(k+1)(k+2), & j=k\\ 4\pi(k+1), & j=k+2,k+4,k+6,\cdots.\\ 0 & j>k\text{或}j+k\text{奇}\end{cases}\tag{3.3}$$

其中系数$c_0=c_N=2$, $c_k=1$对于$1\le k\le N-1$.

利用chebyshev-Gauss-quadrature公式,有$f_k=(f(x),\phi_k(x))_w=\sum\limits_{i=0}^{M}f(x_i)\phi_k(x_i)\omega_i$, 其中$x_i=\cos\pi i/M, i=0,...,M$ 为chebyshev-Gauss-Lobatto节点,$\omega_0=\omega_M=\pi/2M$, $\omega_k=\pi/M$对于$1\le i\le M-1$. 如果我们再定义

$$F=(f_0,f_1,\cdots,f_{N-2})^T;$$
$$\widehat{u}=(\widehat{u}_0,\widehat{u}_1,\cdots,\widehat{u}_{N-2})^T;$$

$$B=(b_{kj})_{0\le k,j\le N-2}, A=(a_{kj})_{0\le k,j\le N-2},$$

那么我们可得如下离散形式的线性方程组

$$(\alpha B+A)\widehat{u}=F.\tag{3.4}$$

通过求解上述线性方程组，我们就得到了展开式$u_N=\sum_{n=0}^{N-2}\widehat{u}_n\phi_n(x)$ 之中的系数组成的向量$\widehat{u}=(\widehat{u}_0,\widehat{u}_1,\cdots,\widehat{u}_{N-2})^T$. 从而，我们就得到了原问题的一种Chebyshev-Galerkin 谱近似。

再考虑二维Helmholtz方程边值问题的求解

$$\alpha u-\Delta u=f\quad in\quad \Omega=I^2, u|_\Omega=0.\tag{3.5}$$

该方法寻找函数$u_N\in V_N^2$,使得

$$\alpha(u_N,v)_w-(\Delta u_N,v)_w=(f,v)_w,\forall v\in V_N^2,\tag{3.6}$$

这里权重函数$\omega=\omega(x_1,x_2)=\Pi_{i=1}^2(1-x_i^2)^{-1/2}$. 内积为$(u,v)_\omega=\int_\Omega uv\omega d\mathbf{x}$.并且，$d\mathbf{x}=dx_1dx_2$. 假定函数空间

$$V_N^2=span\{\phi_k(x_1)\phi_j(x_2):k,j=0,1,\cdots,N-2\}.$$

并且假定有近似

$$u \approx u_N = \sum_{k,j=0}^{N-2} \widehat{u}_{kj}\phi_k(x_1)\phi_j(x_2),$$

当我们取式子(3.6)中的$v = \phi_l(x_1)\phi_m(x_2), l, m = 0, 1, \cdots, N-2$, 并在式子(3.6)的右边利用chebyshev-Gauss-quadrature 公式,有

$$f_{kj} = (f(x_1, x_2), \phi_k(x_1)\phi_j(x_2))_\omega = \sum_{p,q=0}^{M} f(x_{1p}, x_{2q})\phi_l(x_{1p})\phi_m(x_{2q})\omega_p\overline{\omega}_q.$$

其中$x_{1p} = \cos \pi p/M, x_{2q} = \cos \pi q/M, p, q = 0, ..., M$ 为chebyshev-Gauss-Lobatto节点,$\omega_0 = \overline{\omega}_0 = \omega_M = \overline{\omega}_M = \pi/2M$, $\omega_k = \overline{\omega}_k = \pi/M$对于$1 \le i \le M-1$.

那么在二维情形下方程(3.6)变成如下线性方程组

$$\alpha B\widehat{U}B + A\widehat{U}B + B\widehat{U}A^T = G. \tag{3.7}$$

这里矩阵$\widehat{U} = (\widehat{u}_{kj})_{k,j=0,1,\cdots,N-2}$，$G = (f_{kj})_{k,j=0,1,\cdots,N-2}$.

求解上述线性方程组的未知解$\widehat{U}$的方法如下：

(1) 先找出可逆阵E以及对角阵Λ，使得$A^{-1}B = E\Lambda E^{-1}$.

(2) 计算$G^* = E^{-1}A^{-1}G$.

(3) 求解方程组$(\alpha\lambda_i+1)Bv_i+\lambda_i Av_i = g_i$, 从中得到$v_i$. 这里对角矩阵$\Lambda = diag(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{N-2})$. $v_i = (v_{i0}, v_{i1}, \cdots, v_{iN-2})^T$，$g_i = (g_{i0}, g_{i1}, \cdots, g_{iN-2})^T$，$i = 0, 1, \cdots, N-2$. 我们注意到$G^* = (g_0, g_1, \cdots, g_{N-2})^T$，$V = (v_0, v_1, \cdots, v_{N-2})^T$.

(4) 最后得$\widehat{U} = EV$，也就是得到展开式中的系数.

3.2. 解初边值问题的Chebyshev-Galerkin方法

在本节之中，分别介绍含时一阶波动方程初边值问题及含时二阶热传导方程初边值问题的Chebyshev-Galerkin方法的设计过程。

先考虑如下的一阶线性波动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3.8}$$

以及相应的边界条件

$$u(1, t) = 0 \tag{3.9}$$

与初始条件

$$u(x, 0) = f(x). \tag{3.10}$$

基于Chebyshev多项式构造基函数

$$\phi_n(x) = T_n(x) - 1,$$

满足边界条件(3.9). 我们寻找如下的近似展开式$u_N(x,t)$

$$u(x,t) \approx u_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} a_n(t)\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(t)(T_n(x) - 1).$$

注意这里的求和式子是从$n = 1$开始，而不是从$n = 0$开始, 这是因为$\phi_0(x) = 0$.

求余项

$$R_N(x,t) = \frac{\partial u_N}{\partial t} - \frac{\partial u_N}{\partial x}$$

正交于函数$\phi_k(x) \in L_w^2[-1,1]$, 也就是

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} R_N(x,t)\phi_k(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0, \quad k = 1,\ldots,N. \tag{3.11}$$

这里我们已经依然选择权重函数$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 从式子(3.11)，我们得

$$\sum_{n=1}^{N} M_{kn}\frac{da_n}{dt} = \sum_{n=1}^{N} S_{kn}a_n(t), \quad k = 1,\ldots,N,$$

其中

$$M_{kn} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}(T_k(x) - 1)(T_n(x) - 1)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2 + \delta_{kn}.$$

当$k = n$时,$M_{kn} = 1$;当$k \neq n$时,$M_{kn} = 0$.

而

$$S_{kn} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}(T_k(x) - 1)\frac{dT_n(x)}{dx}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad k,n = 1,\ldots,N.$$

由于n次Chebyshev多项式$T_n(x)$满足下面恒等式

$$\frac{dT_n(x)}{dx} = 2n\sum_{p=0,p+n\text{为奇}}^{n-1}\frac{T_p(x)}{c_p},$$

这样矩阵S_{kn}可改写为

$$\begin{aligned} S_{kn} \quad &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}(T_k(x) - 1)2n\sum_{p=0,p+n\text{为奇}}^{n-1}\frac{T_p(x)}{c_p}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= 2n\sum_{p=0,p+n\text{为奇}}^{n-1}(\delta_{kp} - \delta_{0p}). \end{aligned}$$

如果再定义$M=(M_{kn})_{k,n=1,2,...,N}$; $S=(S_{kn})_{k,n=1,2,...,N}$; $a=a(t)=(a_1(t),a_2(t),...,a_N(t))^T$. 这样我们就得到了关于系数$a_1(t),a_2(t),\cdots,a_N(t)$的常微分方程组：

$$\frac{da}{dt}=M^{-1}Sa, \tag{3.12}$$

当$t=0$时的条件可从条件(3.10) 得到。经过计算，可知$a_n(0)$满足下式

$$a_n(0)=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}f(x)(T_n(x)-1)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad n=1,\dots,N. \tag{3.13}$$

在时间方向通过Crank-Nicolson方法求解关于系数$a_1(t),a_2(t),\cdots,a_N(t)$的常微分方程组初值问题(3.12)-(3.13), 得到系数在不同时刻的近似值。

同样再考虑如下的二阶线性热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.14}$$

以及边界条件

$$u(-1,t)=u(1,t)=0,$$

与初始条件$u(x,0)=f(x)$.

我们可以取基函数为

$$\phi_n(x)=T_n(x)-T_{n+2}(x), n\geq 0.$$

这里的基函数都满足边界条件，也就是$\phi_n(\pm 1)=0$.

我们寻找近似如下的展开式

$$u_N(x,t)=\sum_{n=0}^{N-2}a_n(t)\phi_n(x),$$

并且要求余项

$$R_N(x,t)=\frac{\partial u_N}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}$$

正交于每个基函数$\phi_k(x)$，也就是它满足下式

$$\int_{-1}^{1}R_N(x,t)\phi_k(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=0, \quad \forall k=0,\dots,N-2.$$

这样我们就得到了Chebyshev-Galerkin方法

$$\sum_{n=0}^{N-2}b_{kn}\frac{da_n}{dt}=\sum_{n=0}^{N-2}a_{kn}a_n(t), \quad \forall k=0,1,\dots,N-2, \tag{3.15}$$

这里矩阵b_{kn}的定义见(3.2) 以及a_{kn}的定义见(3.3).

上述过程就得到了如下的常微分方程组

$$\frac{da}{dt} = -B^{-1}Aa, \tag{3.16}$$

这里$a = a(t)$, 并且有初始条件

$$a_n(0) = \int_{-1}^{1} f(x)\phi_n(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \forall n = 0, 1, \ldots, N-2.. \tag{3.17}$$

同样，在时间方向通过Crank-Nicolson方法求解关于系数$a_0(t), a_1(t), \cdots, a_{N-2}(t)$ 的常微分方程组初值问题(3.16)-(3.17), 得到系数在不同时刻的近似值。

4. 计算结果

例1. 我们先考虑一维线性边值问题

$$\begin{cases} -u_{xx} + \sigma u = f(x) \quad -1 < x < 1 \\ u(-1) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

其中$u = u(x)$是未知函数. $f(x) = \sigma(1-x^2) + 2$, $\sigma = 1$. 此方程有一准确解$u(x) = 1 - x^2$. 表 1展示了求解一维Helmhotz边值问题的误差分析.

Table 1. Error of Chebyshev-Galerkin method for the boundary value problem of Helmhotz equation in 1D
表 1. 求解一维Helmhotz边值问题的Chebyshev-Galerkin方法误差分析

N	8	16	32	64
error	3.331e-16	3.331e-16	5.551e-16	3.331e-16

例2. 下面讨论二维边值问题的求解. 考虑

$$\begin{aligned} &-u_{xx} - u_{yy} + \sigma u = f \quad -1 < x < 1, \ -1 < y < 1, \\ &u = 0, \ \text{当} \ x = -1 \ \text{或} \ x = 1 \ \text{或} \ y = -1 \ \text{或} \ y = 1, \end{aligned}$$

的求解. 这是$u = u(x, y)$是未知函数，$f(x, y) = 2(-x^2 + 1) + 2(-y^2 + 1) + \sigma(1-x^2)(1-y^2)$, $\sigma = 1$. 此方程有一准确解$u(x, y) = (1-x^2)(1-y^2)$. 表 2展示了求解二维Helmhotz边值问题的误差分析.

Table 2. Error of Chebyshev-Galerkin method for the boundary value problem of Helmhotz equation in 2D
表 2. 求解二维Helmhotz边值问题的Chebyshev-Galerkin方法误差分析

$N_x = N_y$	8	16	32	64
error	2.220e-16	7.771e-16	6.661e-16	3.331e-16

例3. 先考虑如下的一阶线性波动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

以及相应的边界条件

$$u(1,t)=0$$

与初始条件

$$u(x,0)=e^{-50x^2}.$$

此问题有如下准确解$u(x,t)=e^{-50(x+t)^2}$，并且当$x\to 1$, $u(x,t)\to 0$. 表 3计算Chebyshev-Galerkin方法得到的函数$\psi(x,t)$在$t=1$时的节点近似解与在$t=1$时的节点准确解之差. 从表 3之结果可以看出使用的Chebyshev-Galerkin方法具有谱精度.

Table 3. Error of Chebyshev-Galerkin method for the first-order linear wave equation
表 3. 解一阶线性波动方程的Chebyshev-Galerkin方法误差分析, 这里时间步长取0.01

N_x	32	64	128	256
error	7.341e-4	7.304e-4	7.435e-4	3.331e-16

例4. 同样考虑如下的二阶线性热传导方程的解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

以及边界条件

$$u(-1,t)=u(1,t)=0,$$

与初始条件$u(x,0)=\cos\frac{\pi x}{2}$. 此问题有如下准确解$u(x,t)=e^{-\frac{\pi^2 t}{4}}\cos\frac{\pi x}{2}$. 表 4计算配置谱方法得到的函数$\psi(x,t)$在$t=1$时的节点近似解与在$t=1$时的节点准确解之差. 从表 4之结果可以看出使用的Chebyshev-Galerkin方法也具有谱精度.

Table 4. Error of Chebyshev-Galerkin method for the second-order linear heat conduction equation
表 4. 解二阶线性热传导方程的Chebyshev-Galerkin方法误差分析, 这里时间步长取0.01

$N_x=N_y$	32	64	128	256
error	1.062e-5	1.062e-5	1.062e-5	1.062e-5

5. 结论

本文通过分别求解一维、二维Helmholtz方程边值问题、一维、二维含时线性薛定谔方程的初边值问题等来详细介绍基于Chebyshev多项式的Galerkin谱方法的实现过程. 基于Chebyshev多项式

的Galerkin谱方法具有精度高、算法实现过程简单等优点. 本文给出了Galerkin谱方法算法详细过程. 所有的数值计算结果都通过所撰写的Matlab程序得到(可与通信作者联系索要相关程序代码). 通过计算发现该方法也有计算量稍大这一缺点. 不过随着计算机的性能的提高，此问题应该可随着计算机硬件的提高而得到解决. 另外, 基于其他类正交多项式(例如Legendre多项式、Jacobian多项式等)的Galerkin谱方法的推导也是类似的，本文所介绍的方法可以用于设计其它类正交多项式的Galerkin谱方法，并可将之应用到微分方程问题的数值求解之中。在将来, 将讨论如何构造基于Chebyshev 多项式的Galerkin谱元法，以便应用到更为复杂的微分方程边值问题及微分方程初边值问题之中; 也将讨论如何构造基于Chebyshev多项式的Galerkin谱元法，以便应用到更为复杂的量子控制问题的数值计算之中 [13].

基金项目

云南教育厅科研项目(2023J0650)的资助.

参考文献

[1] Gottlieb, D. and Orszag, S.A. (1977) Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications. SIAM, Philadelphia, PA. https://doi.org/10.1137/1.9781611970425

[2] Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A., *et al.* (1988) Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-84108-8_1

[3] Funaro, D. (1992) Polynomial Approximation of Differential Equations. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-540-46783-0

[4] Funaro, D. (1997) Spectral Elements for Transport-Dominated Equations. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-59185-3

[5] Guo, B.Y. (1998) Spectral Methods and Their Applications. World Scientific, Singapore.

[6] Peyret, R. (2002) Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6557-1

[7] Shen, J. and Tang, T. (2006) Spectral and High-Order Spectrals with Application. Science Press, Beijing.

[8] Shen, J., Tang, T. and Wang, L.L. (2011) Spectral Methods. Springer, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7

[9] 孙涛, 易利军. 四阶混合非齐次边值问题的Petrov-Galerkin谱方法[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(11): 255-260.

[10] 汪海鹭, 吴华. 二维非线性反应扩散方程的局部间断Galerkin谱元法[J]. 数值计算与计算机应用, 2020, 41(1): 1-18.

[11] 薛未, 吴华. 三阶偏微分方程的时空间断Galerkin谱方法[J]. 数值计算与计算机应用, 2021, 42(3): 247-262.

[12] 刘伟, 谢资清, 袁永军. 计算半线性椭圆问题多解的一类谱Galerkin型搜索延拓法的收敛性分析[J]. 中国科学: 数学, 2021, 51(9): 1407-1431.

[13] Brif, C., Chakrabarti, R. and Rabitz, H. (2010) Control of Quantum Phenomena: Past, Present, and Future. *New Journal of Physics*, **12**, 2181-2188. https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/7/075008