Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(7), 3225-3239**
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.127322

Hans汉斯

二维带真空的不可压缩MHD方程组的全局适定性

但园园

广东财经大学统计与数学学院，广东 广州

收稿日期：2023年6月18日；录用日期：2023年7月13日；发布日期：2023年7月20日

摘　要

本文主要研究了带有非负有界密度的二维不可压缩磁流体力学(MHD)方程组的全局适定性问题。对于初始密度没有正则性或者没有正下界或者没有兼容性条件时，我们通过使用一个全新的先验估计建立了不可压缩磁流体力学(MHD)方程组的全局解。本文结果推广了二维Navier-Stokes方程组在周期区域上的全局适定性结果。

关键词

全局解，不可压缩的MHD方程组，真空

Global Well-Posedness for the 2D Incompressible MHD Equations with Vacuum

Yuanyuan Dan

School of Statistics and Mathematics, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou Guangdong

Received: Jun. 18th, 2023; accepted: Jul. 13th, 2023; published: Jul. 20th, 2023

Abstract

This paper focuses on the global well-posedness for the 2D incompressible Magnetohydrodynamics (MHD) equations with only bounded nonnegative density. We establish the global solutions by using a new a prior estimate without regularity or positive lower bound for the initial density, or compatibility conditions. This result generalizes previous result for the 2D Navier-Stokes equa-

文章引用: 但园园. 二维带真空的不可压缩 MHD 方程组的全局适定性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(7): 3225-3239.
DOI: 10.12677/aam.2023.127322

tions on the periodic domain.

Keywords

Global Solution, Incompressible MHD Equations, Vacuum

1. 引言与主要结果

磁流体力学(MHD)研究了导电流体的动力学和导电流体与磁场的宏观相互作用理论。在本文中，我们关注的不可压缩 MHD 方程组如下：

$$\begin{cases} \partial_t \rho + div(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + div(\rho u \otimes u) + \nabla P = \mu \Delta u + b \cdot \nabla b, \\ \alpha_t b + u \cdot \nabla b = \upsilon \Delta b + b \cdot \nabla u, \\ divu = divb = 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $(t,x) \in (R^+, \Omega)$，未知量 $\rho = \rho(t,x), u = u(t,x), b = b(t,x)$ 以及 $P = P(t,x)$ 分别表示流体密度，流体速度，磁场，流体压力。初始值满足任意常数。常数 $\mu > 0$ 为粘度系数，常数 $\upsilon > 0$ 为电阻率系数，与电导率常数成反比，作为磁场的磁扩散系数。为了简便，在本文中假定粘度系数 μ 和磁扩散系数 υ 均为 1。假设流体区域 Ω 既可以是环面 T^2，或者是在 R^2 中的一个连续有界区域。

对于方程组(1)，通过计算可推出同时满足以下三个变换：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega \rho |u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |b|^2 \mathrm{d}x\right) + \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla b|^2 \mathrm{d}x = 0, \tag{2}$$

$$\int_\Omega \rho u(t,x) \mathrm{d}x = \int_\Omega \rho_0 u_0(x) \mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$\int_\Omega \rho(t,x) \mathrm{d}x = \int_\Omega \rho_0(x) \mathrm{d}x. \tag{4}$$

通过这个变换，ρ_0 的任何 Lebesgue 范数都得以保持，且有

$$\inf_{x\in\Omega} \rho(t,x) = \inf_{x\in\Omega} \rho_0(t,x), \quad \sup_{x\in\Omega} \rho(t,x) = \sup_{x\in\Omega} \rho_0(t,x). \tag{5}$$

磁流体力学研究了导电流体的动力学以及导电流体与磁场的宏观相互作用的理论。由于流体的动态运动和磁场的相互作用，流体动力和电动力效应是耦合的。此外，由于流体和磁场的相似性，使得 MHD 方程组的研究与著名的 Navier-Stokes 方程组的研究一样非常重要。当 $b = 0$ 时，即为 Navier-Stokes 方程组，可参考文献[1] [2]。然而，由于流体运动与磁场之间的强耦合和相互作用，因此研究 MHD 系统的适性和动力学行为问题则显得相当复杂。

关于不可压缩 MHD 方程组有很多结果。例如，在文献[3]中，Huang 和 Wang 在相容性条件下证明了带真空的二维 MHD 方程组强解的全局存在性。Chen，Li 和 Zhao 在文献[4]中研究了初始密度允许非真空和真空情况下强解的全局适性。Lü，Xu 和 Zhong 在文献[5]中考虑了在无穷远处初始密度与初始磁场衰减不太慢的情形下，获得了二维柯西问题的强解的全局存在唯一性。Qiu 在文献[6]中得到了在适当

条件下，三维有界或无界域中非齐次不可压缩 MHD 方程组的大解。在参考文献[7]中，Fan 和 Zhou 证明了密度有依赖的不可压缩 MHD 方程组在三维有界域内的局部强解的一致估计。最近，Chen，Su，Zang 在参考文献[8]中研究了在初始密度与磁场在无穷远处衰减不是太慢情形下，得到了二维不可压缩 MHD 方程组在 R^2 中的唯一局部强解。Kim 在参考文献[9]中考虑了 Vishik 空间中三维非均匀不可压缩 MHD 方程组的条件正则性，并利用梯度速度矢量项给出了弱解的正则性标准。在我们的论文中，我们研究不可压缩 MHD 方程组(1)在狄利克雷边界条件下的全局适性，最主要的问题是获得先验估计，这是证明在密度远离真空或没有正的下界一以及兼容性条件的情形下，得到解的存在性和唯一性的关键因素。

现在，我们给出本文主要的结果，并概述我们用来实现这些结果的技术步骤。在二维的情况下，我们的主要结果可以表述如下：

定理 1.1 设 Ω 是二维周期环 T^2。假设初始值 $\left(\rho_0,u_0,b_0\right)$ 满足任意常数 $\rho^*>0$，

$$\begin{cases}0\le\rho_0\le\rho^*, \quad M:=\int_\Omega\rho_0\mathrm{d}x>0,\\ divu_0=divb_0=0, \quad u_0,b_0\in H^1(\Omega).\end{cases}\tag{6}$$

则对于满足上述条件的初始值的方程组(1)，存在一个唯一整体解 $\left(\rho,u,b,\nabla P\right)$ 满足下列正则性：

$$\begin{cases}\rho\in L^\infty\left(R^+;L^\infty(\Omega)\right),\rho\in C\left(R^+;L^p(\Omega)\right), \quad 1<p<\infty,\\ u,b\in L^\infty\left(R^+;H_0^1(\Omega)\right),u,b\in H^\eta\left(0,T;L^p(\Omega)\right), \quad p,\eta<\dfrac{1}{2},T>0,\\ \sqrt{\rho}u,b\in C\left(R^+;L^2(\Omega)\right),\sqrt{\rho}u_t,b_t,\nabla^2u,\nabla^2b,\nabla P\in L^2\left(R^+;L^2(\Omega)\right),\\ \nabla\left(\sqrt{t}P\right),\nabla^2\left(\sqrt{t}u\right),\nabla^2\left(\sqrt{t}b\right)\in L^\infty\left(0,T;L^r(\Omega)\right)\cap L^2\left(R0,T;L^m(\Omega)\right), \quad T>0,\\ 1\le r<2, \quad 1\le m<\infty.\end{cases}\tag{7}$$

注 1.1 本文与文献[5]进行对比，得到了一个新的结果，知道初始密度具有正则性，且 u 的 L^2 范数不能被控制。然而，在本文中我们克服了 T^2 中的困难，而不需要对初始密度有更多的正则性。

本文的其余部分组织如下。在第 2 节中，我们将介绍一些基本的事实和不等式。在第 3 节中，我们集中讨论了不可压缩 MHD 方程组(1)的存在性证明。在第 4 节中，我们提出了唯一性问题，但为了简单起见，我们省略了证明。

2. 先验估计

2.1. 符号

我们首先解释本文中使用的符号和规定。对于正整数 k 和正数 $q\in[1,\infty]$，L^q 和 $W^{k,q}$ 分别表示标准的 Lebesgue 和 Sobolev 空间，记为

$$\|f\|_q=\|f\|_{L^q(\Omega)},H^k=W^{k,2}.$$

2.2. 引理

在本小节中，我们将回顾一些已知的事实和基本不等式，这些事实将在以后经常使用。我们从以下著名的 Gagliardo-Nirenberg 不等式开始，它将在后面反复使用，可参考文献[10]。

引理 2.1 对于 $p\in[2,\infty),q\in(1,\infty)$ 和 $r\in(2,\infty)$，存在一些常数 $C>0$ 依赖于 p,q,r 使得对 $f\in H^1\left(R^2\right),g\in L^q\left(R^2\right)\cap W^{1,r}\left(R^2\right)$，有

$$\|f\|_{L^p(R^2)}^p \le C\|f\|_{L^2(R^2)}^2 \|\nabla f\|_{L^2(R^2)}^{p-2},$$
$$\|g\|_{C(\overline{R^2})} \le C\|g\|_{L^q(R^2)}^{q(r-2)/(2r+q(r-2))} \|\nabla g\|_{L^r(R^2)}^{2r/(2r+q(r-2))} \tag{8}$$

记 $H^1(R^2)$,BMO(R^2)代表一般的 Hardy 于 BMO 空间，更多的详细可参考文献[11]。以下引理在下一节中发挥关键性作用。这里需要特别注意，以下内容(10)与(11)在中 T^2 仍然成立。更准确地说，我们有

引理 2.2 [5] 1) 对于 $u \in L^2(R^2)$ 和 $v \in L^2(R^2)$，存在常数 $C>0$ 使得

$$\|u\cdot v\|_{H^1(R^2)} \le C\|u\|_{L^2(R^2)}\|v\|_{L^2(R^2)}, \tag{9}$$

满足 $divu=0$， $\nabla\times v=0$ 在 $D'(R^2)$ 中。

2) 存在常数 $C>0$ 使得

$$\|u\|_{\mathrm{BMO}(R^2)} \le C\|\nabla u\|_{L^2(R^2)}, u\in \dot{H}(R^2) \tag{10}$$

为了证明定理 1.1 的存在性，我们需要给出以下的引理，它在先验估计中起着关键作用。

引理 2.3 [12] [13] 存在常数 C 和 ρ^* 使得对所有的 $u\in H^1(T^2)$ 和 $0\le\rho\le\rho^*$，可得

$$\left(\int_{T^2}\rho|u|^4\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12} \le C\|\sqrt{\rho}u\|_2\|\nabla u\|_2 \log^{\frac12}\left(e+\frac{\|\rho-M\|_2^2}{M^2}+\frac{\rho^*\|\nabla u\|_2^2}{\|\sqrt{\rho}u\|_2^2}\right)+C\|\sqrt{\rho}u\|_2\frac{\left|\int_{T^2}\rho_0u_0\mathrm{d}x\right|}{M} \tag{11}$$

其中 $M=\int_\Omega \rho_0\mathrm{d}x$。

3. 定理 1.1 存在性的证明

在本节中，我们将讨论方程组(1)的光滑解的先验估计证明。这些估计最终将使我们能够得到任何满足条件(6)的定理 1.1 的存在性。

3.1. Sobolev 正则性的持久性

首先，我们需要应用材料导数 $\dot{u}\cong u_t+u\cdot\nabla u$ 去获得下列的先验估计。

命题 3.1 设(ρ,u,b)是方程组(1)在$[0,T)\times T^2$ 上的光滑解。存在常数 $C>0$，仅依赖于 $\|\sqrt{\rho_0}u_0\|_2,\|b_0\|_2,\|\nabla u_0\|_2,\|\nabla b_0\|_2,\rho^*$，使得对任意 $t\in[0,T)$，有

$$\sup_{t\in[0,T)}\left(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)+\int_0^t\left(\|\sqrt{\rho}\dot{u}\|_2^2+\|\nabla^2u\|_2^2+\|\nabla^2 b\|_2^2+\|\nabla P\|_2^2\right)\mathrm{d}\tau\le C, \tag{12}$$

其中 $\dot{u}\cong u_t+u\cdot\nabla u$。

证明 对方程组$(1)_1$，$(1)_2$应用能量估计，我们得到

$$\sup_{t\in[0,T)}\left(\|\sqrt{\rho}u\|_2^2+\|b\|_2^2\right)+2\int_0^T\left(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)\mathrm{d}t\le 2\left(\|\sqrt{\rho_0}u_0\|_2^2+\|b_0\|_2^2\right). \tag{13}$$

对方程组$(1)_2$两边同乘 $\dot{u}\cong u_t+u\cdot\nabla u$ 并且在 T^2 上积分可得

$$\begin{aligned}\int_{T^2}\rho|\dot{u}|^2\,\mathrm{d}x&=\int_{T^2}\Delta u\cdot\dot{u}\mathrm{d}x-\int_{T^2}\nabla P\cdot\dot{u}\mathrm{d}x+\int_{T^2}b\cdot\nabla b\cdot\dot{u}\mathrm{d}x\\&=I_1+I_2+I_3.\end{aligned} \tag{14}$$

应用引理 2.1 以及分部积分可得

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{T^2} \Delta u \cdot \left(u_t + u\cdot\nabla u\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_{T^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\nabla u\right|^2\mathrm{d}x - \int_{T^2}\partial_i u^j \partial_i\left(u^k\partial_k u^j\right)\mathrm{d}x \\
&\le -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u\right\|_2^2 + C\left\|\nabla u\right\|_3^3 \\
&\le -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u\right\|_2^2 + C\left\|\nabla u\right\|_2^2\left\|\nabla^2 u\right\|_2 .
\end{aligned}
\tag{15}
$$

对于 I_2，利用引理 2.2 以及分部积分得

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\int_{T^2}\nabla P\left(u_t + u\cdot\nabla u\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{T^2} P\partial_j u^i \partial_i u^j \mathrm{d}x \\
&\le C\left\|P\right\|_{\mathrm{BMO}}\left\|\partial_j u^i\partial_i u^j\right\|_{\mathrm{H}^1} \\
&\le C\left\|\nabla P\right\|_2\left\|\nabla u\right\|_2^2 ,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

在最后一个不等式中，利用了 $div\left(\partial_j u\right) = \partial_j divu = 0, \nabla\times\left(\nabla u^j\right) = 0$ 。

应用方程组$(1)_3$，$(1)_4$，结合引理 2.1 与分部积分，我们推出

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{T^2} b\cdot\nabla b\cdot u_t\mathrm{d}x + \int_{T^2} b\cdot\nabla b\cdot\left(u\cdot\nabla u\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{T^2} b\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x + \int_{T^2} b_t\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x + \int_{T^2} b\cdot\nabla u\cdot b_t\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{T^2} b^i\partial_i u^j\partial_j u^k b^k\mathrm{d}x - \int_{T^2} b^i u^j\partial_i\partial_j u^k b^k\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{T^2} b\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x + \int_{T^2}\left(\Delta b - u\cdot\nabla b + b\cdot\nabla u\right)\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{T^2} b\cdot\nabla u\left(\Delta b - u\cdot\nabla b + b\cdot\nabla u\right)\mathrm{d}x - \int_{T^2} b^i\partial_i u^j\partial_j u^k b^k\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{T^2} u^j\partial_j b^i\partial_i u^k b^k\mathrm{d}x + \int_{T^2} b^i\partial_i u^k u^j\partial_j b^k\mathrm{d}x \\
&\le -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{T^2} b\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left\|\nabla^2 b\right\|_2^2 + C\left\|b\right\|_2^2\left\|\nabla b\right\|_2^4 + C\left\|\nabla u\right\|_2^2\left\|\nabla^2 u\right\|_2
\end{aligned}
\tag{17}
$$

应用方程组$(1)_3$，$(1)_4$，结合引理 2.1 与分部积分，我们得到因此，将(15)~(17)代入到(14)可

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^2 + \int_{T^2} b\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x\right) + \left\|\sqrt{\rho}\dot{u}\right\|_2^2 \\
&\le \frac{1}{4}\left\|\Delta b\right\|_2^2 + C\left\|b\right\|_2^2\left\|\nabla b\right\|_2^4 + C\left(\left\|\nabla^2 u\right\|_2 + \left\|\nabla P\right\|_2\right)\left\|\nabla u\right\|_2^2 .
\end{aligned}
\tag{18}
$$

对方程组$(1)_3$两边同乘 Δb 并且在 T^2 上积分，结合引理 2.1 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla b\|_2^2+\|\Delta b\|_2^2 \le C\int_{T^2}|\nabla u||\nabla b|^2\,\mathrm{d}x+C\int_{T^2}|\nabla u||b||\Delta b|\,\mathrm{d}x$$
$$\le C\|\nabla u\|_3\|\nabla b\|_2^{\frac{4}{3}}\|\nabla^2 b\|_2^{\frac{2}{3}}+C\|\nabla u\|_3\|b\|_6\|\Delta b\|_2 \tag{19}$$
$$\le C\|\nabla u\|_2^2\|\nabla^2 u\|_2+C\left(1+\|b\|_2^2\right)\|\nabla b\|_2^4+\frac{1}{4}\|\Delta b\|_2^2,$$

在这里利用了下列等式

$$-\int_{T^2}u\cdot\nabla b\cdot\Delta b\mathrm{d}x=-\int_{T^2}u^i\cdot\partial_i b^j\partial_k^2 b^j\mathrm{d}x$$
$$=\int_{T^2}\partial_k u^i\cdot\partial_i b^j\partial_k b^j\mathrm{d}x+\int_{T^2}u^i\cdot\partial_k\partial_i b^j\partial_k b^j\mathrm{d}x$$
$$=\int_{T^2}\partial_k u^i\cdot\partial_i b^j\partial_k b^j\mathrm{d}x.$$

现在把(19)加到(18)式中，可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+\int_{T^2}b\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x\right)+\left\|\sqrt{\rho}\dot{u}\right\|_2^2+\|\nabla^2 b\|_2^2$$
$$\le\frac{1}{4}\|\Delta b\|_2^4+C\left(\rho^*\right)\left(\|\nabla^2 u\|_2+\|\nabla P\|_2\right)\|\nabla u\|_2^2 \tag{20}$$
$$\le\frac{1}{4}\|\Delta b\|_2^4+\varepsilon\left(\|\nabla^2 u\|_2+\|\nabla P\|_2\right)^2+C\|\nabla u\|_2^4.$$

为了估计上述不等式中的第二项，需要利用方程$(1)_2$两边各自乘上$\Delta u,\nabla P$，并且在T^2上积分，最后利用 Sobolev 不等式可推出

$$\|\Delta u\|_2^2\le\varepsilon\left\|\sqrt{\rho}\dot{u}\right\|_2^2+\varepsilon\|b\|_2^2\|\nabla b\|_2^4+\frac{1}{8}\|\nabla b\|_2^4+\frac{1}{8}\|\nabla^2 b\|_2^2, \tag{21}$$

$$\|\nabla P\|_2^2\le\varepsilon\left\|\sqrt{\rho}\dot{u}\right\|_2^2+\varepsilon\|b\|_2^2\|\nabla b\|_2^4+\frac{1}{8}\|\nabla b\|_2^4+\frac{1}{8}\|\nabla^2 b\|_2^2. \tag{22}$$

将(20)~(22)加起来，得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)+\left\|\sqrt{\rho}\dot{u}\right\|_2^2+\left(\|\nabla^2 u\|_2^2+\|\nabla^2 b\|_2^2+\|\nabla P\|_2^2\right)$$
$$\le C\|\nabla u\|_2^4+\|\nabla b\|_2^4+\varepsilon\left\|\sqrt{\rho}\dot{u}\right\|_2^2+\varepsilon\|b\|_2^2\|\nabla b\|_2^4, \tag{23}$$

其中$G(t)=\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+\int_{T^2}b\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x$，由于$\left|\int_{T^2}b\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x\right|\le\frac{C}{2}\|\nabla u\|_2^2+C_1\|\nabla b\|_2^2$，因此其满足

$$\frac{C}{2}\left(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)\le G(t)\le C\left(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right). \tag{24}$$

因此，选择充分小的ε以及对式(23)利用 Gronwall's 不等式，如下不等式成立

$$G(t)+\int_{T^2}\left(\left\|\sqrt{\rho}\dot{u}\right\|_2^2+\|\nabla^2 u\|_2^2+\|\nabla^2 b\|_2^2+\|\nabla P\|_2^2\right)\mathrm{d}t$$
$$\le C\left(\|\nabla u_0\|_2^2+\|\nabla b_0\|_2^2\right)\mathrm{e}^{\int_0^T G(t)\mathrm{d}t} \tag{25}$$
$$\le C\left(\|\nabla u_0\|_2^2+\|\nabla b_0\|_2^2\right)\exp\left(C\int_0^T\left(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)\mathrm{d}t\right),$$

结合(13)，下列不等式成立

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)+\int_0^T\left(\left\|\sqrt{\rho}\dot{u}\right\|_2^2+\left\|\nabla^2 u\right\|_2^2+\left\|\nabla^2 b\right\|_2^2+\|\nabla P\|_2^2\right)\mathrm{d}t\le C. \tag{26}$$

综上所述，完成了命题 3.1 的证明。

结论 3.1 对所有 $p\in[1,\infty)$ 和 $t\in[0,T)$，下列结论成立

$$\|u(t)\|_p\le\frac{1}{M}\left|\int_{T^2}(\rho_0u_0)(x)\mathrm{d}x\right|+C_p\left(1+\frac{\|M-\rho_0\|_2}{M}\right)\|\nabla u(t)\|_2. \tag{27}$$

证明 对所有 $p\in[1,\infty)$，记 $\bar{u}(t)$ 为 $u(t)$ 在 T^2 上的平均，利用 Sobolev 嵌入定理可推出

$$\|u(t)\|_p\le|\bar{u}(t)|+\|u(t)-\bar{u}(t)\|_p\le|\bar{u}(t)|+C_p\|\nabla u(t)\|_2, \tag{28}$$

根据质量方程(1.4)可得

$$M\bar{u}(t)=\int_{T^2}(\rho u)(t,x)\mathrm{d}x+\int_{T^2}\left(M-\rho(t,x)\right)\left(u(t,x)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}x. \tag{29}$$

接下来，利用(1)中的质量方程以及 Cauchy-Schwarz 不等式，Poincaré 不等式得出

$$|\bar{u}(t)|\le\frac{1}{M}\left|\int_{T^2}(\rho_0u_0)(x)\mathrm{d}x\right|+\frac{\|M-\rho_0\|_2}{M}\|\nabla u(t)\|_2. \tag{30}$$

因此，将(30)代入到(28)中，即证(27)。进而得出结论 3.1。

现在结合命题 3.1 与结论 3.1，满足

$$\|u\|_{L^1([0,T];L^\infty)}^4\le C\|u\|_{L^\infty([0,T];L^2)}^2\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2([0,T];L^2)}^2\le C.$$

下一步，我们的目标就是获得 $\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_{L^2([0,T];L^2)}^2,\|b_t\|_{L^2([0,T];L^2)}^2$ 各自的有界性。因此进一步得出下列命题。

命题 3.2 设 (ρ,u,b) 是方程组(1)在 $[0,T)\times T^2$ 上的光滑解。存在常数 $C>0$，仅依赖于 $T,\left\|\sqrt{\rho_0}u_0\right\|_2,\|b_0\|_2,\|\nabla u_0\|_2,\|\nabla b_0\|_2$，使得对任意 $t\in[0,T)$，有

$$\sup_{t\in[0,T)}\left(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)+\int_0^t\left(\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\|b_t\|_2^2\right)\mathrm{d}t\le C. \tag{31}$$

证明 首先，对$(1)_2$两边同乘积分，结合 Sobolev 不等式，由可 $u,b\in L^2(0,T;L^\infty)$ 得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_2^2+\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2=-\int_{T^2}(\rho u\cdot\nabla u)\cdot u_t\mathrm{d}x+\int_{T^2}b\cdot\nabla b\cdot u_t\mathrm{d}x\\
&\le\frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+C\int_{T^2}\rho|u\cdot\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{T^2}b\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x+\|b_t\|_2\|\nabla u\|_2\|b\|_\infty\\
&\le\frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+C\left\|\sqrt{\rho}|u|^2\right\|_2\left\|\sqrt{\rho}|\nabla u|^2\right\|_2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{T^2}b\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\|b_t\|_2+C\|\nabla u\|_2^2\|b\|_\infty^2\\
&\le\frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+C(\rho^*)\left\|\sqrt{\rho}|u|^2\right\|_2\|\nabla u\|_2\left\|\nabla^2 u\right\|_2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{T^2}b\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\|b_t\|_2+C\|\nabla u\|_2^2\|b\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

因此，利用能量守恒(2)，质量守恒(4)以及引理 2.3，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u\|_2^2+\int_{T^2} b\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x\right)+\frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2 \\
&\le \frac{1}{4}\|b_t\|_2^2+C\|\nabla u\|_2^2\|b\|_\infty^2+C\|\nabla^2 u\|_2^2+C\left(\rho^*\right)\left\|\sqrt{\rho_0}u_0\right\|_2^2\frac{\|\nabla u\|_2^2}{M^2} \\
&\quad +C\left(\rho^*\right)\left\|\sqrt{\rho_0}u_0\right\|_2^2\|\nabla u\|_2^4\log\left(e+\frac{\|\rho_0-M\|_2^2}{M^2}+\rho^*\frac{\|\nabla u\|_2^2}{\left\|\sqrt{\rho_0}u_0\right\|_2^2}\right).
\end{aligned} \tag{32}
$$

利用$(1)_3$两边同乘b_t可推出

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla b\|_2^2+\|b_t\|_2^2 &= \int_{T^2}\left(b\cdot\nabla u\cdot b_t-u\cdot\nabla b\cdot b_t\right)\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{4}\|b_t\|_2^2+C\|u\|_\infty^2\|\nabla b\|_2^2+C\|b\|_\infty^2\|\nabla u\|_2^2.
\end{aligned} \tag{33}
$$

将(32)与(33)加起来意味着

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+\int_{T^2} b\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x\right)+\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\|b_t\|_2^2 \\
&\le C\left(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)\left(\|u\|_\infty^2+\|b\|_\infty^2+1+C\log\left(e+\|\nabla u\|_2^2\right)\|\nabla u\|_2^2\right)+C\|\nabla^2 u\|_2^2,
\end{aligned}
$$

从而两边对时间$t\ge 0$积分可得

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+\int_{T^2} b\cdot\nabla u\cdot b\mathrm{d}x+\int_0^T\left(\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\|b_t\|_2^2\right)\mathrm{d}t \\
&\le C\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)\left(\int_0^T\left(\|u\|_\infty^2+\|b\|_\infty^2+1\right)\mathrm{d}t+C\int_0^T\log\left(e+\|\nabla u\|_2^2\right)\|\nabla u\|_2^2\,\mathrm{d}t\right)+C\int_0^T\|\nabla^2 u\|_2^2\,\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{34}
$$

在这里结合已知条件$\nabla u,\nabla b\in L^\infty\left(R^+;L^2\right)$，$\nabla u,\nabla b\in L^2\left(R^+;L^2\right)$，$u,b\in L^2\left(R^+;L^\infty\right)$以及$\nabla^2 u\in L^2\left(R^+;L^2\right)$可得上述不等式右边可被控制。因此证明出了命题 3.2。

3.2. 时间导数的估计

在这小节中，我们主要目标是得到$u,b,\nabla u,\nabla b$的时空加权估计。即$\sqrt{\rho t}u_t,\sqrt{t}b_t\in L^\infty\left([0,T];L^2\right)$，$\sqrt{t}\nabla u_t,\sqrt{t}\nabla b_t\in L^2\left([0,T];L^2\right)$，为了达到这个目标，对$(1.1)_2$，$(1.1)_3$两边关于时间$t$微分得出

$$
\begin{cases}
\rho u_{tt}+\rho_t u_t+\rho_t u\cdot\nabla u+\rho u_t\cdot\nabla u+\rho u\cdot\nabla u_t-\Delta u_t+\nabla P_t=b_t\cdot\nabla b+b\cdot\nabla b_t \\
b_{tt}+u_t\cdot\nabla b+u\cdot\nabla b_t-\Delta b_t=b_t\cdot\nabla u+b\cdot\nabla u_t.
\end{cases} \tag{35}
$$

现在对$(35)_1$的两边同乘$\sqrt{t}$，经过计算可推出

$$
\begin{aligned}
&\rho\left(\sqrt{t}u_t\right)_t-\frac{1}{2\sqrt{t}}\rho u_t+\sqrt{t}\rho_t u_t+\sqrt{t}\rho_t u\cdot\nabla u+\sqrt{t}\rho u_t\cdot\nabla u+\sqrt{t}\rho u\cdot\nabla u_t-\Delta\left(\sqrt{t}u_t\right)+\nabla\left(\sqrt{t}P_t\right) \\
&=\sqrt{t}b_t\cdot\nabla b+\sqrt{t}b\cdot\nabla b_t,
\end{aligned} \tag{36}
$$

对上式两边同乘$\sqrt{t}u_t$并进行积分得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{T^2}\rho t\left|u_t\right|^2\mathrm{d}x+\int_{T^2}t\left|\nabla u_t\right|^2\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_{T^2}\rho\left|u_t\right|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{T^2}t\rho_t\left|u_t\right|^2\mathrm{d}x-\int_{T^2}\left(\sqrt{t}\rho_t u\cdot\nabla u\right)\cdot\sqrt{t}u_t\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_{T^2}\left(\sqrt{t}\rho u_t\cdot\nabla u\right)\cdot\sqrt{t}u_t\mathrm{d}x-\int_{T^2}\left(\sqrt{t}\rho u\cdot\nabla u_t\right)\cdot\sqrt{t}u_t\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{T^2}\left(\sqrt{t}b_t\cdot\nabla b\right)\cdot\sqrt{t}u_t\mathrm{d}x+\int_{T^2}\left(\sqrt{t}b\cdot\nabla b_t\right)\cdot\sqrt{t}u_t\mathrm{d}x\\
&\cong\frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+II_1+II_2+II_3+II_4+II_5+II_6.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

首先，考虑 II_1，利用 $\rho_t=-div(\rho v)$ 以及 Sobolev 不等式，分部积分得

$$
\begin{aligned}
II_1&=\frac{1}{2}\int_{T^2}tdiv(\rho u)\left|u_t\right|^2\mathrm{d}x\le\int_{T^2}t\rho|u|\left|u_t\right|\left|\nabla u_t\right|\mathrm{d}x\\
&\le C\left(\int_{T^2}\rho t\left|u_t\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{T^2}t\rho|u|^2\left|\nabla u_t\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\left(\rho^*\right)\left\|\sqrt{\rho t}u_t\right\|_2\|u\|_\infty\left\|\sqrt{t}\nabla u_t\right\|_2\\
&\le\frac{1}{12}\left\|\sqrt{t}\nabla u_t\right\|_2^2+C\left(\rho^*\right)\left\|\sqrt{\rho t}u_t\right\|_2^2\|u\|_\infty^2,
\end{aligned}
$$

在上述不等式中，利用了 u 在 $L^4\left(R^+;L^\infty\right)$ 中的有界性，以及 ρ 可被 ρ^* 控制。

利用连续性方程以及分部积分，对 II_2 分析如下

$$
\begin{aligned}
II_2&=\int_{T^2}t\rho u\cdot\nabla\left[u\cdot\nabla u\cdot u_t\right]\mathrm{d}x\\
&\le\int_{T^2}t\rho|u|\left(\left|u_t\right||\nabla u|^2+|u|\left|\nabla^2u\right|\left|u_t\right|+|u||\nabla u|\left|\nabla u_t\right|\right)\mathrm{d}x\\
&\le\|u\|_\infty\left\|\sqrt{\rho t}u_t\right\|_2\left\||\nabla u|^2\sqrt{\rho t}\right\|_2+\|u\|_\infty^2\left\|\sqrt{\rho t}u_t\right\|_2\left\||\nabla u|^2\sqrt{\rho t}\right\|_2\\
&\quad+\frac{1}{12}\left\|\nabla\sqrt{t}u_t\right\|_2^2+C\left(\rho^*\right)T\|u\|_\infty^4\|\nabla u\|_2^2\\
&\le C\left(\rho^*\right)T\|\nabla u\|_2^4+\|u\|_\infty^2\left\|\sqrt{\rho t}u_t\right\|_2^2+C\left(\rho^*\right)T\left\|\nabla^2u\right\|_2^2+\|u\|_\infty^4\left\|\sqrt{\rho t}u_t\right\|_2^2\\
&\quad+\frac{1}{12}\left\|\nabla\sqrt{t}u_t\right\|_2^2+C\left(\rho^*\right)T\|u\|_\infty^4\|\nabla u\|_2^2.
\end{aligned}
$$

考虑 II_3，运用 Sobolev 不等式分析如下

$$
\begin{aligned}
II_3&\le\int_{T^2}\rho t\left|u_t\right|\left|\nabla u_t\right||u|\mathrm{d}x\\
&\le C\left(\rho^*\right)\|u\|_\infty\left\|\sqrt{\rho t}u_t\right\|_2\left\|\sqrt{t}\nabla u_t\right\|_2\\
&\le\frac{1}{12}\left\|\sqrt{t}\nabla u_t\right\|_2^2+C\left(\rho^*\right)\left\|\sqrt{\rho t}u_t\right\|_2^2\|u\|_\infty^2.
\end{aligned}
$$

同理考虑 II_3，运用 Sobolev 不等式分析如下

$$
II_4\le\frac{1}{12}\left\|\sqrt{t}\nabla u_t\right\|_2^2+C\left(\rho^*\right)\left\|\sqrt{\rho t}u_t\right\|_2^2\|u\|_\infty^2.
$$

由于 b 在 $L^4\left(R^+;L^\infty\right)$ 是有界的，运用 Sobolev 不等式分析 II_5 如下

$$\begin{aligned} II_5 &\le \int_{T^2} \rho\sqrt{t}\left|b_t\right|\left|\nabla\sqrt{t}\left|u_t\right|\right|\left|b\right|\mathrm{d}x \\ &\le \|b\|_\infty \left\|\sqrt{t}\nabla u_t\right\|_2 \left\|\sqrt{t}b_t\right\|_2 \\ &\le \frac{1}{12}\left\|\sqrt{t}\nabla u_t\right\|_2^2 + C\left\|\sqrt{t}b_t\right\|_2^2 \|b\|_\infty^2 . \end{aligned}$$

对于上述 $II_1, II_2, II_3, II_4, II_5$ 的分析，全部加到(37)中去，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{\rho}tu_t\right\|_2^2 + \frac{7}{12}\left\|\sqrt{t}\nabla u_t\right\|_2^2 &\le C\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2 + C\left(\rho^*,T\right)\Big(\left\|\sqrt{\rho}tu_t\right\|_2^2\left(\|u\|_\infty^2+\|u\|_\infty^4\right) \\ &\quad + \|u\|_\infty^4\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla u\|_4^4 + \left\|\nabla^2 u\right\|_2^2\Big) + C\|b\|_\infty^2\left\|\sqrt{t}b_t\right\|_2^2 + II_6, \end{aligned} \tag{38}$$

其中 $C\left(T,\rho^*\right)$ 依赖于 T,ρ^*。

下一步，对$(35)_2$两边同乘 $\sqrt{t}$，可知

$$\left(\sqrt{t}b_t\right)_t - \frac{1}{2\sqrt{t}}b_t + \sqrt{t}u_t\cdot\nabla b + \sqrt{t}u\cdot\nabla b_t - \Delta\left(\sqrt{t}b_t\right) = \sqrt{t}b_t\cdot\nabla u + \sqrt{t}b\cdot\nabla u_t .$$

如上述讨论一样，对上述两边同乘 $\sqrt{t}b_t$，再积分可知

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{t}b_t\right\|_2^2 + \left\|\sqrt{t}\nabla b_t\right\|_2^2 + \sqrt{t}u\cdot\nabla b_t - \Delta\left(\sqrt{t}b_t\right) = \sqrt{t}b_t\cdot\nabla u + \sqrt{t}b\cdot\nabla u_t \\ &= \frac{1}{2}\left\|b_t\right\|_2^2 + \int_{T^2}\left(\sqrt{t}b_t\cdot\nabla u\cdot\sqrt{t}b_t - \sqrt{t}u_t\cdot\nabla b\cdot\sqrt{t}b_t\right)\mathrm{d}x + \int_{T^2}\sqrt{t}b\cdot\nabla u_t\cdot\sqrt{t}b_t\mathrm{d}x \\ &\cong \frac{1}{2}\left\|b_t\right\|_2^2 + II_7 + II_8. \end{aligned} \tag{39}$$

为了估计 II_7 项，结合(36)与 Sobolev 不等式可得

$$\begin{aligned} II_7 &\le \|\nabla u\|_2\left\|\sqrt{t}b_t\right\|_4^2 + \|\nabla b\|_2\left\|\sqrt{t}b_t\right\|_3\left\|\sqrt{t}u_t\right\|_6 \\ &\le C\|\nabla u\|_2\left\|\sqrt{t}b_t\right\|_2\left\|\sqrt{t}\nabla b_t\right\|_2 + C\|\nabla b\|_2\left\|\sqrt{t}b_t\right\|_2^{\frac{2}{3}}\left\|\sqrt{t}\nabla b_t\right\|_2^{\frac{1}{3}}\left\|\sqrt{t}b_t\right\|_2^{\frac{1}{3}}\left\|\sqrt{t}\nabla u_t\right\|_2^{\frac{2}{3}} \\ &\le \frac{1}{12}\left\|\sqrt{t}\nabla u_t\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{t}\nabla b_t\right\|_2^2 + C\left(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)\left\|\sqrt{t}b_t\right\|_2^2 + C\left\|\sqrt{\rho}tu_t\right\|_2^2 . \end{aligned} \tag{40}$$

将(40)代入到(39)，将(38)、(39)式相加起来，直接计算得

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\sqrt{\rho}tu_t\right\|_2^2 + \left\|\sqrt{t}b_t\right\|_2^2\right) + \left\|\sqrt{t}\nabla u_t\right\|_2^2 + \left\|\sqrt{t}\nabla b_t\right\|_2^2 \\ &\le C\left(\rho^*,T\right)\left(\left\|\sqrt{\rho}tu_t\right\|_2^2\left(1+\|u\|_\infty^2+\|u\|_\infty^4\right) + \|u\|_\infty^4\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla u\|_4^4 + \left\|\nabla^2 u\right\|_2^2\right) \\ &\quad + C\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2 + \left\|b_t\right\|_2^2 + C\left(\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla b\|_2^2 + \|b\|_\infty^2\right)\left\|\sqrt{t}b_t\right\|_2^2 . \end{aligned}$$

在上述不等式中，由于 $divb=0$，因此 $II_6+II_8=0$。

显然，结合命题 3.1，命题 3.2，与结论 3.1，上述不等式可被估计为

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\sqrt{\rho}tu_t\right\|_2^2 + \left\|\sqrt{t}b_t\right\|_2^2 + \int_0^t \tau\left(\left\|\nabla u_t\right\|_2^2 + \left\|\nabla b_t\right\|_2^2\right)\mathrm{d}\tau\right) \\ &\le h(t)\left(1+\left\|\sqrt{\rho}tu_t\right\|_2^2 + \left\|\sqrt{t}b_t\right\|_2^2\right), \end{aligned} \tag{41}$$

在这里

$$h(t):=C\left(\rho^*,T\right)\left(1+\|u\|_\infty^2+\|u\|_\infty^4+\|u\|_\infty^4\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla u\|_2^4+\left\|\nabla^2 u\right\|_2^2\right)$$
$$+\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\|b_t\|_2^2+C\left(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+\|b\|_\infty^2\right)$$

依赖于 $\rho^*,\left\|\sqrt{\rho_0}u_0\right\|_2,\|b_0\|_2,\|\nabla u_0\|_2,\|\nabla b_0\|_2$。注意到如果解对于密度是远离 0 点的情况，导致

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{T^2}\left(\rho t\left|u_t(t,x)\right|^2+t\left|b_t(t,x)\right|^2\right)\mathrm{d}x=0.$$

因此，对(41)式关于时间 t 积分

$$\left\|\sqrt{\rho t}u_t\right\|_2^2+\left\|\sqrt{t}b_t\right\|_2^2+\int_0^t\tau\left(\|\nabla u_t\|_2^2+\|\nabla b_t\|_2^2\right)\mathrm{d}\tau\le\exp\left\{\int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}-1. \tag{42}$$

假设初始时间为 t_0，利用类似理论可得出下列引理。

引理 3.4 假设解是光滑解。则对于任意 $t_0,T\ge 0$，下列成立

$$\sup_{t\in[t_0,t_0+T]}\int_{T^2}\left(\rho(t-t_0)|u_t|^2+(t-t_0)|b_t|^2\right)\mathrm{d}x+\int_{t_0}^{t_0+T}\int_{T^2}(t-t_0)\left(|\nabla u_t|^2+|\nabla b_t|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C(T), \tag{43}$$

这里当 T 趋向于 0 时，$C(T)$ 趋向于 0。

回顾(42)式，我们断言对任意的 $p<\infty$，我们得到

$$\left\|\sqrt{t}u_t\right\|_{L^2([0,T];L^p)}+\left\|\sqrt{t}b_t\right\|_{L^2([0,T];L^p)}\le C(T). \tag{44}$$

$\overline{u_t}$ 为 u_t 在 T^2 上的平均，可直接计算出

$$\int_{T^2}\rho u_t\mathrm{d}x=M\overline{u_t}+\int_{T^2}\rho\left(u_t-\overline{u_t}\right)\mathrm{d}x, \tag{45}$$

因此利用 Poincaré 不等式可得

$$M\left|\overline{u_t}\right|\le\|\rho\|_2\|\nabla u_t\|_2+M^{\frac{1}{2}}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2.$$

最后结合 Sobolev 嵌入定理给出

$$\|u_t\|_p\le\left\|u_t-\overline{u_t}\right\|_p+\left|\overline{u_t}\right|\le\left(C_p+\frac{\|\rho_0\|_2}{M}\right)\|\nabla u_t\|_2+\frac{1}{M^{1/2}}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2. \tag{46}$$

类似地，记 $\overline{b_t}$ 为 b_t 在 T^2 上的平均，且令 $N=\int_{T^2}a\mathrm{d}x$，a 是非负且非零测度函数，可知

$$N\overline{b_t}=\int_{T^2}au_t\mathrm{d}x+\int_{T^2}(N-a)\left(b_t-\overline{b_t}\right)\mathrm{d}x, \tag{47}$$

在上式中令，记 $a=\rho_0$，根据 Poincaré 不等式可得

$$\|b_t\|_p\le\frac{\|\rho_0\|_2}{M}\|b_t\|_2+\left(\frac{\|M-\rho_0\|_2}{M}+C_p\right)\|\nabla b_t\|_2. \tag{48}$$

结合(46)与(47)式，可得想要的结果(44)。

3.3. 可积性的转移

在该小节中，我们应用前面的结果去得到 $\nabla u,\nabla b$ 在 $L^1\left(0,T;L^\infty\right)$ 中的有界性。在这里，需要利用可积性转移的方法去给出证明。下面，给出我们的结果

引理 3.5 对任意 $T>0, p\in[2,\infty]$ 与充分小的 ε，我们得出

$$\left\|\nabla^2\sqrt{t}u\right\|_{L^p\left(0,T;L^{p^*-\varepsilon}\right)}+\left\|\nabla^2\sqrt{t}b\right\|_{L^p\left(0,T;L^{p^*-\varepsilon}\right)}+\left\|\nabla\sqrt{t}P\right\|_{L^p\left(0,T;L^{p^*-\varepsilon}\right)}\le C_{0,T}, \tag{49}$$

其中 $p^*=\dfrac{2p}{p-2}$， $C_{0,T}$ 依赖于 $\rho^*,\left\|\sqrt{\rho_0}u_0\right\|_2,\left\|b_0\right\|_2,\left\|\nabla u_0\right\|_2,\left\|\nabla b_0\right\|_2$。

更一进步，对任意的 $1\le s<2$，存在 $\beta>0$ 使得

$$\int_0^T\left\|\nabla u(r)\right\|_{L^\infty}^s \mathrm{d}t+\int_0^T\left\|\nabla b(t)\right\|_{L^\infty}^s \mathrm{d}t\le C_{0,T}T^\beta. \tag{50}$$

证明 首先，方程$(1.1)_2$，$(1.1)_3$可以被改写为

$$\begin{cases}-\Delta\sqrt{t}u+\nabla\sqrt{t}P=-\rho\sqrt{t}u_t-\sqrt{t}\rho u\cdot\nabla u+\sqrt{t}b\cdot\nabla b,\\ +u\cdot\nabla b_t-\Delta\sqrt{t}b=-\sqrt{t}b_t-\sqrt{t}u\cdot\nabla b+\sqrt{t}b\cdot\nabla u,\\ div\sqrt{t}u=div\sqrt{t}b=0.\end{cases} \tag{51}$$

由于 $\sqrt{\rho t}u_t,\sqrt{t}b_t$ 在 $L^2\left(0,T;L^2\right)$ 中具有有界性并且 ρ 有界，则我们可得到 $\rho\sqrt{t}u_t$ 在 $L^\infty\left(0,T;L^2\right)$ 中具有界性。另一方面，根据(44)可知 $\sqrt{t}u_t$、以及 $\rho\sqrt{t}u_t,\sqrt{t}b_t$ 对任意有限 q，均属于 $L^2\left(0,T;L^q\right)$。因此利用 Hölder 不等式给出

$$\left\|\rho\sqrt{t}u_t\right\|_{L^p\left(0,T;L^r\right)}+\left\|\sqrt{t}b_t\right\|_{L^p\left(0,T;L^r\right)}\le C_{0,T},$$

其中任意 $p\in[2,\infty],r\in\left[2,p^*\right)$。

现在应用 Hölder 不等式与 $\nabla u\in L^\infty\left(0,T;L^2\right)\cap L^2\left(0,T;H^1\right)$，可得

$$\left\|\nabla u\right\|_{L^p\left(0,T;L^r\right)}\le\left\|\nabla u\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^2\right)}^\theta\left\|\nabla u\right\|_{L^2\left(0,T;H^1\right)}^{1-\theta},\ \theta\in[0,1],$$

这里 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1-\theta}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$， $\dfrac{1}{p}=\dfrac{\theta}{\infty}+\dfrac{1-\theta}{2}$，其中 $p\in[2,\infty],r\in\left[2,p^*\right)$。类似地，对任意的 $p\in[2,\infty],r\in\left[2,p^*\right)$ 有 $\nabla b\in L^p\left(0,T;L^r\right)$。显然， $u,\sqrt{t}\rho u$ 在 $L^q\left(0,T;L^r\right)$ 中具有界性。可得出

$$\begin{aligned}&\left\|\sqrt{t}\rho u\cdot\nabla u\right\|_{L^p\left(0,T;L^r\right)},\left\|\sqrt{t}b\cdot\nabla b\right\|_{L^p\left(0,T;L^r\right)}\le C_{0,T},\\ &\left\|\sqrt{t}b\cdot\nabla u\right\|_{L^p\left(0,T;L^r\right)},\left\|\sqrt{t}u\cdot\nabla b\right\|_{L^p\left(0,T;L^r\right)}\le C_{0,T}.\end{aligned} \tag{52}$$

应用上述估计，结合(51)的最大正则性估计可知，

$$\left\|\nabla^2\sqrt{t}u,\nabla^2\sqrt{t}b,\nabla\sqrt{t}P\right\|_{L^p\left(0,T;L^r\right)}\le C_{0,T}, \tag{53}$$

其中 $p\in[2,\infty],r\in\left[2,p^*\right)$。

下一步，我们需要估计(50)。对于固定 $p\in[2,\infty]$ 使得 $ps<2(p-s)$ 和 $1\le s<2$，通过 $r\in\left(2,p^*\right)$ 可知 $W^{1,r}\to L^\infty$。因此，运用(53)有

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^\infty}^s \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{s}} + \left(\int_0^T \|\nabla b(t)\|_{L^\infty}^s \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\le \left(\int_0^T t^{-\frac{1}{2}} \left\|\nabla\sqrt{t}u(t)\right\|_{W^{1,r}}^s \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{s}} + \left(\int_0^T t^{-\frac{1}{2}} \left\|\nabla\sqrt{t}b(t)\right\|_{W^{1,r}}^s \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\le \left(\int_0^T t^{-\frac{ps}{2p-2s}} \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}} \left(\left\|\nabla\sqrt{t}u(t)\right\|_{L^p\left(0,T;W^{1,r}\right)} + \left\|\nabla\sqrt{t}b(t)\right\|_{L^p\left(0,T;W^{1,r}\right)}\right) \\
&\le C_{0,T} T^{\frac{2p-2s-ps}{2ps}}.
\end{aligned}
$$

下因此，我们得到了想要的结果(50)。

最后，与文献[13]中存在性证明类似，通过上述给出的先验估计可以建立解的存在性。在这里，为了简便，我们忽略该部分的详细证明。

4. 定理 1.1 唯一性的证明

由于密度 ρ 缺乏正则性，很难通过欧拉坐标系去获得解的唯一性。我们需要引入拉格朗日坐标系(可参考文献[13] [14] [15])去证明定理 1.1 的唯一性。首先，需要推导出坐标系改变时包含的代数关系式。定义速度场 u 的流 $X: R^+ \times T^2 \to T^2$，满足下列方程并是唯一解

$$
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = u(t,x), \quad X|_{t=0} = y, y \in \Omega.
$$

在拉格朗日坐标系 (t,y) 中，方程组(1)中的解 (ρ,u,b,P) 对应的解为 (η,v,h,Q) 满足下列关系式

$$
\begin{aligned}
&\eta(t,y) = \rho(t,X(t,y)), \\
&(v,h)(t,y) = (u,b)(t,X(t,y)), \\
&Q(t,y) = P(t,X(t,y)),
\end{aligned}
\tag{54}
$$

其中 $X(t,y)$ 满足

$$
X(t,y) = y + \int_0^t u(\tau,X(\tau,y))\mathrm{d}\tau = \int_0^t v(\tau,X(\tau,y))\mathrm{d}\tau,
$$

因此

$$
\nabla_y X(t,y) = Id + \int_0^t \nabla_y v(\tau,y)\mathrm{d}\tau.
$$

在拉格朗日坐标系 (t,y) 中，算子 ∇, div, Δ 被转换成

$$
\nabla_v :=^T A\nabla_y,\ div_v :=^T A : \nabla_y = div_y(A\cdot),\ \Delta_v := div_y\left(A^T A\nabla_{y\cdot}\right),
$$

其中 $A(t) := \left(\nabla_y X(t,\cdot)\right)^{-1}$ 并且 (η,v,h,Q) 在 $(0,T)\times T^2$ 中满足

$$
\begin{cases}
\eta_t = 0, \\
\eta v_t - \Delta_v v + \nabla_v Q = h\cdot\nabla_v h, \\
h_t - \Delta_v h = h\cdot\nabla_v v, \\
div_v v = div_v h = 0.
\end{cases}
\tag{55}
$$

由于满足条件 $\int_0^T \|\nabla v\|_\infty \mathrm{d}t \le \frac{1}{2}$，则 A 可被改写成

$$A=\left(Id+\left(\nabla_y X-Id\right)\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\int_0^t \nabla_y v(\tau,\cdot)\mathrm{d}\tau\right)^k .$$

现在令$\left(\rho_i,u_i,b_i,P_i\right),i=1,2$为方程组(1)的两个解，$\left(\eta_i,v_i,h_i,Q_i\right)$为(54)的两个解。记$\left(\delta v,\delta h,\delta Q,\delta A\right)=\left(v_2-v_1,h_2-h_1,Q_2-Q_1,A_2-A_1\right)$，经过直接计算可得

$$\begin{cases}\rho_0\delta v_t-\Delta_{v_1}\delta v+\nabla_{v_1}\delta Q=\left(\Delta_{v_2}-\Delta_{v_1}\right)v_2-\left(\nabla_{v_2}-\nabla_{v_1}\right)Q_2-\delta h\cdot\nabla_{v_1}h_1-h_2\cdot\left(\nabla_{v_2}-\nabla_{v_1}\right)h_1-h_2\cdot\nabla_{v_2}\delta h,\\ \delta h_t-\Delta_{v_1}\delta h=\left(\Delta_{v_2}-\Delta_{v_1}\right)h_2-\delta h\cdot\nabla_{v_1}v_1-h_2\cdot\left(\nabla_{v_2}-\nabla_{v_1}\right)v_1-h_2\cdot\nabla_{v_2}\delta v\\ div_{v_1}\delta v=\left(div_{v_1}-div_{v_2}\right)v_2,\ div_{v_1}\delta h=\left(div_{v_1}-div_{v_2}\right)h_2.\end{cases}\tag{56}$$

参考文献[1]中的唯一性证明，对充分小的$T>0$，我们可得$\left(\delta v,\delta h\right)=0$。在这里省略证明过程。因此，回归到欧拉坐标中，在整个空间中的唯一性证明通过一般结论仍然可以得到。

5. 结论

综上，我们通过建立一个全新的先验估计以及利用拉格朗日方法可以得到不可压缩磁流体力学(MHD)方程组的全局解的存在性和唯一性。本文的创新点在于如果不存在电磁场效应，即不可压缩 MHD 方程组(1)简化为不可压缩 Navier-Stokes 方程组。然而，与参考文献[13]相比，方程组(1)中的速度场与磁场之间的强耦合，如$u\cdot\nabla b$，将带来一些新的困难。无法通过应用一般方法来处理这个问题。因此在本文中，我们使用了一些新的技术来克服这些新的困难。需要注意的是我们的结果对于环域T^2推广到无界区域(甚至整个空间(用本文的方法))暂且尚不清楚，后面会继续深入研究。

致　谢

作者非常感谢审稿人提出的建设性的意见和友好的建议。

基金项目

作者由广东省广州市科技计划项目——基础与应用基础研究项目(流体力学方程解的适定性研究，项目编号：202102020830)资助。

参考文献

[1] Choe, H.J. and Kim, H. (2003) Strong Solutions of the Navier-Stokes Equations for Nonhomogeneous Incompressible Fluids. *Communications in Partial Differential Equations*, **28**, 1183-1202. https://doi.org/10.1081/PDE-120021191

[2] Zhang, J. (2015) Global Well-Posedness for the Incompressible Navier-Stokes Equations with Density-Dependent Viscosity Coefficient. *Journal of Differential Equations*, **259**, 1722-1742. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.03.011

[3] Huang, X. and Wang, Y. (2013) Global Strong Solution to the 2D Nonhomogeneous Incompressible MHD System. *Journal of Differential Equations*, **254**, 511-527. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.08.029

[4] Chen, F., Li, Y. and Zhao, Y. (2017) Global Well-Posedness for the Incompressible MHD Equations with Variable Viscosity and Conductivity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **447**, 1051-1071. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.10.059

[5] Lü, B., Xu, Z. and Zhong, X. (2017) Global Existence and Large Time Asymptotic Behavior of Strong Solutions to the Cauchy Problem of 2D Density-Dependent Magnetohydrodynamic Equations with Vacuum. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **108**, 41-62. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2016.10.009

[6] Qiu, H. (2020) Global Stability of Large Solutions to the 3D Nonhomogeneous Incompressible MHD Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **375**, Article ID: 112813. https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112813

[7] Fan, J. and Zhou, Y. (2020) Uniform Regularity of the Density Dependent Incompressible MHD System in a Bounded Domain. *Mathematical Physics*, *Analysis and Geometry*, **23**, Article No. 39.

https://doi.org/10.1007/s11040-020-09364-0

[8] Chen, M., Su, W. and Zang, A. (2021) Local Well-Posedness for the Cauchy Problem of 2D Nonhomogeneous Incompressible and Non-Resistive MHD Equations with Vacuum. *Acta Mathematica Scientia*. *Series A*, **41**, 100-125.

[9] Ki, J. (2022) Regularity for 3D Inhomogeneous Incompressible MHD Equations with Vacuum. *Journal of Mathematical Physics*, **63**, Article ID: 111504. https://doi.org/10.1063/5.0111586

[10] Nirenberg, L. (1959) On Elliptic Partial Differential Equations. *Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **13**, 115-162.

[11] Stein, E.M. (1993) Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton University Press, Princeton. https://doi.org/10.1515/9781400883929

[12] Desjardins, B. (1997) Regularity of Weak Solutions of the Compressible Isentropic Navier-Stokes Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, **22**, 977-1008. https://doi.org/10.1080/03605309708821291

[13] Danchin, R. and Mucha, P.B. (2019) The Incompressible Navier-Stokes Equations in Vacuum. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **72**, 1351-1385. https://doi.org/10.1002/cpa.21806

[14] Danchin, R. and Mucha, P.B. (2012) A Lagrangian Approach for the Incompressible Navier-Stokes Equations with Variable Density. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **65**, 1458-1480. https://doi.org/10.1002/cpa.21409

[15] Danchin, R. (2014) A Lagrangian Approach for the Compressible Navier-Stokes Equations. *Annales de L'institut Fourier*, **64**, 753-791. https://doi.org/10.5802/aif.2865