Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(9), 3794-3803
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.129373

Hans汉斯

宽象限相依随机变量最大和与随机和的渐近尾概率

陈　洋

苏州科技大学数学科学学院，江苏　苏州

收稿日期：2023年7月30日；录用日期：2023年8月23日；发布日期：2023年8月31日

摘　要

本文研究了服从重尾分布的宽象限相依随机变量的最大和与随机和的渐近尾概率，其中随机变量服从长尾分布与控制变化尾分布族的交。结果显示在一定条件下，我们将已有的结果较好的推广到了宽象限相依结构，其最大和与随机和的渐近尾概率仍然成立。

关键词

重尾，最大和，随机和，宽象限相依，尾概率

Asymptotic Tail Probabilities of Maxima of Sums and Random of Sums for Widely Orthant Dependent Random Variables

Yang Chen

School of Mathematical Sciences, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Received: Jul. 30th, 2023; accepted: Aug. 23rd, 2023; published: Aug. 31st, 2023

Abstract

In this paper, we consider the asymptotic tail probabilities of maxima of sums and random of sums for widely orthant dependent random variables with heavy tails. The random variables belong to the intersection of the long-tailed distributions class and the dominated varying tails distributions class. Under certain conditions, we will extend the results to the widely dependence structure, and the asymptotic tail probabilities of maxima of sums and random of sums are still true.

文章引用: 陈洋. 宽象限相依随机变量最大和与随机和的渐近尾概率[J]. 应用数学进展, 2023, 12(9): 3794-3803.
DOI: 10.12677/aam.2023.129373

Keywords

Heavy Tails, Maxima of Sums, Random of Sums, Widely Orthant Dependent, Tail Probabilities

1. 引言

随机变量的和、最大和与随机和的相关问题，在保险和金融风险领域具有广泛的应用。特别是在风险理论中，随机变量最大和通常用于描述在某个风险事件中可能发生的最大损失或最大收益。例如，在投资组合中，可以用随机变量最大和来衡量最坏情况下的损失。在破产概率计算中，随机和经常用于描述某个实体面临的风险累积。例如，在保险领域，随机和可以用于估计某个保险公司在某个时间段内面临的索赔总额，研究破产概率的渐近性问题。因此，本文的研究内容对于研究风险损失和破产概率具有一定的重要意义。

设 $\{X_k : k \ge 1\}$ 是一列同分布随机变量具有共同的分布 $F(x) = 1 - \bar{F}(x)$。设

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ S_{(n)} = \max_{1 \le k \le n} S_k, n \ge 1, S_\tau = \sum_{k=1}^{\tau} X_k$$

对于所有的 $x \ge 1$，其中 τ 与随机变量序列 $\{X_k : k \ge 1\}$ 时相互独立的。我们称上面三式分别为随机变量的和、最大和、随机和。如无特别说明，本文中所有的极限为 $x \to \infty$。

对于独立的重尾随机变量和的渐近尾概率已经被很多的学者研究了。大部分结果显示和的尾概率渐近等价于单个尾概率的和，这就是著名的一个大跳原则。但是独立性假设在应用问题中并不现实，人们开始研究相依重尾随机变量和的情形，文献[1] [2]研究了具有负相依随机变量的最大和的渐近尾概率。文献[3]考虑了两两准渐近独立的随机变量的和、最大和的渐近尾概率。文献[4]考虑了一类相依次指数随机变量的和与最大和的尾概率。

文献[5] [6]研究了随机加权和的尾行为。因此，在满足某些条件下，我们可以得到如下的关系式

$$P(S_n > x) \sim P\left(S_{(n)} > x\right) \sim n\bar{F}(x) \tag{1.1}$$

成立对于所有的 $n \ge 1$。

在上述的一些文献中，人们还研究了随机和的尾概率的情况。设 τ 是一个非负整数值随机变量并且与序列 $\{X_k : k \ge 1\}$ 独立。在一定的条件下，有如下关系式

$$P(S_\tau > x) \sim P\left(S_{(\tau)} > x\right) \sim E\tau\bar{F}(x) \tag{1.2}$$

成立。上述的结果是在随机变量序列 $\{X_k : k \ge 1\}$ 的分布属于重尾分布，而 τ 是一个非负整数值随机变量，不考虑其分布是否是重尾的情况下获得的。此外，有部分研究者考虑随机变量 τ 的分布也是一个重尾分布，获得了一些相关的结果。

在本文里，我们考虑随机变量序列 $\{X_k : k \ge 1\}$ 是更一般的宽相依结构，有关宽相依的概念以及相关的性质参见文献[7]。

定义 1.1 对于随机变量 $\{X_k : k \ge 1\}$，若对每一个 $n \ge 1$，存在一有限实数列 $\{g_U(n) : n \ge 1\}$ 使得对于所

有 $x_k \in (-\infty,\infty), 1\le k\le n$，有

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k > x_k\}\right) \le g_U(n)\prod_{k=1}^{n} P\{X_k > x_k\}, \tag{1.3}$$

则称随机变量 $\{X_k : k\ge 1\}$ 为宽上象限相依(widely upper orthant dependent)列，简称 WUOD 列。

若对每一个 $n\ge 1$，存在一有限实数列 $\{g_L(n): n\ge 1\}$ 使得对于所有 $x_k \in (-\infty,\infty), 1\le k\le n$，有

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k \le x_k\}\right) \le g_L(n)\prod_{k=1}^{n} P\{X_k \le x_k\}, \tag{1.4}$$

则称随机变量 $\{X_k : k\ge 1\}$ 为宽下象限相依(widely lower orthant dependent) 列，简称 WLOD 列。

若随机变量 $\{X_k : k\ge 1\}$ 即是 WUOD 的，又是 WLOD 的，则称其为宽象限相依(widely orthant dependent)列，简称 WOD 列。

WUOD，WLOD 和 WOD 随机变量统称为宽相依随机变量，简称为 WD 结构。其中 $g_U(n)$，$g_L(n), n\ge 1$ 分别称为宽上、宽下控制系数，简称控制系数，显然，所有的控制系数不小于 1 且 $g_U(n)$(或 $g_L(n)$)不降。

显然，在(1.3)及(1.4)中，当对任意 $n\ge 1$，$g_U(n)=g_L(n)\equiv 1$ 时，分别称随机变量 $\{X_k : k\ge 1\}$ 为负上象限相依(negatively upper orthant dependent)和负下象限相依(negatively lower orthant dependent)，分别简称为 NUOD 和 NLOD。若随机变量 $\{X_k : k\ge 1\}$ 既是 NUOD 的，又是 NLOD 的，则称其为负象限相依(negatively orthant dependent)，简称 NOD。其相关的概念和性质可以参见文献[8] [9]等。

当存在某正常数 $M\ge 1$ 并且对于所有的 $g_U(n)=g_L(n)\equiv M$ 时，(1.3)或(1.4)成立，则分别称随机变量 $\{X_k : k\ge 1\}$ 为广义负上象限相依(extended negatively upper orthant dependent)或广义负下象限相依(extended negatively lower orthant dependent)，简称为 ENUOD 或 ENLOD。若随机变量 $\{X_k : k\ge 1\}$ 既是 ENUOD 的，又是 ENLOD 的，则称其为广义负象限相依(extended negatively orthant dependent)，简称为 ENOD。这个概念首次由在文献[10]中提出。有关广义负相依随机变量的进一步研究，请参见文献[11] [12] [13] [14]等。

对于宽象限相依结构，我们假设下面的式子对于某个 $b>0$ 成立，

$$\lim_{n\to\infty} g_U(n) n^{-b} = 0 \tag{1.5}$$

和

$$\lim_{n\to\infty} g_L(n) n^{-b} = 0 \tag{1.6}$$

从 WLOD 与 WUOD 的定义可以得到下面的命题。

命题 1.1 1) 设 $\{X_k : k\ge 1\}$ 为 WLOD (WUOD)的随机变量列。

若 $\{f_k(\cdot): k\ge 1\}$ 为正非降函数，则 $\{f_k(X_k): k\ge 1\}$ 仍为 WLOD (WUOD)的，且 $\{f_k(X_k): k\ge 1\}$ 与 $\{X_k : k\ge 1\}$ 的 $g_L(n)$ (或 $g_U(n)$)相同，$n\ge 1$。

若 $\{f_k(\cdot): k\ge 1\}$ 为正非增函数，则 $\{f_k(X_k): k\ge 1\}$ 为 WUOD (WLOD)的，且 $\{f_k(X_k): k\ge 1\}$ 与 $\{X_k : k\ge 1\}$ 的 $g_U(n)$ (或 $g_L(n)$)相同，$n\ge 1$。

2) 若 $\{X_k : k\ge 1\}$ 为非负 WUOD 随机变量，则对每一个 $k\ge 1$，

$$E\prod_{k=1}^{n} X_k \le g_U(n)\prod_{k=1}^{n} EX_k$$

特别地，若 $\{X_k : k\ge 1\}$ 为 WUOD，则对每一个 $k\ge 1$ 及任意 $s>0$，

$$E\exp\left\{s\sum_{k=1}^{n} X_k\right\} \le g_U(n)\prod_{k=1}^{n} E\exp\{sX_k\}.$$

下面我们给出一些重要的重尾分布族的概念。

定义 1.2 称一个支撑在$[0,\infty)$上的分布 F 属于长尾分布族，记作 $F\in L$，

如果对任意给定的 $y>0$ (或等价地，对 $y=1$)，

$$\bar{F}(x+y)\sim\bar{F}(x).$$

L 族的一个重要的分布子族是次指数分布族，最早是由文献[15]在研究分支过程时引入的。下面给出 L 族的一个重要性质，可参见文献[16]。

命题 1.2 随机变量 X 的分布 $F\in L$ 当且仅当

$$H(F)=\left\{h(x):[0,\infty)\to[0,\infty);h(x)\uparrow\infty,\frac{h(x)}{x}\to 0,\frac{\bar{F}(x-h(x))}{\bar{F}(x)}\to 1\right\}\neq\phi.$$

在集 $H(F)$ 中，称所有使得 $h(x)x^{-1}\downarrow 0$ 的函数组成强不敏感函数族，记作 $H^*(F)$。因其成员具如更优良的性质，故在许多场合能起到特别的作用。

下面给出长尾分布族的一个重要的子族。

定义 1.3 称一个支撑在$[0,\infty)$上的分布 F 属于次指数分布族，记作 $F\in S$，如果

$$\bar{F}^{*2}(x)\sim 2\bar{F}(x).$$

文献[17]引入了一个与 L 族互不包含的分布族，本文所要研究的分布族的范围就是该分布族与 L 族的交。

定义 1.4 称一个支撑在$[0,\infty)$上的分布 F 属于控制变化尾分布族，记作 $F\in D$，如果对任意给定的 $y\in(0,1)$ (或等价地，对 $y=1/2$)，

$$\bar{F}(xy)=O(1)\bar{F}(x).$$

定义 1.5 称一个支撑在$[0,\infty)$上的分布 F 属于一致变化尾分布族，记作 $F\in C$，如果

$$\lim_{y\to 1}\limsup_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)}=1.$$

更一般地，称一个支撑在$(-\infty,\infty)$的分布 F 属于某个重尾分布族，如果 $F^+(x)=F(x)1_{\{X\geq 0\}}$ 也属于该分布族，可以参见文献[18]等。

对任一支撑在$(-\infty,\infty)$上的分布 $F(x)$ 和任意的 $y>1$，记

$$\bar{F}_*(y)=\lim_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)}\text{ 和 }J_F^+=-\lim_{y\to\infty}\frac{\log\bar{F}_*(y)}{\log y}.$$

称 J_F^+ 为分布 $F(x)$ 的上 Matuszewska 指标。相关细节可参考文献[19] [20]等。

下面的命题来自出了文献[19] [20]。

命题 1.3 对于一个支撑在$(-\infty,\infty)$上的分布 F，如果 $F\in D$，那么下面的结论成立：

i) 对于任意的 $p>J_F^+$，有 $x^{-p}=o(\bar{F}(x))$。

ii) 对于任意的 $p>J_F^+$，存在正常数 C 和 D，使得当 $x\geq y\geq D$ 时，下列不等式

$$\frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)}\leq C\left(\frac{x}{y}\right)^p$$

成立。

2. 最大和与随机和的尾概率

2.1. 主要结果

首先，我们将随机变量序列$\{X_k:k\ge1\}$推广到宽相依结构，该相依结构包含正相依、负相依等具有更一般性，获得了最大和的尾概率的渐近性。第一个主要结果总结为如下的定理。

定理 2.1 设$\{X_k:k\ge1\}$是一列 WUOD 随机变量，在$[s,\infty)$具有共同的分布 F，其中$s>-\infty$，并且$EX_1^r<\infty$对于某个$r>1$。如果$F\in L\cap D$，存在$h(x)\in H(F)$使得

$$\frac{F(-h(x))}{\bar{F}(x)}\to0 \tag{2.1}$$

那么，对于每个$n\ge1$有

$$P(S_n>x)\sim P(S_{(n)}>x)\sim n\bar{F}(x) \tag{2.2}$$

成立。

其次，我们考虑随机和的尾概率的情形，将随机变量推广到宽相依结构，在一定的矩条件下，同样我们得到如下的结果。

定理 2.2 设$\{X_k:k\ge1\}$是一列 WUOD 随机变量在$[s,\infty)$具有共同的分布 F，其中$s>-\infty$，并且$EX_1^r<\infty$对于某个$r>1$。设τ是一个非负整数值随机变量与序列$\{X_k:k\ge1\}$相互独立，$E\tau^p<\infty$对于某个$p>J_F^+$。如果$F\in L\cap D$满足条件(2.1)，对于任意$b>0$对于充分大的 n，$g_U(n)n^{-b}<\infty$。那么，对于每个$n\ge1$，

$$P(S_\tau>x)\sim P(S_{(\tau)}>x)\sim E\tau\bar{F}(x) \tag{2.3}$$

成立。

我们将随机变量的相依结构推广到宽相依结构，在满足相应的一些条件后，结论仍然成立的，并且这些条件在证明中是不可或缺的。

2.2. 引理

下面的引理对本文结论的证明起到非常关键作用，证明步骤与文献[1]的引理 3.1 和文献[12]的引理 3.5 基本一致。在文献[1]中的引理 3.1 中考虑的是 NA 随机变量，而文献[12]的引理 3.5 考虑的是 END 随机变量。本引理进一步将上述结果推广到 WUOD 随机变量。

引理 2.1 设$\{X_k:k\ge1\}$是一列 WUOD 随机变量具有共同分布 F，并且$EX_1^r<\infty$对于某个$r>1$。存在常数$0<\beta<1$和$C_1,C_2>0$，那么对于任意$0<\theta<1,x>0$和$n\ge1$，有

$$P\left(S_n>x,\bigcap_{i=1}^n(X_i\le\theta x)\right)\le g_U(n)Cx^{-\frac{(1-\beta)(r-1)n}{2\theta}+1} \tag{2.4}$$

和

$$P(S_n>x)\le g_U(n)C_1x^{-\frac{(1-\beta)(r-1)n}{2\theta}+1}+C_2n\bar{F}(x) \tag{2.5}$$

成立。

证明 对于任意给定的$u>0$，我们记

$$\tilde{X}_{ki}=\min\{X_k,\theta(x+iu)\}\text{ 和 }\eta=\eta(x,i)=\log(x+iu)\text{。}$$

由于 $\{\tilde{X}_{ki}+u:k\ge 1\}$ 仍然是 WUOD 对于每个 $i\ge 1$。由命题 1.1 (2)，我们有

$$
\begin{aligned}
&P\left(S_n>x,\bigcap_{i=1}^{n}(X_i\le \theta x)\right)\\
&\le \sum_{i=1}^{n}P\left(\sum_{k=1}^{i}\left(\tilde{X}_{ki}+u\right)>x+iu\right)\\
&\le g_U(n)\sum_{i=1}^{n}\left(E\left(\exp\left\{h\left(\tilde{X}_{ki}+u\right)\right\}-1+1\right)^{i}\exp\left\{-h(x+iu)\right\}\right)
\end{aligned}
$$

应用基本不等式 $1+x\le \mathrm{e}^{x}$，对于所有的实数 x，我们有

$$
P\left(S_n>x,\bigcap_{i=1}^{n}(X_i\le \theta x)\right)\le g_U(n)\sum_{i=1}^{n}\exp\left\{g_i-h(x+iu)\right\} \tag{2.6}
$$

其中 $h=h(x,i)$ 和

$$
\begin{aligned}
g_i&=iE\left[\exp\left\{h\left(\tilde{X}_{ki}+u\right)\right\}-1\right]\\
&=i\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\frac{\theta(x+iu)}{\eta^2}}+\int_{\frac{\theta(x+iu)}{\eta^2}}^{\eta(x+iu)}\right)\left(\mathrm{e}^{h(t+u)}-1\right)\mathrm{d}F(t)\\
&=g_i^{(1)}+g_i^{(2)}+g_i^{(3)}
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

我们首先估计 $g_i^{(1)}$。由控制收敛定理

$$
\lim_{h\downarrow 0}\frac{\int_{-\infty}^{0}\left(\mathrm{e}^{h(t+u)}-1\right)\mathrm{d}F(t)}{h}=\int_{-\infty}^{0}\lim_{h\downarrow 0}\frac{\mathrm{e}^{h(t+u)}-1}{h}\mathrm{d}F(t)=-EX_1^{-}+\beta u.
$$

因此，存在某个实函数 $\phi(h)\to 0$，当 $h\downarrow 0$ 时。使得

$$
g_i^{(1)}=\left(1+\phi(h)\right)ih\left(-EX_1^{-}+\beta u\right). \tag{2.8}
$$

其次，我们处理 $g_i^{(2)}$。对于某个 $1<q<\min\{r,2\}$，由 $\left(\mathrm{e}^{h(t+u)}-1-ht\right)\big/t^{q}$ 的单调性，我们有

$$
\begin{aligned}
g_i^{(2)}&\le i\int_{0}^{\frac{\theta(x+iu)}{\eta^2}}\frac{\mathrm{e}^{h(t+u)}-1-ht}{t^{q}}t^{q}\mathrm{d}F(t)\\
&\le i\left(\exp\left\{h\left(\frac{\theta(x+iu)}{\eta^2}+u\right)\right\}-1-h\frac{\theta(x+iu)}{\eta^2}\right)\left(\frac{\theta(x+iu)}{\eta^2}\right)^{-q}E\left(X_1^{+}\right)^{q}+ihEX_1^{+}.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

令 $h=\dfrac{(r-1)\eta-2r\log\eta}{\eta(x+iu)}$，

当 $x\to\infty$ 时，其趋向于 0 对于每个 $i\ge 1$。由(2.9)，存在某个 $\psi(h)\to 0$ 当 $h\downarrow 0$，使得每个 $i\ge 1$ 和充分大的 x，

$$
g_i^{(2)}\le ih\psi(h)+ihEX_1^{+}. \tag{2.10}
$$

由(2.8)和(2.10})以及充分大的 x，使得

$$
\left|\phi(h)\right|\le \min\left\{\frac{(1-\beta)u}{12EX_1^{-}},\frac{1-\beta}{12\beta}\right\}\text{和 }\psi(h)\le\frac{(1-\beta)u}{12},
$$

则有

$$\begin{aligned} g_i^{(1)}+g_i^{(2)} &\le -\phi(h)ihEX_1^- + (1+\phi(h))\beta iuh + ih\psi(h) \\ &\le \frac{1-\beta}{12}iuh + \left(\beta+\frac{1-\beta}{12}\right)iuh + \frac{1-\beta}{12}iuh \\ &\le \frac{3\beta+1}{4}(x+iu)h \\ &\le \frac{(3\beta+1)(r-1)\eta}{4\theta}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

最后处理 $g_i^{(3)}$.对于每个 $i\ge 1$ 和充分大的 $x>0$，我们有

$$\begin{aligned} g_i^{(3)} &\le i\bar{F}\left(\frac{\theta(x+iu)}{\eta^2}\right)\exp\left\{h\left[\theta(x+iu)+u\right]\right\} \\ &\le \frac{iE|X_1|^r\eta^{2r}}{(x+iu)^r\theta^r}\exp\left\{h\left[\theta(x+iu)+u\right]\right\} \le C. \end{aligned} \tag{2.12}$$

将(2.11)和(2.12)代入(2.7)，对于每个 $i\ge 1$ 和充分大的 $x>0$，

$$g_i - h(x+iu) \le \frac{(\beta+1)(r-1)\eta}{2\theta} - \frac{(r-1)\eta}{\theta} = -\frac{(1-\beta)(r-1)\eta}{2\theta}. \tag{2.13}$$

(2.6)暗示对于每个 $i\ge 1$ 和充分大的 $x>0$，

$$\begin{aligned} P\left(S_n > x, \bigcap_{i=1}^n (X_i \le \theta x)\right) &\le g_U(n)\sum_{i=1}^n (x+iu)^{-\frac{(1-\beta)(r-1)\eta}{2\theta}} \\ &\le g_U(n)\int_0^n (x+zu)^{-\frac{(1-\beta)(r-1)\eta}{2\theta}}\mathrm{d}z \\ &\le g_U(n)C_1 x^{-\frac{(1-\beta)(r-1)\eta}{2\theta}+1}. \end{aligned}$$

由(2.4)，对于每个 $i\ge 1$ 和充分大的 $x>0$，

$$\begin{aligned} P(S_n > x) &\le n\bar{F}(\theta x) + P\left(S_n > x, \bigcap_{i=1}^n (X_i \le \theta X)\right) \\ &\le g_U(n)C_1 x^{-\frac{(1-\beta)(r-1)n}{2\theta}+1} + C_2 n\bar{F}(x) \end{aligned}$$

从而得证。

3. 定理的证明

本节，我们将对本文的主要结果进行详细的证明。

3.1. 定理 2.1 的证明

我们首先证明对于每个 $n\ge 1$，

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{P(S_n > x)}{n\bar{F}(x)} \ge 1 \tag{3.1}$$

成立。

设 $\tilde{X}_k = X_k 1_{(X_k > -h(x))} - h(x)1_{(X_k \le -h(x))}, k\ge 1$。那么，对于任意 $x>0$ 和 $n\ge 1$，我们有

$$
\begin{aligned}
P\left(S_n>x\right)&=P\left(\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k+\sum_{k=1}^n\left(X_k-\tilde{X}_k\right)>x\right)\\
&=P\left(\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k+\sum_{k=1}^n\left(X_k+h(x) 1_{\left(X_k \leq-h(x)\right)}\right)>x\right)\\
&\geq P\left(\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k>x+h(x)\right)-P\left(\sum_{k=1}^n\left(X_k 1_{\left(X_k \leq-h(x)\right)}\right)>x\right)\\
&=P\left(\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k>x+h(x)\right)-P\left(\bigcup_{K=1}^n\left\{X_k \leq-h(x)\right\}\right)\\
&=I_1(x)+I_2(x).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

由命题 1.1，$\left\{\tilde{X}_k: k \geq 1\right\}$ 仍然是 WUOD。由命题 1.2 和 1.3，我们获得

$$
\begin{aligned}
I_1(x)&\geq P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \tilde{X}_k>x+h(x)\right)\\
&\geq \sum_{k=1}^n P\left(\tilde{X}_k>x+h(x)\right)-\sum_{1 \leq l<k \leq n} P\left(\tilde{X}_l>x+h(x), \tilde{X}_k>x+h(x)\right)\\
&\geq n \bar{F}(x+h(x))-g_U(n)\left(n \bar{F}(x+h(x))\right)^2\\
&\sim n \bar{F}(x+h(x)) \sim n \bar{F}(x).
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

对于 $I_2(x)$，由条件(2.1)，我们有

$$
I_2(x) \leq n F(-h(x))=o(1) n \bar{F}(x).
\tag{3.4}
$$

那么将(3.3)和(3.4)代入(3.2)可得到(3.1)。

下面，我们证明对于每个 $n \geq 1$

$$
\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P\left(S_n>x\right)}{n \bar{F}(x)} \leq 1.
\tag{3.5}
$$

由于 $F \in L$ 和命题 1.3，存在 $h(x) \in H(F)$。对于任意给定的 $\theta>0$ 使得 $1/\theta>J_F^{+}$，那么对于任意 $x>0$ 和 $n \geq 1$，我们有

$$
\begin{aligned}
P\left(S_n>x\right) \leq& P\left(\bigcup_{k=1}^n\left\{X_k>x-h(x)\right\}\right)+P\left(S_n>x, \bigcap_{k=1}^n\left\{X_k \leq x-h(x)\right\}, \bigcup_{k=1}^n\left\{X_k>\theta x\right\}\right)\\
&+P\left(S_n>x, \bigcap_{k=1}^n\left\{X_k \leq \theta x\right\}\right)\\
\leq& n \bar{F}(x-h(x))+\sum_{k=1}^n P\left(S_n-X_k>h(x), X_k>\theta x\right)+P\left(S_n>x, \bigcap_{k=1}^n\left\{X_k \leq \theta x\right\}\right)\\
=& I_3(x)+I_4(x)+I_5(x).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

由 $h(x) \in H(F)$，我们获得

$$
I_3(x) \sim n \bar{F}(x).
\tag{3.7}
$$

对于 $I_4(x)$，由于 $\left\{X_k: k \geq 1\right\}$ 是 WUOD， $F \in D$ 和 $h(x) \in H(F)$，我们有

$$
\frac{I_4(x)}{n \bar{F}(x)} \leq \frac{g_U(n)}{n} \frac{\bar{F}(\theta x)}{\bar{F}(x)} \sum_{k=1}^n P\left(S_n-X_k>h(x)\right) \rightarrow 0
\tag{3.8}
$$

当 $x \rightarrow \infty$。对于 $I_5(x)$，由命题 1.2 和引理 2.1，我们有

$$\frac{I_5(x)}{n\bar{F}(x)} \le \frac{g_U(n)C_1}{n}\frac{x^{-\frac{(1-\beta)(r-1)\eta}{2\theta}+1}}{\bar{F}(x)} \to 0 \tag{3.9}$$

当 $x \to \infty$。将(3.7)~(3.9)代入(3.6)获得(3.5)。由(3.1)~(3.5)，

$$P(S_n > x) \sim n\bar{F}(x)$$

成立。由于

$$P(S_n > x) \le P\left(S_{(n)} > x\right) \le P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^+ > x\right),$$

我们有

$$P\left(S_{(n)} > x\right) \sim n\bar{F}(x)$$

成立。

3.2. 定理 2.2 的证明

因为另一个关系 $P\left(S_{(\tau)} > x\right) \sim E\tau\bar{F}(x)$ 也能被类似地证明。我们只证明关系

$$P(S_\tau > x) \sim E\tau\bar{F}(x)$$

对于任意地 $x > 0$，我们有

$$P(S_\tau > x) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(S_{(n)} > x\right)P(\tau = n). \tag{3.10}$$

由于 $F \in D$ 和命题 1.2，存在 $C = C(\theta) > 0$ 和 $x_0 > 0$，使得 $x > x_0$，我们有

$$\bar{F}(\theta) \le C\bar{F}(x), x^{-\frac{1}{\theta}} \le C\bar{F}(x). \tag{3.11}$$

对于上面的 θ 和任意的 $n \ge 1$，由引理 2.1 和(3.11)式，使得对于任意地 $x > x_0$ 和某个 $b > 0$，我们有

$$\begin{aligned} P(S_\tau > x) &\le g_U(n)C_1 x^{-\frac{(1-\beta)(r-1)\eta}{2\theta}+1} + C_2 n\bar{F}(x) \\ &\le g_U(n)CC_1\bar{F}(x) + C_2 n\bar{F}(x) \\ &\le M\left(1 + g_U(n)n^{-1}\right)n\bar{F}(x) \end{aligned}$$

其中 $M = \max\{CC_1, C_2\}$。由(1.6)、(3.10)式和(3.12)式，$E\tau^p < \infty$，应用定理 2.1 和控制收敛定理，我们获得

$$P(S_\tau > x) \sim E\tau\bar{F}(x)$$

证明完毕。

4. 结论

本文研究的宽相依结构不仅包含常见的负相依结构，也包含部分正相依以及非正非负相依，其在风险理论和破产概率中具有广泛的应用价值。本文将已有的结果推广到更宽泛的宽相依结构，获得了宽相依随机变量的最大和与随机和的渐近尾概率，其结果可应用到具有投资收益和常利率的保险风险模型中，并且对于评估投资组合的风险、制定保险产品的定价、以及决策风险管理策略等方面也起到了非常大的作用。本文研究的索赔额分布属于 $L \cap D$，那么对于更大的重尾分布族次指数分布族其结论是否还能保持上述的渐进关系，有待于下一步解决。

基金项目

教育部人文社会科学研究青年基金项目(18YJC910004)；国家自然科学基金项目(12071335)；教育部产学合作协同育人项目(220605181022922)。

参考文献

[1] Wang, D. and Tang, Q. (2004) Maxima of Sums and Random Sums for Negatively Associated Random Variables with Heavy Tailed. *Statistics & Probability Letters*, **68**, 287-295. https://doi.org/10.1016/j.spl.2004.03.011

[2] Tang, Q. (2008) Insensitivity to Negative Dependence of Asymptotic Tail Probabilities of Sums and Maxima of Sums. *Stochastic Analysis and Applications*, **26**, 435-450. https://doi.org/10.1080/07362990802006964

[3] Chen, Y. and Yuen, K. (2009) Sums of Pairwise Quasi-Asymptotically Independent Random Variables with Consistent Variation. *Stochastic Models*, **25**, 76-89. https://doi.org/10.1080/15326340802641006

[4] Yang, Y., Wang, K., Remigijus, L. and Šiaulys, J. (2011) Tail Behavior of Sums and Maxima of Sums of Dependent Subexponential Random Variables. *Acta Applicandae Mathematicae*, **114**, 219-231. https://doi.org/10.1007/s10440-011-9610-1

[5] Yang, Y., Ignatavičiūtė, E. and Siaulys, J. (2015) Conditional Tail Expectation of Randomly Weighted Sums with Heavy-Tailed Distributions. *Statistics & Probability Letters*, **105**, 20-28. https://doi.org/10.1016/j.spl.2015.05.016

[6] Chen, Y. and Yang,Y. (2019) Bivariate Regular Variation among Randomly Weighted Sums in General Insurance. *European Actuarial Journal*, **9**, 301-322. https://doi.org/10.1007/s13385-019-00197-y

[7] Wang, K., Wang, Y. and Gao, Q. (2013) Uniform Asymptotics for the Finite-Time Ruin Probability of a New Dependent Risk Model with A Constant Interest Rate. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **15**, 109-124. https://doi.org/10.1007/s11009-011-9226-y

[8] Ghosh, M. (1981) Multivariate Negative Dependence. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **10**, 307-337. https://doi.org/10.1080/03610928108828041

[9] Block, H.W., Savits, T.H. and Shaked, M. (1982) Some Concepts of Negative Dependence. *Annals of Probability*, **10**, 765-772. https://doi.org/10.1214/aop/1176993784

[10] Liu, L. (2009) Precise large Deviations for Dependent Random Variables with Heavy Tails. *Statistics & Probability Letters*, **79**, 1290-1298. https://doi.org/10.1016/j.spl.2009.02.001

[11] Chen, Y., Chen, A. and Ng, K.W. (2010) The Strong Law of Large Numbers for Extend Negatively Dependent Random Variables. *Journal of Applied Probability*, **47**, 908-922. https://doi.org/10.1239/jap/1294170508

[12] Liu, L. (2010) Necessary and Sufficient Conditions for Moderate Deviations of Dependent Random Variables with Heavy Tails. *Science China Mathemaics A*, **53**, 1421-1434. https://doi.org/10.1007/s11425-010-4012-9

[13] Chen, Y., Wang, Y. and Wang, K. (2013) Asymptotic Results for Ruin Probability of a Two-Dimensional Renewal Risk Model. *Stochastic Analysis and Applications*, **31**, 80-91. https://doi.org/10.1080/07362994.2013.741386

[14] Yang, Y. and Wang, Y. (2013) Tail Behavior of the Product of Two Dependent Random Variables with Applications to Risk Theory. *Extremes*, **16**, 55-74. https://doi.org/10.1007/s10687-012-0153-2

[15] Chistyakov, V.P. (1964) A Theorem on Sums of Independent Positive Random Variables and Its Applications to Branching Process. *Theory of Probability and Its Applications*, **9**, 640-648. https://doi.org/10.1137/1109088

[16] Cline, D.B.H. and Samorodnitsky, G. (1994) Subexponentiality of the Product of Independent Random Variables. *Stochastic Processes and their Applications*, **49**, 75-98. https://doi.org/10.1016/0304-4149(94)90113-9

[17] Feller, W. (1969) One-Sided Analogues of Karamata's Regular Variation. *L'Enseignement Mathématique*, **15**, 107-121.

[18] Foss, S. and Zachary, S. (2003) The Maximum on a Random Time Interval of a Random Walk with Long-Tailed Increments and Negative Drift. *Annals of Applied Probability*, **13**, 37-53. https://doi.org/10.1214/aoap/1042765662

[19] Bingham, N.H., Goldie, C.M. and Teugels, J.L. (1987) Regular Variation. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511721434

[20] Tang, Q. and Tsitsiashvili, G. (2003) Precise Estimates for the Ruin Probability Infinite Horizon in a Discrete-Time Model with Heavy-Tailed Insurance and Financial Risks. *Stochastic Processes and Their Applications*, **108**, 299-325. https://doi.org/10.1016/j.spa.2003.07.001